

מדריך למורה

חוברת תכנון לינארי

כיתה י"ב 3 יחידות לימוד

תוכנית לימודים חדשה במתמטיקה

(החוברת מותאמת לתוכנית לימודים חדשה משלבת שאלות מתוך חוברת תכנון לינארי של מכון ויצמן למדע, בנוסף שאלות תרגול מתוך דוגמאות ומבחני בגרות, פעילויות בדסמוס והילקוט הדיגיטלי, סרטונים ומצגות).

הנחיות למורים:

חשוב לציין בתכנון לינארי הנושא קווי גובה לא בתוכנית לימודים חדשה. על מנת למצוא מקסימום/מינימום של פונקציית מטרה, ניתן להציב את קודקודי התחום בפונקציית המטרה ולמצוא את הנדרש. שימו לב, אם אחרי הצבת שיעורי הקודקודים בפונקציית מטרה התקבל אותו ערך מקסימלי/מינימלי בשני קודקודים בתחום האפשרי, אז הערך המקסימלי/המינימלי הוא לאורך כל הצלע (ז"א ערך מקסימלי/מינימלי מתקבל בכל נקודה על הצלע).

בכל מקום שיש הפניה לקווי גובה, ניתן לשנות את הניסוח ולחשב מקסימום/מינימום של פונקציית המטרה באמצעות הקודקודים. פרט לחוברת יש בתכנית הלימודים דוגמאות והנחיות להוראת הנושא.

תכנון לינארי

מהדורה אינטרנטית מעודכנת 2016



חובר על-ידי:

יוני עמיר

נורית הדס

ייעוץ:

אברהם הרכבי

מקסים ברוקהיימר

מיכאל קורן

עריכה לשונית:

נגה ואן דורמולן - אברהמי

הדפסה ועריכה במחשב:

אבי טל

שרטוטים ועיצוב גרפי:

דיו אריאלי

תוכן העניינים

7	נגיעה קלה בכלכלה
9	בין מקבילים
17	"הפרד ומשול" במישור
21	שרטוט ישרים (חזרה)
23	עוד על הפרדה במישור
29	"טובים השניים מן האחד"
37	קוד לחישוב קדקוד
40	התחום האפשרי
44	"אל המטרה"
48	"אל הקודקוד"
53	"לסיכום שאלות - "ואילוצים חלוצים
56	לסיכום שאלות עוד? יותר ירוויח מי
59	ארגון נתונים בתכנון לינארי
66	"הכל פתוח"
69	ומה אם מתעניינים רק בנקודות שלמות?
71	בעיות שלמות
76	מבחר פתרונות

שאלות לדוגמא תכנון לינארי מתוך אשכול כלכלי פיננסי תכ"ל חדשה במתמטיקה 78

שאלות נוספות לתרגול מתוך מבחני בגרות 87

שאלות מתוך מבחנים לדוגמא 106

ביאור סמלים

תרגיל "מפתח"



עבודה עצמית



מחשבון



תרגיל אתגר



סיכום

הכנה





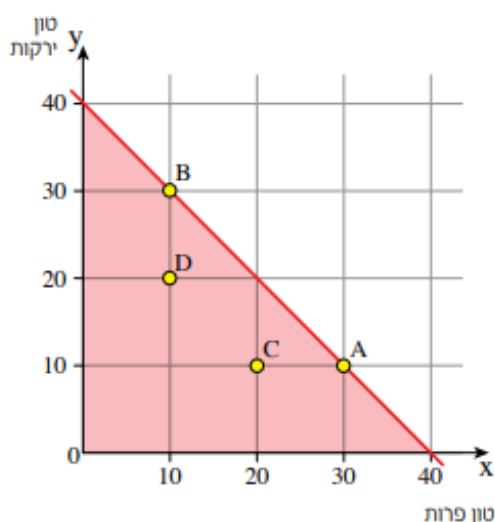
נגיעה קלה בכלכלה



1. מטוסי תובלה מובילים ירקות ופירות. מנהל חברת "שחף" נתן למנהל הייצור דף ובו הגרף הבא. השטח הצבוע מתאר את כל המשלוחים האפשריים. עזור לו לפענח את הגרף.

א. כמה טון פירות וכמה טון ירקות יש לשלוח, אם המשלוח הוא:

- לפי הנקודה A?
- לפי הנקודה B?
- לפי הנקודה C?
- לפי הנקודה D?



ב. סמנו נקודות המתארות הובלה של: 30 טון פירות ו- 5 טון ירקות, 20 טון פירות ו- 20 טון ירקות, 20 טון פירות, ללא ירקות.

ג. האם אפשר לשלוח 30 טון פירות ו- 20 טון ירקות? נמקו.

ד. היכן נמצאות כל הנקודות, המתארות משלוח של ירקות בלבד?

ה. היכן נמצאות נקודות, המתארות משלוח של פירות בלבד?

ו. אם המשלוח הוא על-פי נקודה C, האם לדעתכם יש עוד מקום בטיסה?

ז. רשמו שיעורים של שלוש נקודות, המתארות מטוס מלא.

ח. היכן בתחום המשורטט ימצאו המשלוחים הנ"ל? נמקו!

ט. האם ניתן לשלוח 50 טון של פירות וירקות ביחד?

← המשך

י. ידוע שהרווח ממשלוח טון אחד של פירות הוא 700 ש"ח ומטון אחד של ירקות 500 ש"ח.

יא. מה יהיה הרווח:

- לפי הנקודה A?
- לפי הנקודה B?
- לפי הנקודה C?
- לפי הנקודה D?

יב. באיזה מקרה מהמקרים שחישבתם, הרווח של החברה יהיה הגדול ביותר?

יג. סמנו במערכת הצירים נקודה, המייצגת רווח גדול יותר מאלה שמצאות עד כה.

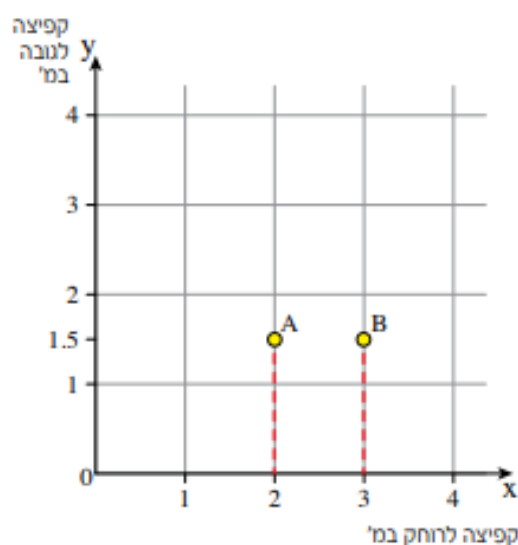
בהמשך הפרק תלמדו לפתור בעיות מן הסוג הזה, ותחפשו בשאלות מורכבות את הרווח הגדול ביותר.

יד. נסו למצוא בגרף נקודה המייצגת את הרווח הגדול ביותר.

בין מקבילים



1. ביום ספורט נרשמו תוצאות של תחרויות בקפיצה לרוחק ולגובה.
המורה לספורט תיאר את התוצאות באמצעות **נקודות**, במערכת צירים.
אחת הטיטות שלו התגלגלה לידי התלמידים.
ההישגים של דן מיוצגים על-ידי הנקודה A ושל שירה על ידי B.

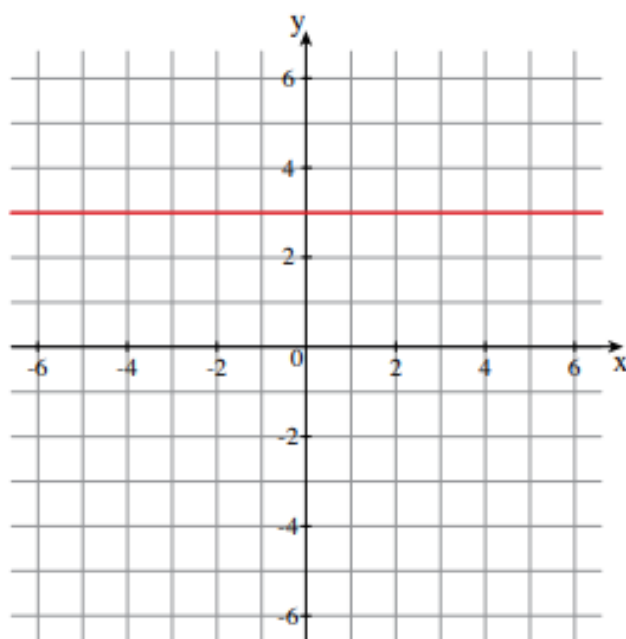


- א. מה ההישגים של דן ושירה בכל אחת מהקפיצות?
- ב. רשמו וסמנו נקודות נוספות, המתאימות לתלמידים שקפצו **לגובה** כמו דן ושירה.
- ג. מהי **משוואת הישר**, העובר דרך הנקודות A, B?
- ד. אילו תוצאות מיוצגות על-ידי הנקודות על הישר AB?



2. א. רשמו את משוואת הישר המשוורט.

- ב. סמנו ורשמו שיעורים של ארבע נקודות, ששיעור y שלהן גדול מ-3.
- ג. צבעו את כל האזור המתאים לנקודות, ששיעור y שלהן **גדול** מ-3.

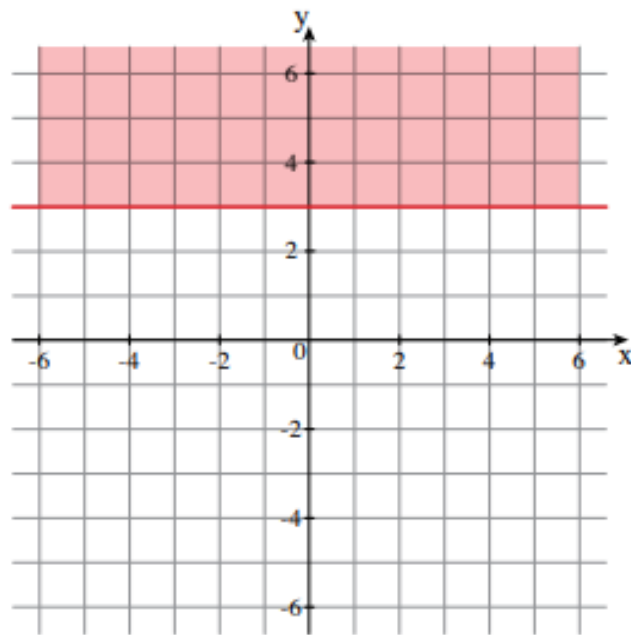


אי השוויון המתאים לאזור הצבוע, כולל הישר, הוא $y \geq 3$.



3. א. מהי משוואת הישר בגבול האזור הצבוע?

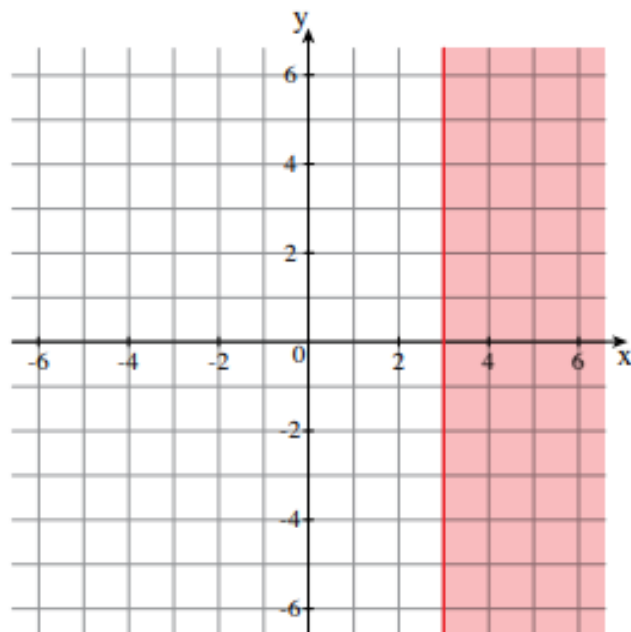
ב. נסו לאפיין בעזרת אי שוויון מתאים את האזור הצבוע.



כשמדובר ב"אזור צבוע", הכוונה לאזור כולל הישר שבגבולו, ולכן סימני האי-שוויון המתאימים הם $\leq$ או $\geq$.

4. א. מהי משוואת הישר בגבול האזור הצבוע?

ב. רשמו אי שוויון מתאים לאזור הצבוע.



מבדק זיהוי ישרים ואי-שוויונות, צביעת אזור המתאים לאי-שוויון מבוקש - הילקוט הדיגיטלי

5. א. סמנו במערכת צירים נקודות, ששיעור x שלהן 5, ורשמו את משוואת הישר העובר דרכן.

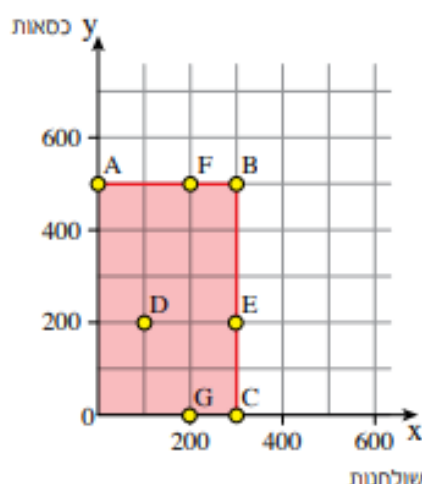
ב. צבעו את האזור בו נמצאות כל הנקודות, ששיעור x שלהן קטן מ-5. רשמו אי-שוויון מתאים לאזור הצבוע.

6. יצרן מייצר שולחנות וכיסאות. אפשרויות הייצור השבועי מתוארות בשרטוט.



א. כמה שולחנות וכמה כיסאות מייצרים, אם הייצור השבועי הוא:

- לפי הנקודה A?
- לפי הנקודה B?
- לפי הנקודה C?
- לפי הנקודה D?
- לפי הנקודה E?



ב. סמנו נקודה המתארת ייצור של 100 שולחנות בלבד.

ג. היכן נמצאות הנקודות, המתארות ייצור של שולחנות בלבד?

ד. היכן נמצאות הנקודות, המתארות ייצור של כיסאות בלבד?

ה. ידוע שהרווח ממכירת שולחן 50 ש"ח, וממכירת כיסא 30 ש"ח.

מהו הרווח ממכירה של: 200 שולחנות ו-300 כיסאות?

150 שולחנות ו-100 כיסאות?

300 שולחנות בלבד?

200 כיסאות בלבד?

ו. האם ניתן לייצר רק כיסאות ולהרוויח לפחות 17,000 ש"ח? נמקו?

ז. כמה שולחנות וכמה כיסאות אפשר לייצר, לפי המגבלות, ולקבל רווח מקסימלי?

ח. מהי משוואת הישר AB?

ט. רשמו אי-שוויון מתאים לנקודות מתחת לישר AB.

י. רשמו אי-שוויון מתאים לנקודות משמאל לישר BC.

יא. נסו להסביר מה מתאר האזור הצבוע.

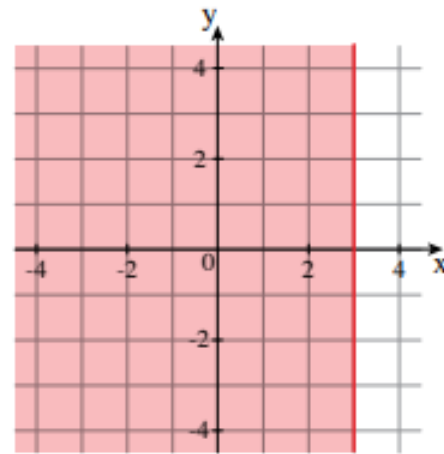
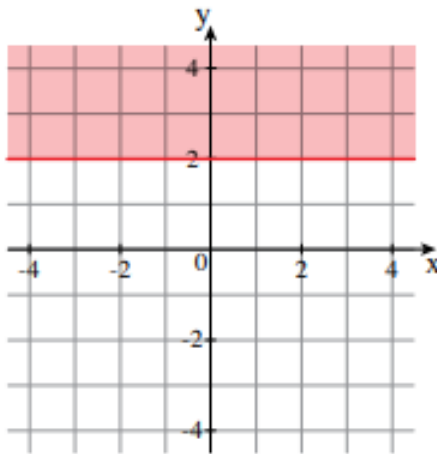


7. א. שרטטו ישר מתאים לנקודות, ששיעור x שלהן שווה ל-2.
ב. צבעו את האזור בו נמצאות כל הנקודות, ששיעור x שלהן גדול מ-2.
ג. רשמו אי-שוויון מתאים.

בסעיף זה למדתם לתאר אי שוויונות בצורות שונות,

דוגמה

לאוסף הנקודות, ששיעור y שלהן גדול או שווה ל-2, מתאים האי-שוויון $y \geq 2$ והגרף:
לאוסף הנקודות, ששיעור x שלהן קטן או שווה ל-3, מתאים האי-שוויון $x \leq 3$ והגרף:



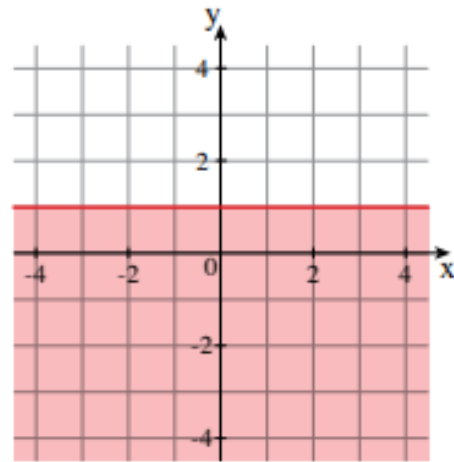
כמו כן ראיתם, שכדי לשרטט גרף של אי-שוויון, שהישר בגבולו מקביל לאחד הצירים, יש לשרטט תחילה את הישר.

תרגילים

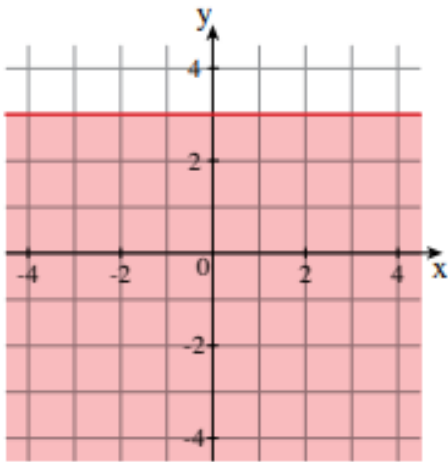
8. רשמו את משוואת הישר המודגש.

רשמו את האי-השוויון המתאים לאזור הצבוע.

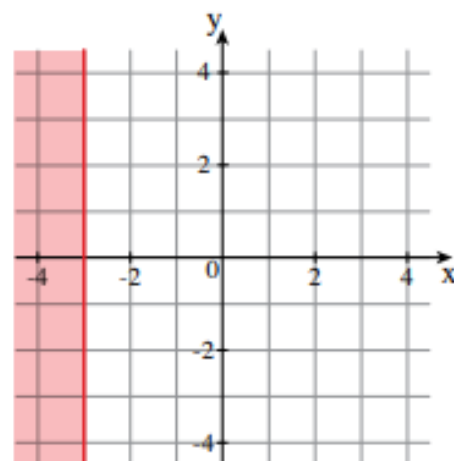
א.



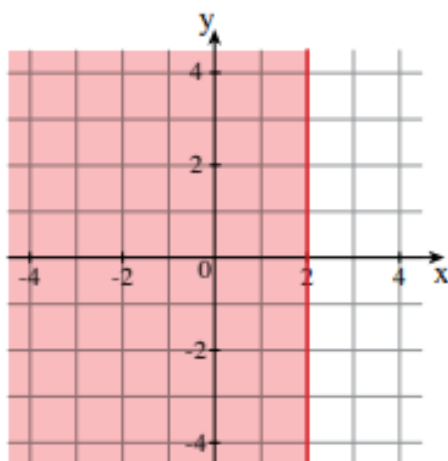
ב.



ג.

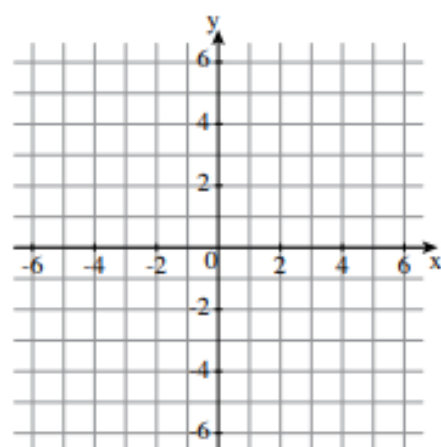
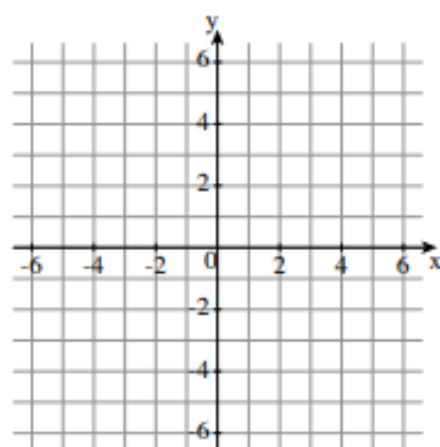


ד.



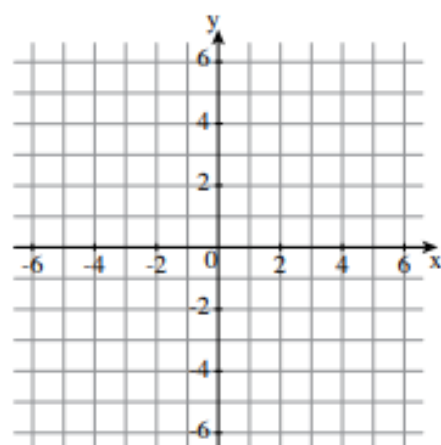
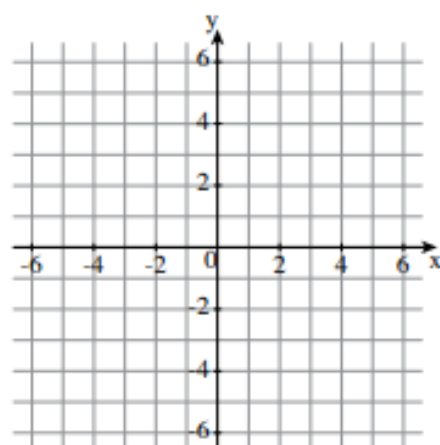
9. שרטטו גרפים מתאימים.
א. $x \geq 5$

ב. כל הנקודות ששיעור x גדול או שווה ל-1, $(x \geq -1)$



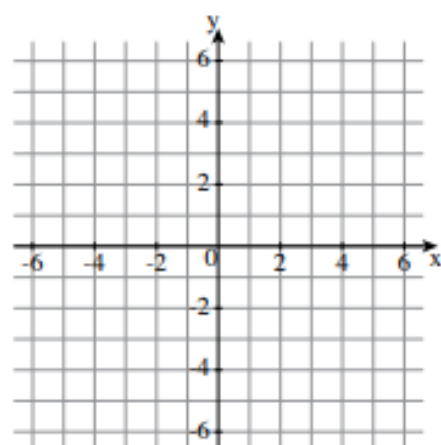
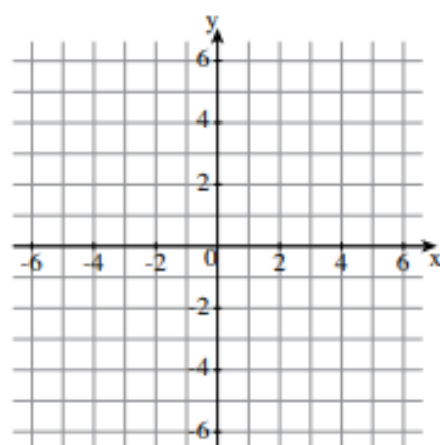
ד. $x \leq 0$

ג. כל הנקודות, ששיעור y שלהן גדול או שווה ל-5.



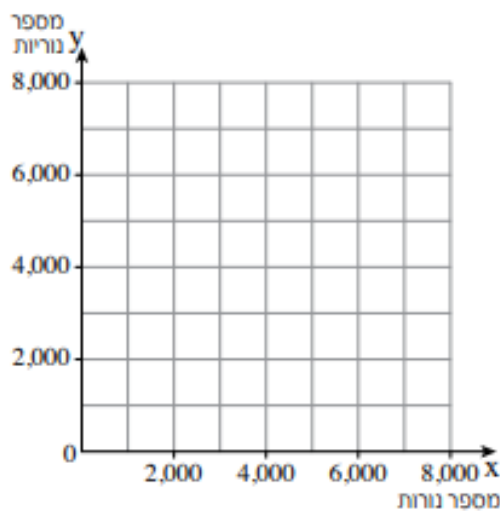
ו. כל הנקודות ששיעור y שלהן גדול או שווה ל-1

ה. $y \leq 0$



10. במפעל מייצרים נורות ונוריות.

א. סמנו נקודות, המתאימות לייצור של 5000 נורות. העבירו את הישר המתאים ורשמו את משוואתו.



- צבעו אזור מתאים לייצור של לא יותר מ-5000 נורות.
- רשמו אי-שוויון מתאים לאזור הצבוע.
- ב. סמנו נקודות המתאימות לייצור של 7000 נוריות, העבירו את הישר המתאים ורשמו את משוואתו.
- צבעו אזור מתאים לייצור של לא יותר מ-7000 נורות.
- רשמו אי-שוויון מתאים לאזור הצבוע.
- ג. מגבלות הייצור מתוארות בתחום הצבוע פעמיים. רשמו אותן.
- ד. היכן נמצאות הנקודות המתארות ייצור של נוריות בלבד?
- ה. ידוע שהמפעל מרוויח 0.30 ש"ח מנורה ו-0.20 ש"ח מנורית.
מה יהיה רווח המפעל:
- ממכירה של 2000 נורות ו-1000 נוריות?
- ממכירה של 5000 נורות ללא נוריות?
- ממכירה של 7000 נורות ללא נוריות?
- ו. כמה נורות ונוריות אפשר לייצר, כדי להגיע לרווח מקסימלי?



11. מנהל חברת "שחף" עסוק מאוד. מחוסר זמן נתן למנהל הייצור שלו את הדף הבא, כדי שישרטט גרף.

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

x - משקל פרחים בטונות

y - משקל פירות בטונות

א. שרטטו גרף של שני האי-השוויונות, באותה מערכת צירים, ברביע הראשון.
(שרטטו תחילה את הישרים).

ב. מה מייצגות הנקודות $A(2, 4)$, $B(5, 3)$?

ג. סמנו במערכת הצירים נקודות המתארות משלוח של:

3 טון פרחים ו-2 טון פירות.

5 טון פרחים ו-2 טון פירות.

2 טון פרחים ו-3 טון פירות.

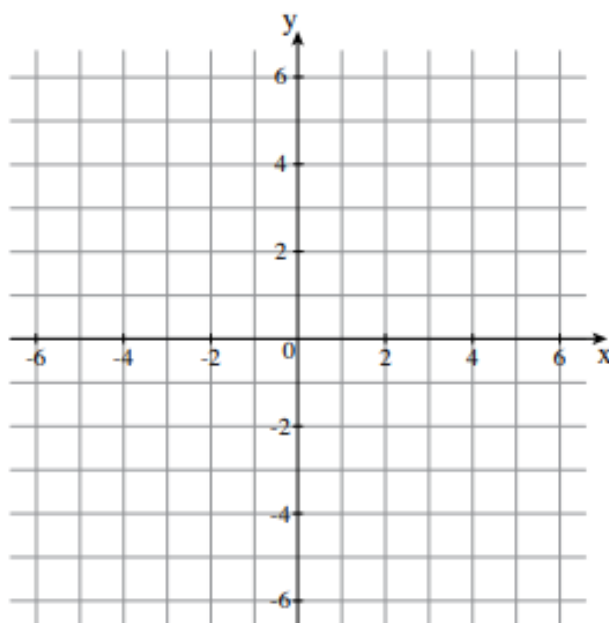
ד. השטח הצבוע בגרף ששרטטתם מתאר את אפשרויות הייצור השונות.
רשמו 3 דוגמאות למשלוחים אפשריים.

"הפרד ומשול" במישור



עד כה שרטטתם גרף של אי-שוויון, כשהישר המתאים מקביל לאחד הצירים. עתה תלמדו לשרטט גרפים של אי שוויונות נוספים. לשם כך נחזור על שרטוט ישרים.

1. א. שרטטו במערכת הצירים את הישר שמשוואתו $y = x + 2$.

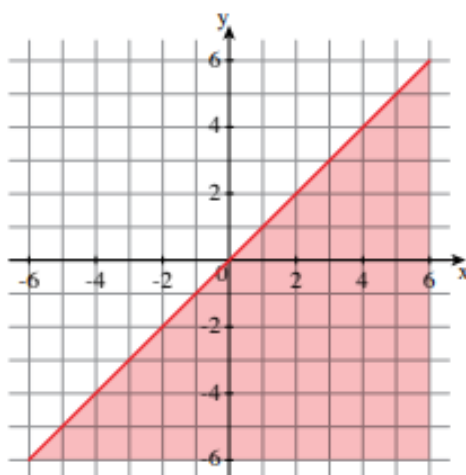
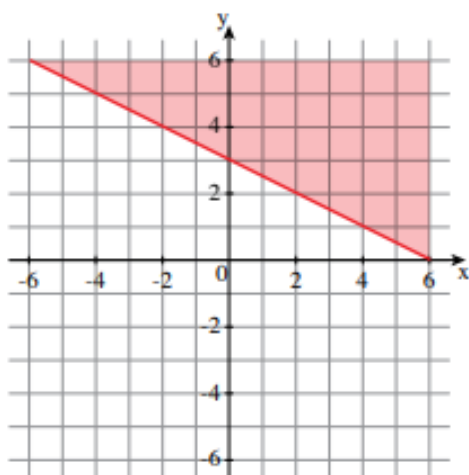


- ב. היכן, לדעתכם, יימצאו הנקודות המקיימות $y \geq x + 2$?
- צבעו אזור מתאים.
- סמנו שלוש נקודות באזור הזה, רשמו את שיעוריהן.
- הציבו ובדקו אם שיעוריהן מקיימים את האי-שוויון הנ"ל.
- סמנו שתי נקודות באזור שאינו צבוע, ובדקו אם שיעורי הנקודות אינם מקיימים את האי-שוויון.



2. - רשמו את משוואת הישר המודגש.
 - רשמו אי-שוויון המתאים לאזור הצבוע.
 א.

ב.



3. שרטטו את הישר שמשוואתו $y = \frac{1}{2}x + 3$



א. צבעו את חלק המישור, המתאר את האי-שוויון $y \geq \frac{1}{2}x + 3$.

ב. בחרו 2 נקודות באזור הצבוע, ובדקו על ידי הצבה אם הן מקיימות את האי-שוויון.

ג. רשמו אי-שוויון, המתאים לאזור שאינו צבוע.

ראינו שהישר מפריד בין שני "חצאי מישור", שלכל אחד מהם מתאים אי-שוויון מהצורה

$y \geq \square$ או $y \leq \square$ (האזורים כוללים את הישר המפריד).

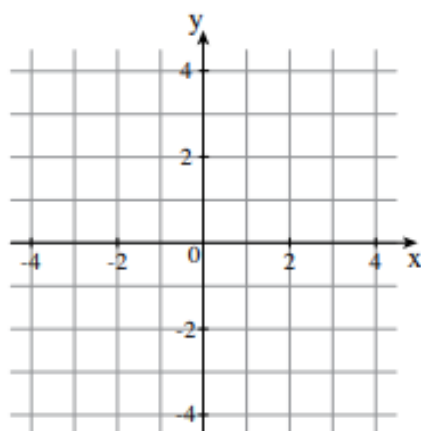
פעילות בדסמוס- התאמה בין גרף לאי-שוויון



סרטון - גרפים של אי-שוויונים עם שתי משתנים - KhanAcademyHebrew

תרגילים

4. א. שרטטו את הישר שמשוואתו $y = -3x + 2$.
צבעו את האזור, המתאים לאי-שוויון $y \leq -3x + 2$.

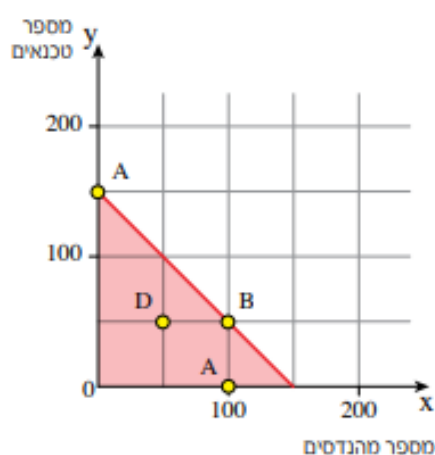


- ב. שרטטו את הישר שמשוואתו $y = 2x - 1$.
צבעו את האזור המתאים לאי-שוויון $y \geq 2x - 1$.

5. שרטטו במערכת צירים נפרדת גרף מתאים לכל אי שוויון (שרטטו תחילה את הישר שבגבול האזור).

א. $y \geq -\frac{1}{2}x + 1$ ב. $y \leq \frac{1}{2}x + 3$ ג. $x \leq 5$

6. מקימים מפעל, שבו יעבדו מהנדסים וטכנאים.
האפשרויות השונות מתוארות בשרטוט.



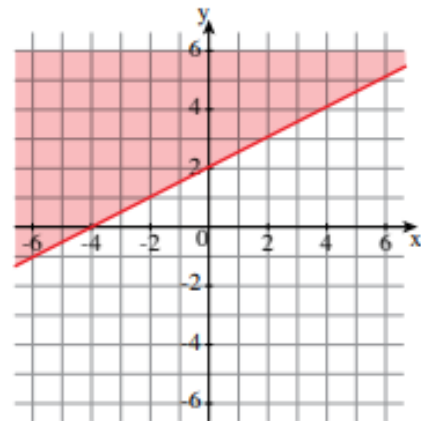
- א. כמה מהנדסים, לכל היותר, יוכלו לעבוד במפעל זה?
ב. רשמו את משוואת הישר AB.
ג. רשמו אי שוויונות מתאימים לבעיה.
ד. מה מייצגת כל אחת מהנקודות A, B, C ו-D?
ה. אילו מהנקודות הנ"ל אינן מאפשרות תוספת עובדים?
ו. מהו המספר הגדול ביותר של עובדים שאפשר להעסיק?
ז. האם הנקודה (52.5, 70) נמצאת בתחום הצבוע?

- ח. האם כל הנקודות בתחום הצבוע אכן מתאימות לאפשרויות ההעסקה? נמקו!

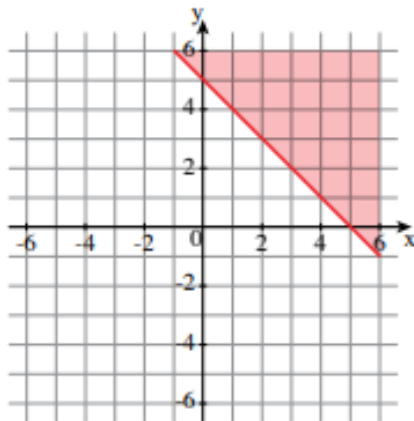
7. - רשמו את משוואת הישר המודגש.

- רשמו אי שוויון, המתאים לאיזור הצבוע.

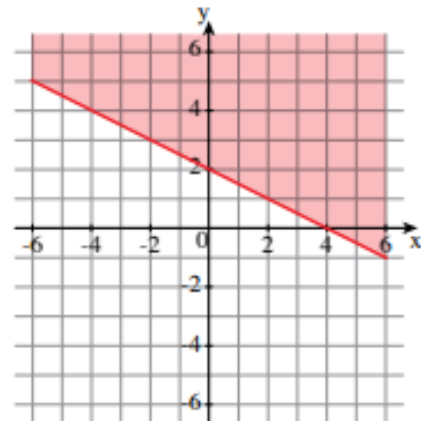
א.



ב.



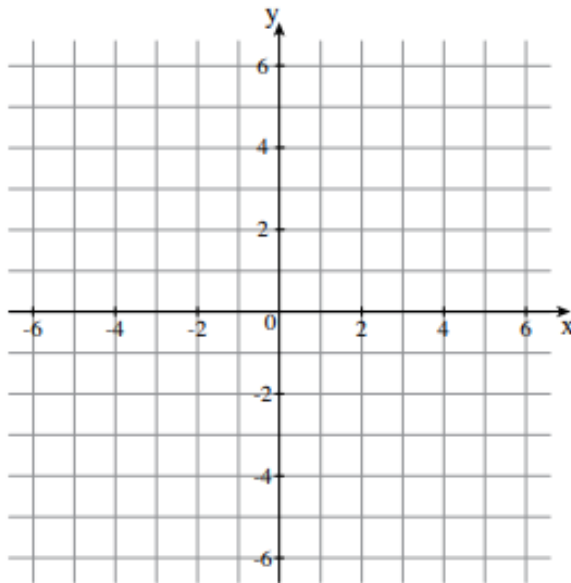
ג.



שרטוט ישרים (חזרה)

כדי לשרטט גרפים של אי שוויונות, שאינם רשומים בצורה $y \geq$ או $y \leq$, נחזור על שרטוט ישרים לפי נקודות.

1. כדי לשרטט ישר שמשוואתו $2x - 3y = 6$, אפשר לבחור שתי נקודות (ושלישית לביקורת) הנמצאות על הישר, לסמן ולהעביר את הישר. השלימו את הטבלה ושרטטו.



x	0		-3
y		0	

2. שרטטו את הישרים שמשוואותיהם נתונות (אפשר באותה מערכת צירים).

$$\frac{x-y}{2} = 3$$

$$x - 2y = 1$$

$$2x - y = 5$$

x	-1	0	-3
y			

x	0		-1
y		0	

x	0		-3
y		0	

כפי שראיתם, נוח לבחור נקודות על הצירים.

תרגילים



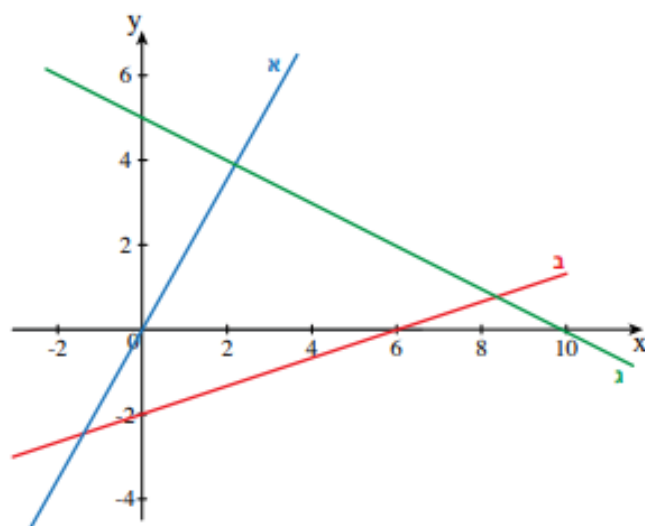
3. שרטטו את הישרים.

א. $y - 3x = 5$ ג. $\frac{y-x}{2} = 0$

ב. $2y + x = 10$ ד. $2x - 3y = 6$

4. התאימו לכל ישר את משוואתו.

(1) $x + 2y = 10$ (2) $x - 3y = 6$ (3) $2x - y = 0$



עוד על הפרדה במישור



1. נתון ישר שמשוואתו $x - 3y = 6$. הציבו את שיעורי

הנקודה $(5, -1)$ בביטוי $x - 3y$.

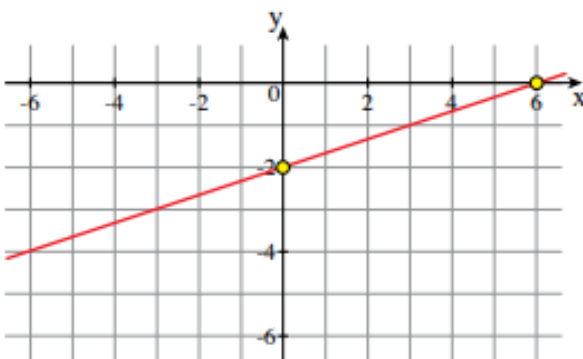
אם היא מקיימת $x - 3y > 6$,

סמנו אותה במערכת הצירים בצבע

כלשהו.

אם היא מקיימת $x - 3y < 6$, סמנו

אותה בצבע אחר.



חזרו על הפעולה לגבי כל אחת מהנקודות הבאות.

$(0, 0)$ $(5, 1)$ $(6, 1)$

$(-2, -1)$ $(\frac{1}{2}, -2)$ $(3, 2)$

$(0, -4)$ $(3, -2)$ $(-5, -4)$

אם לא טעיתם, קיבלתם, כפי שראינו בסעיף הקודם, שהישר מפריד בין שתי הקבוצות של

הנקודות:

אלה שמתאימות לאי-שוויון $x - 3y > 6$

ואלה שמתאימות לאי-שוויון $x - 3y < 6$

לכן מספיק לבחור נקודה אחת, ולבדוק בעזרתה איזה אזור מתאים לכל אי שוויון.

כשנתון האי שוויון $2x - 3y \geq 6$, לא נוח לעבור לצורה $y \geq$ או $y \leq$, לכן נשרטט את הישר המפריד על פי נקודות, ואחר כך נקבע את האזור המתאים על ידי בדיקת נקודה.



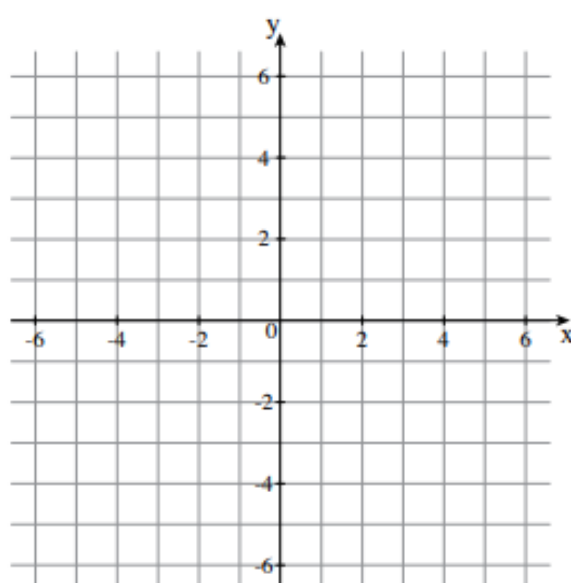
2. א. שרטטו תחילה את הישר $2x - 3y = 6$.

x			
y			

ב. שערו איזהו האזור המתאים לאי שוויון

$$2x - 3y \geq 6$$

בחרו נקודה באזור זה, הציבו שיעוריה, ובדקו אם היא מקיימת האי שוויון $2x - 3y \geq 6$. אם כן, צבעו את האזור. אם לא, צבעו את ה"אזור השני".

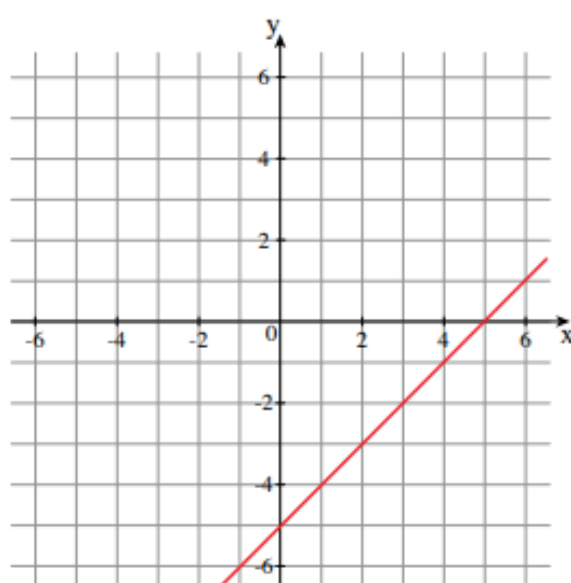


3. נתון ישר שמשוואתו $x - y = 5$ (ראו שרטוט).

א. סמנו נקודה כלשהי **מעל** הישר ורשמו את שיעוריה.

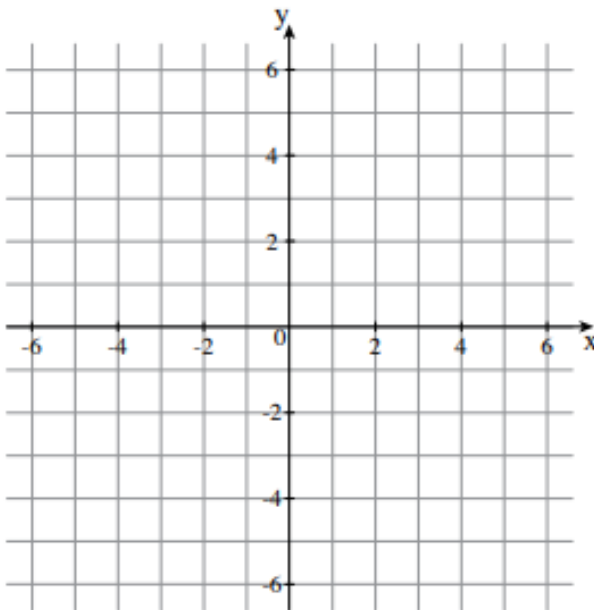
ב. הציבו ובדקו איזה אי שוויון מתאים לאזור שמעל הישר.

ג. הנקודות $(5, 0)$, $(3, 0)$ נמצאות באזור הצבוע. הציבו ובדקו אם שיעוריהן מקיימים את האי שוויון שרשמם.





4. א. שרטטו תחילה את הישר $2x - 3y = 6$ במערכת הצירים.



x			
y			

בחרו נקודה באחד משני האזורים, ובדקו אם היא מקיימת את האי שוויון $2x - 3y \geq 6$.

צבעו את האזור המתאים לאי שוויון

$$2x - y \geq 6$$

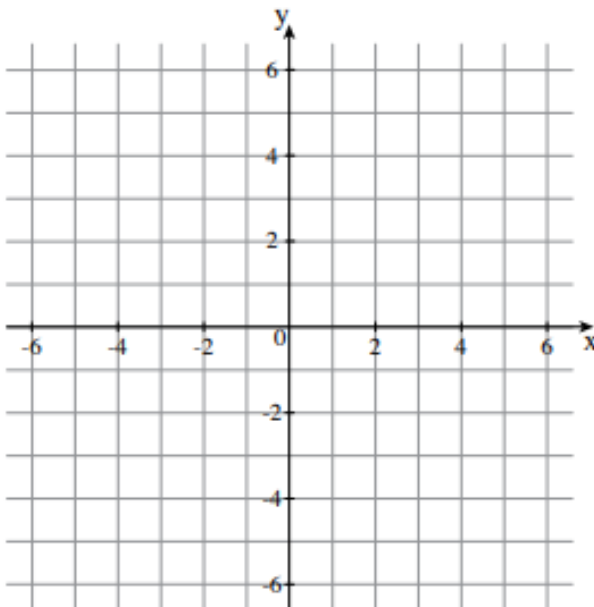
ביקורת: בחרו נקודה נוספת באזור הצבוע, ובדקו אם שיעוריה מקיימים את האי שוויון.

ב. שרטטו את הישר שמשוואתו $x - 2y = 6$.

בחרו נקודה מעל או מתחת לישר,

והשלימו שרטוט גרף מתאים לאי

$$x - 2y \leq 6$$





5. רשמו את משוואת הישר "המפריד" בין האי שוויונות.

$$y - x \geq 3 \qquad y - x \leq 3$$



6. רשמו לכל אי שוויון את משוואת הישר "המפריד".

$$\text{א. } 2y - x \geq 5 \qquad \text{ב. } 2y - x \leq 5$$



7. שרטטו גרפים מתאימים לאי שוויונות הבאים.
(שרטטו תחילה את הישר המפריד, בחרו נקודה באחד האזורים, בדקו איזה אי שוויון היא מקיימת, ואחר כך צבעו את האזור המתאים לאי שוויון הנתון).

$$\text{א. } x + 2y \geq 2 \qquad \text{ג. } y \geq -1$$

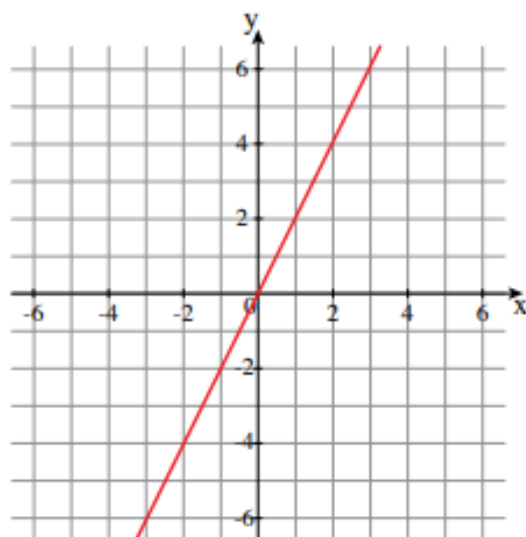
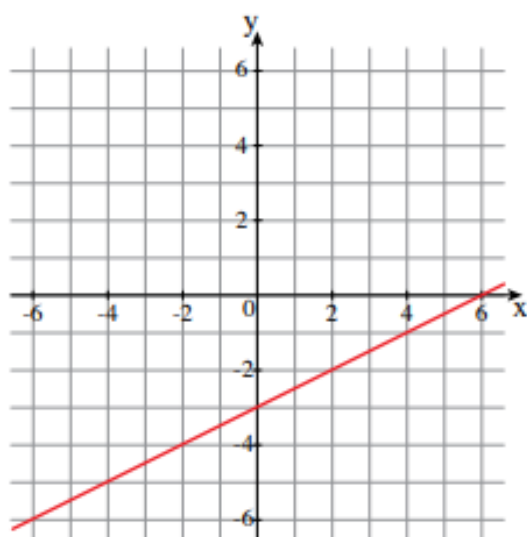
$$\text{ב. } 2x - y \leq 0 \qquad \text{ד. } 2x - 5y \leq 10$$

תרגילים

8. סמנו נקודה באחד משני האזורים, רשמו את שיעוריה, ובדקו אם היא מקיימת את האי שוויון. אחר כך צבעו את האזור המתאים לאי שוויון.

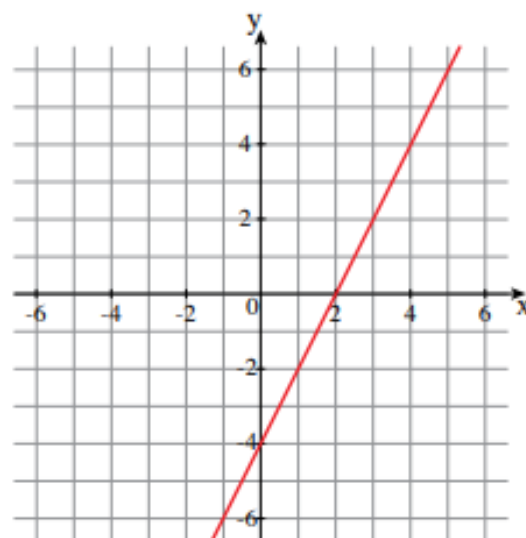
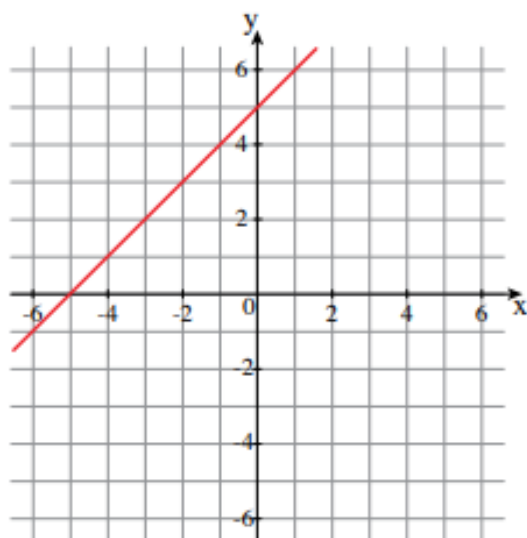
ג. $x - 2y \leq 6$

א. $y \geq 2x$



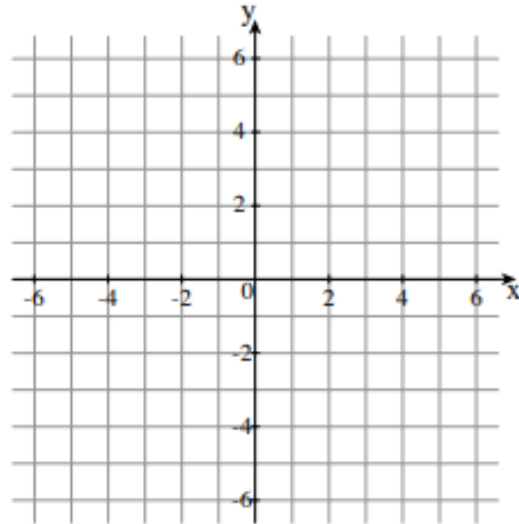
ד. $y - x \leq 5$

ב. $2x - y \leq 4$

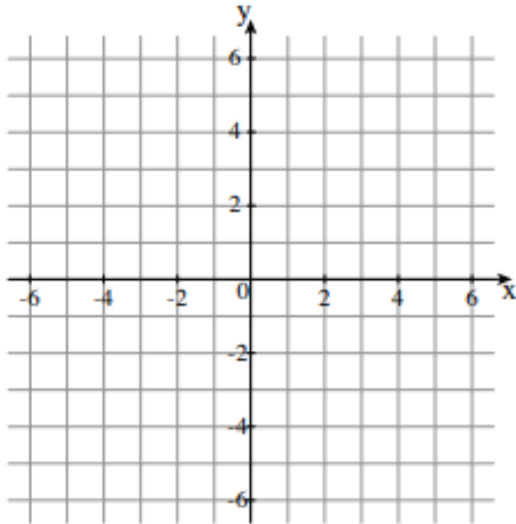


9. שרטטו את הישר המפריד, וצבעו את האזור המתאים לאי שוויון.

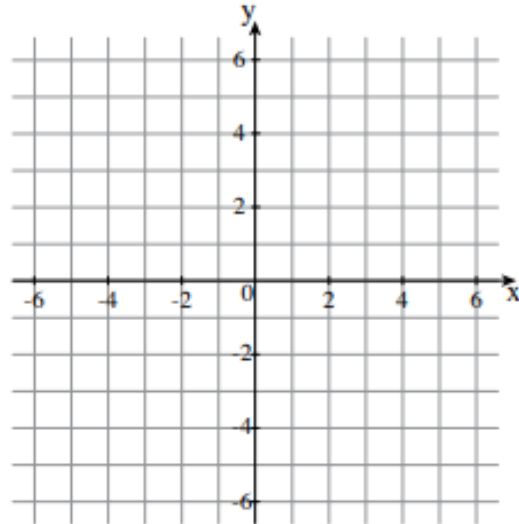
א. $x + y \leq 5$



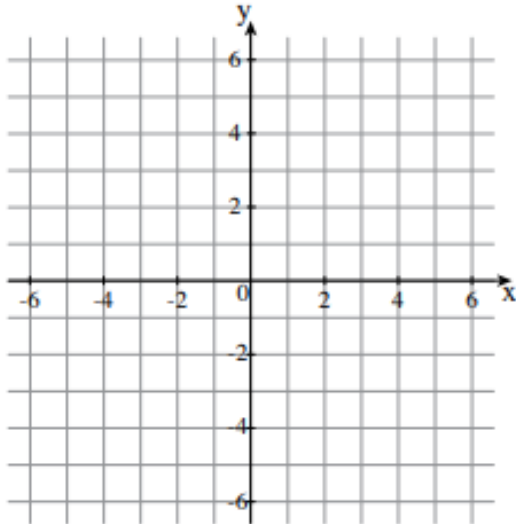
ב. $x + 2y \geq -6$



א. $2x + 3y \geq 12$

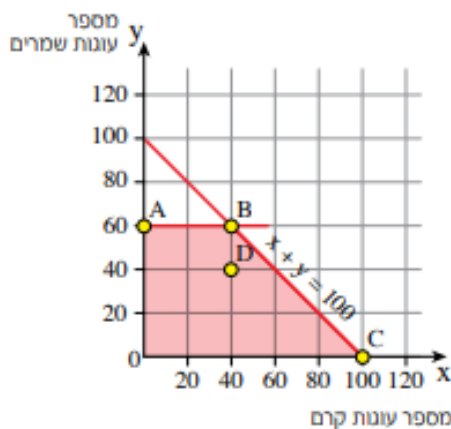


ב. $y \leq \frac{1}{2}x + 3$



"טובים השניים מן האחד"

1. קונדיטוריה מייצרת עוגות שמרים ועוגות קרם, בסך-הכל לא יותר מ- 100 עוגות ביום. מספר עוגות השמרים אינו עולה על 60 (ראה שרטוט).
- א. רשמו מה מתארת כל אחת מהנקודות A, B ו-C.
- ב. רשמו אי שוויונות מתאימים לבעיה.
- ג. ידוע שהרווח מעוגת קרם הוא 10 ש"ח, והרווח מעוגת שמרים 5 ש"ח. מהו הרווח על פי הנקודות A, B ו-C? היכן, לדעתכם, יהיה הרווח גדול יותר, בנקודה B או D?



בפרק הקודם ראינו כיצד לתאר גרף של אי שוויון בודד. בסעיף זה תלמדו לשרטט גרף משותף לשני אי שוויונות.

2. א. שרטטו את הישר שמשוואתו $y = 2x + 5$.
- ב. צבעו את האזור המתאים לאי שוויון $y \leq 2x + 5$.
- ג. שרטטו באותה מערכת צירים גרף מתאים לאי שוויון $y \leq -x + 5$ (שרטטו תחילה את הישר המפריד).
- ד. רשמו שיעורי נקודה, הנמצאת באזור המשותף לשני האי שוויונות.
- ה. הדגישו את האזור המשותף.
3. א. שרטטו את הגרף של האי שוויון $y \leq 2x + 4$ (זכרו לשרטט תחילה את הישר המפריד).
- ב. שרטטו באופן דומה, באותה מערכת צירים, גרף של האי שוויון $y \leq x + 1$.
- ג. הדגישו את האזור המשותף.
- ד. מצאו נקודה באזור המשותף. רשמו את שיעוריה, ובדקו אם היא מקיימת את שני האי שוויונות.



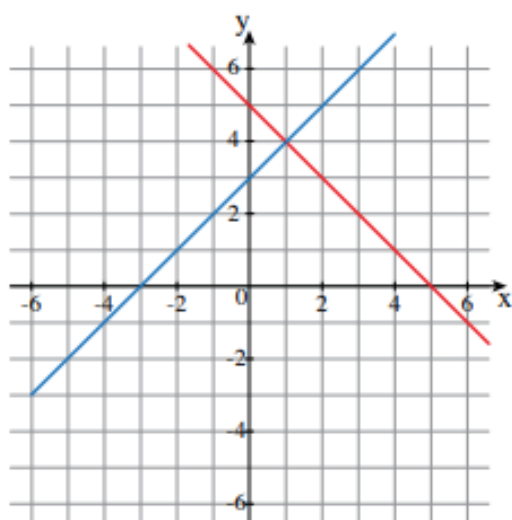
4. במערכת הצירים משורטטים הישרים $y = x + 3$ $y = -x + 5$

א. התאימו כל ישר למשוואתו.

ב. צבעו את הגרפים המתאימים לאי שוויונות

$$y \leq x + 3 \quad y \geq -x + 5$$

ג. הדגישו את האזור המשותף.



5. א. התאימו כל ישר למשוואתו.

$$y = x + 2 \quad (I)$$

$$2x + y = 5 \quad (II)$$

ב. רשמו אי שוויון מתאים לשטח הצבוע

ש"מתחת ל-I.

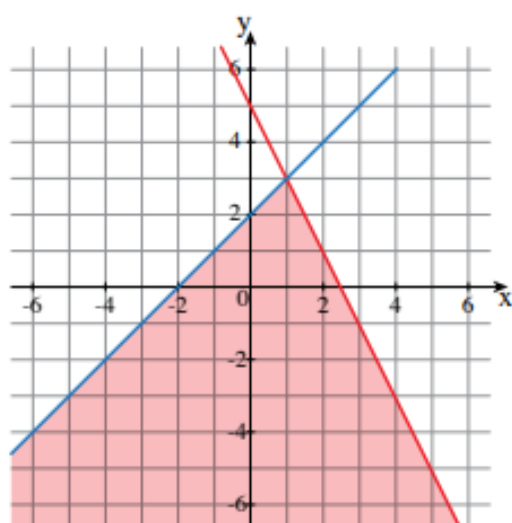
רשמו אי שוויון מתאים לאזור הצבוע

ש"מתחת ל-II.

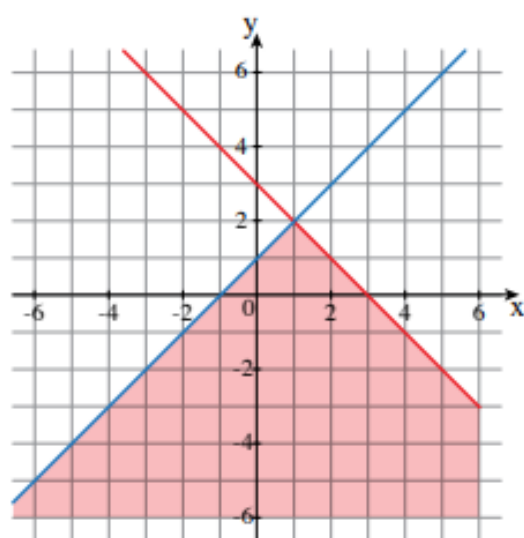
ג. מצאו 3 נקודות באזור המשותף, הציבו

ובדקו אם שיעוריהן מקיימים את שני האי

שוויונות שרשמת.



כדי לשרטט גרף של מערכת אי שוויונות, יש לשרטט תחילה את הגרף של כל אי שוויון בנפרד. האזור המשותף של גרפים אלה הוא **גרף המערכת**.



לדוגמה: השטח הצבוע בשרטוט שלפניך, מכיל את כל הנקודות ש"מתחת" לשני הישרים $y = x + 1$, $y = -x + 3$, ולכן מהווה **פתרון למערכת האי שוויונות**:

$$\begin{cases} y \leq x + 1 \\ y \leq -x + 3 \end{cases}$$

6. א. סמנו במערכת הצירים את הנקודות:

$A(-1, 3)$ $B(2, 5)$ $C(0, 6)$

שרטטו ישר, כך ש- 3 הנקודות יהיו **מעליו**, ורשמו את משוואתו.

שרטטו ישר נוסף, כך ש- 3 הנקודות יהיו מתחתיו, ורשמו את משוואתו.

ב. צבעו אזור, הכלוא בין הישרים, באופן שיכיל את כל הנקודות הללו.

ג. רשמו מערכת אי שוויונות, המתאימה לשטח הצבוע שנוצר.





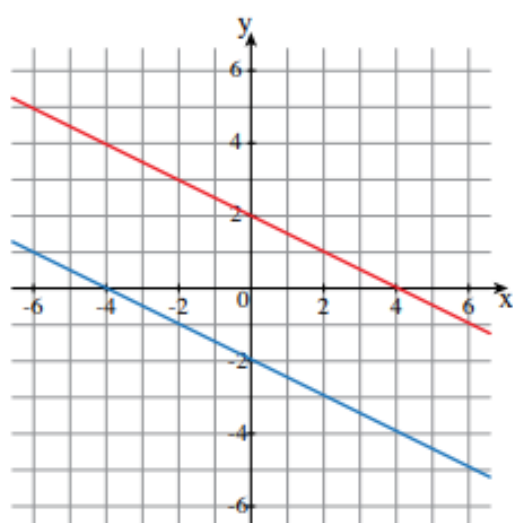
7. א. התאימו כל ישר למשוואה.

$$y = -\frac{1}{2}x + 2 \quad (I)$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 2 \quad (II)$$

ב. שרטטו גרף המתאים למערכת האי שוויונות.

$$\begin{cases} y \leq -\frac{1}{2}x + 2 \\ y \geq -\frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$$

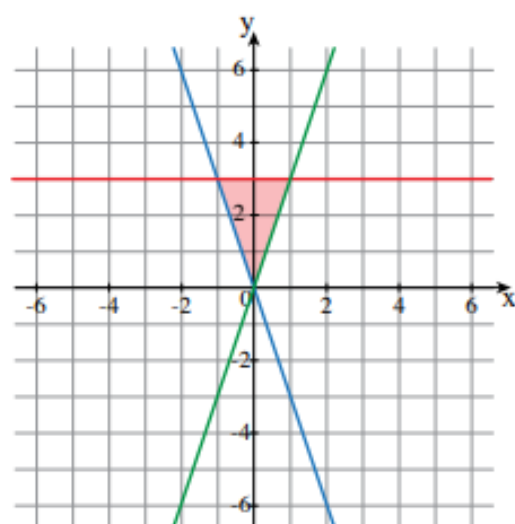


8. א. רשמו את משוואות הישרים שבשרטטו.

ב. רשמו מערכת אי שוויונות, שפתרונה הוא השטח הצבוע שבשרטטו.

ג. רשמו את שיעורי הקדקודים של המשולש שהתקבל.

ד. רשמו שיעוריהן של 2 נקודות בתוך המשולש.



9. א. שרטטו את הישרים הבאים:

$$y = x + 3$$

$$y = -2x + 3$$

$$y = 1$$

ב. צבעו את האזור המשותף לאי שוויונות:

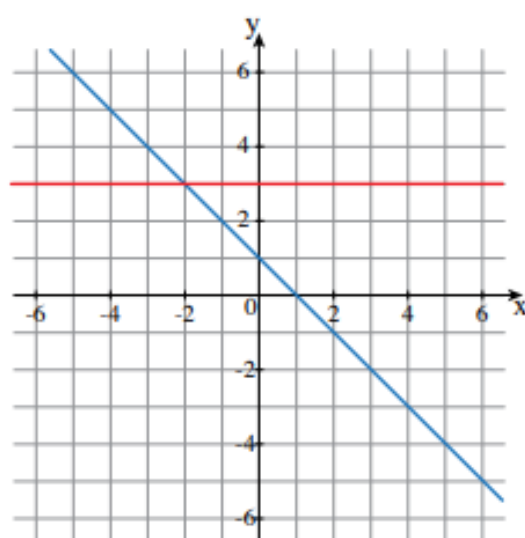
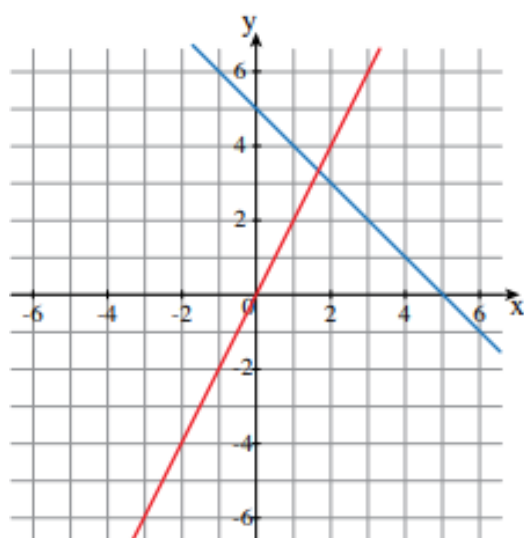
$$\begin{cases} y \leq x + 3 \\ y \leq -2x + 3 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

תרגילים

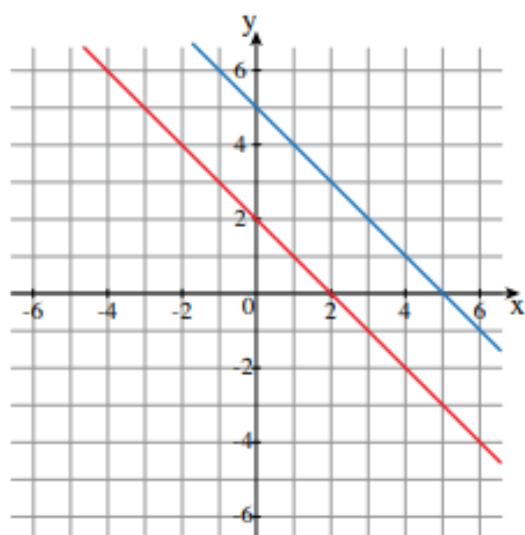
10. צבעו במערכת הצירים את האזורים המתאימים, כך שיתארו את מערכות האי שוויונות.

$$\begin{cases} y \geq 2x \\ y \leq -x + 5 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} y \leq 3 \\ y \leq -x + 1 \end{cases} \quad \text{א.}$$



$$\begin{cases} y \leq -x + 5 \\ y \geq -x + 2 \end{cases} \quad \text{ג.}$$



11. שרטטו גרפים מתאימים, והדגישו את האזור המשותף (אם קיים אזור כזה).

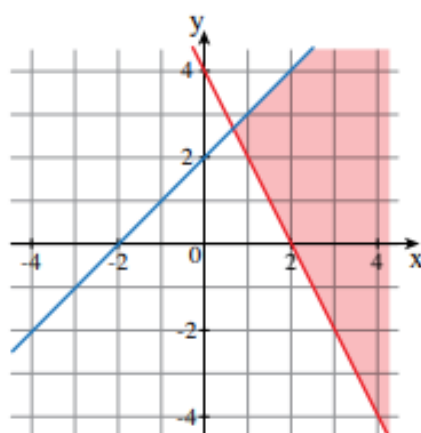
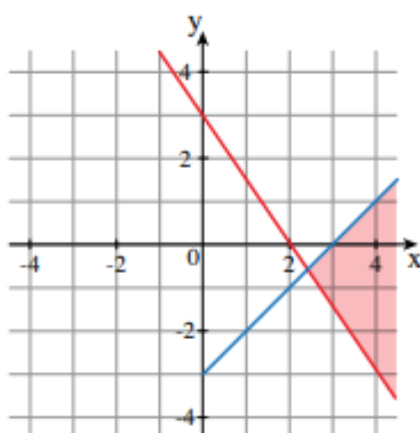
$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} \geq 0 \\ y \leq x+5 \end{cases} \quad \text{א.} \quad \begin{cases} x+2y \leq 10 \\ y \geq x-5 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} 3x+y \geq 5 \\ y \leq -3x \end{cases} \quad \text{ג.}$$

12. רשמו מערכות של אי שוויונות, המתאימים לגרף.

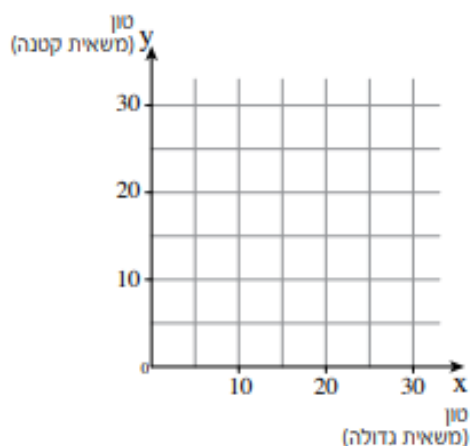
ב.

א.



13. משאית גדולה מסוגלת להעביר בכל הובלה x טון ברזל, ומשאית קטנה - y טון ברזל. לפניך האי שוויונות, המתארים את האילוצים של הבעיה.

א. שרטטו גרף מתאים לבעיה, ורשמו במילים את אילוצי הבעיה (בהקשר לסיפור).



$$\begin{cases} x+y \leq 20 \\ y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

המשך ←

ב. בדקו לגבי כל אחת מהנקודות הבאות, אם שיעוריה מתארים הובלה אפשרית
 $C(-3, 10)$, $D(18, 5)$, $A(20, 0)$, $B(9, 6)$

ג. סמנו שתי נקודות בתחום המתאים לבעיה, ורשמו מה מתארים שיעוריהן.

ד. רשמו שיעורי נקודה, הנמצאות על אחת מהצלעות של הצורה שהתקבלה, רשמו מה מתארים שיעורי הנקודה.

ה. היכן נמצאות הנקודות, המתארות משלוח של 20 טון ברזל בסך הכל?

14. שרטטו במערכת צירים את הגרפים של מערכות האי שוויונות.
 צבעו את האזור המשותף (אם קיים כזה), ורשמו עבורו את שיעורי הקדקודים.

$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ y \leq -2x \\ x \geq -2 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

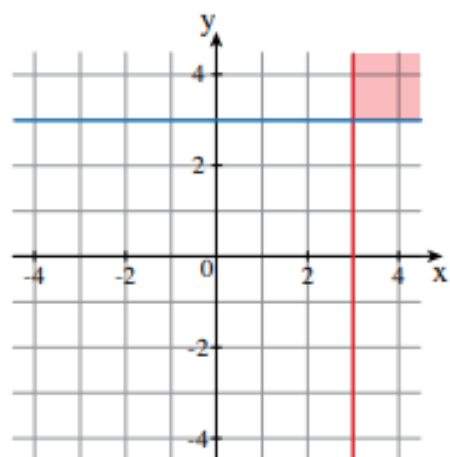
$$\begin{cases} y \geq 2x \\ y + x \leq 5 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq x \end{cases} \quad \text{ד.}$$

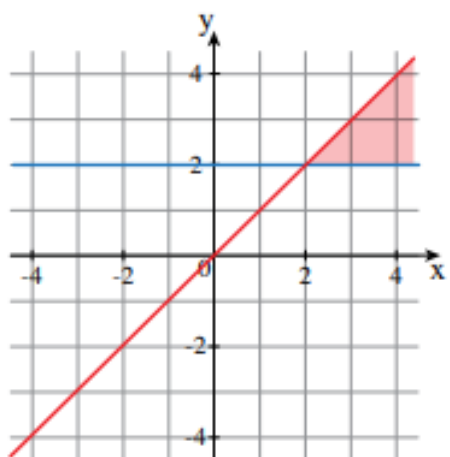
$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq x + 2 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 2x + 1 \\ x - y \leq 5 \end{cases} \quad \text{ה.}$$

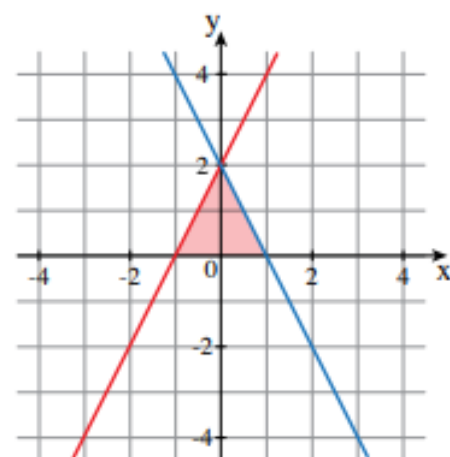
15. רשמו מערכת אי שוויונות, המתאימה לאזור הצבוע.
א.



ב.



ג.





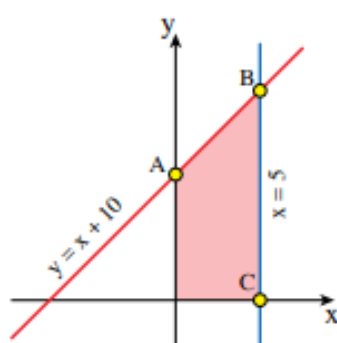
קוד לחישוב קדקוד

עד כה קראנו מתוך השרטוט את שיעורי הקדקודים של התחום המשורטט. בסעיף זה נחזור על מציאת שיעורי הקדקודים כשאין יחידות בשרטוט, כפי שעשינו בגיאומטריה אנליטית.

1. א. רשמו מערכת אי שוויונות, שתתאר את התחום הצבוע.



ב. מצאו את שיעורי A, B, C-1 (רשמו את השיעור הידוע, ואחר כך חשבו את השיעור הנוסף).



2. א. התאימו כל ישר למשוואתו.



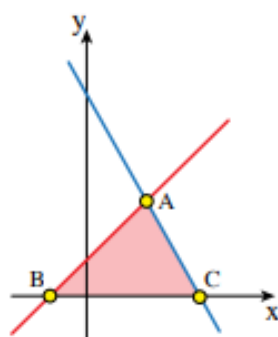
$$y = x + 1$$

$$y = -2x + 10$$

ב. רשמו מערכת אי שוויונות, המתאימה לאזור הצבוע.

ג. חשבו את שיעורי הנקודות B, C.

ד. חשבו את שיעורי הנקודה A.



3. א. רשמו מערכת אי שוויונות, שתתאר את האזור הצבוע.

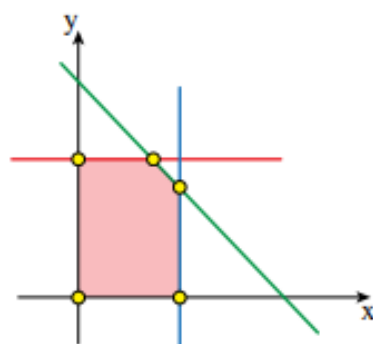


$$y = 5 \quad \text{משוואות הישרים:}$$

$$y + x = 8$$

$$x = 4$$

ב. מצאו את קדקודי הצורה שהתקבלה.

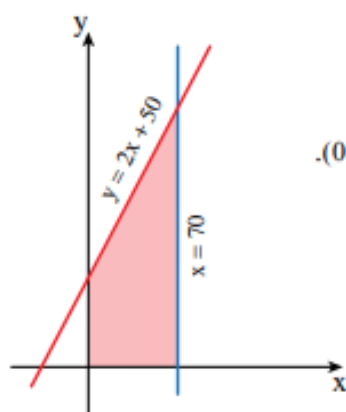




4. א. רשמו מערכת אי שוויונות מתאימה לאזור הצבוע.

ב. חשבו את שיעורי הקדקודים.

ג. רשמו אי שוויונות, היוצרים משולש שקדקודיו: $(0, 2)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$.



תרגילים

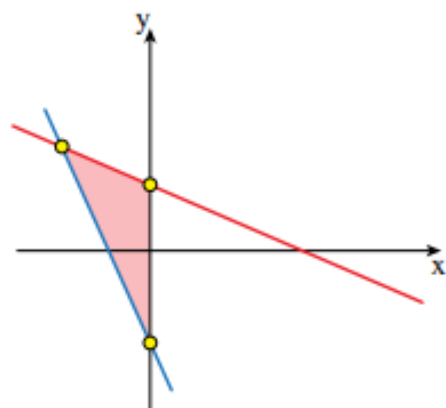
5. א. משוואות הישרים:

$$y = -2x - 3$$

$$x + 3y = 6$$

רשמו מערכת אי שוויונות, שתתאר את האזור הצבוע.

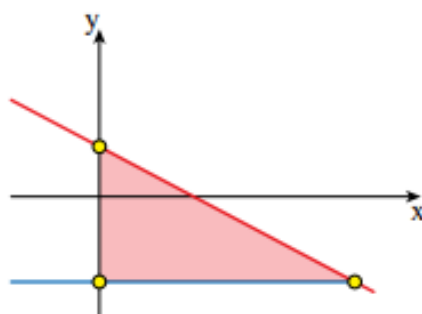
ב. מצאו את שיעורי הקדקודים.



6. מצאו את הקדקודים

$$\begin{cases} x + 2y \leq 3 \\ 3x + y \leq 4 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -2 \\ x + 2y \leq 3 \end{cases} \quad \text{א.}$$



7. מצאו את שיעורי הנקודות, המסומנות בכל שרטוט, על פי המשוואות הרשומות.
(התאימו תחילה לכל ישר את משוואתו.)

$$x - 2y = 2$$

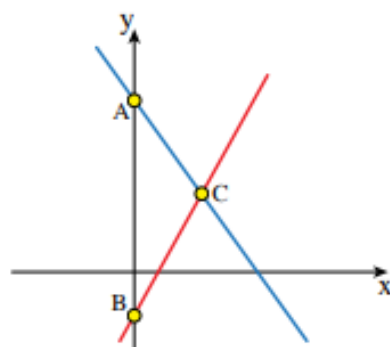
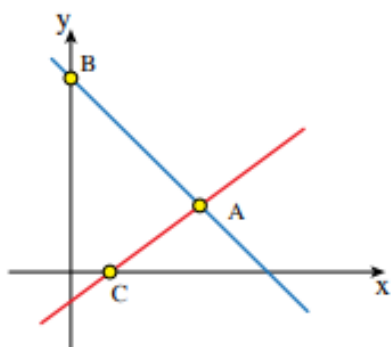
ג.

$$x + y = 5$$

$$y = 2x - 1$$

א.

$$3x + 2y = 6$$



$$x = 5$$

ד.

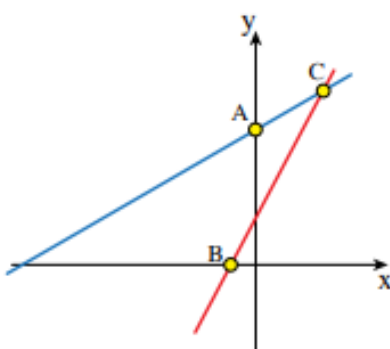
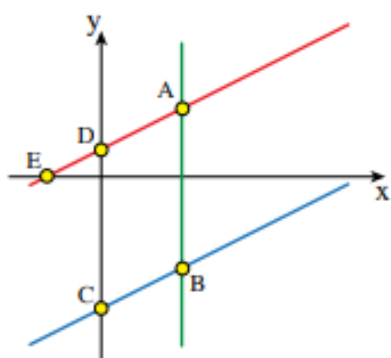
$$x - 2y = 15$$

$$x - 2y = -2$$

$$2x - y = -1$$

ב.

$$x - 2y = -5$$



8. פתרו את מערכות המשוואות הבאות

(רשמו תחילה, אם אפשר, בצורה $y = ax + b$).

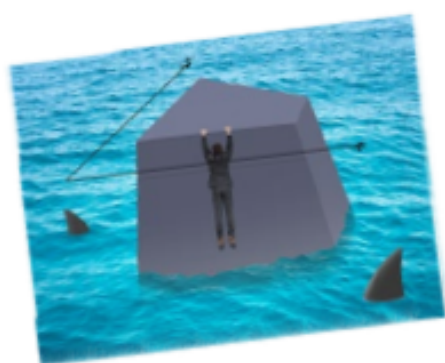
$$\begin{cases} 3x + y = -2 \\ 2x - y = -3 \end{cases} \quad \text{ה.}$$

$$\begin{cases} y - 5x = 10 \\ 2y - 3x = 6 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 9 \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y - x = 5 \end{cases} \quad \text{ב.}$$



התחום האפשרי



1. בבעיות הבאות נעבוד ברביע הראשון בלבד, כלומר $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

במפעלים מייצרים שני סוגי מיצים: מיץ אשכוליות ומיץ ענבים.

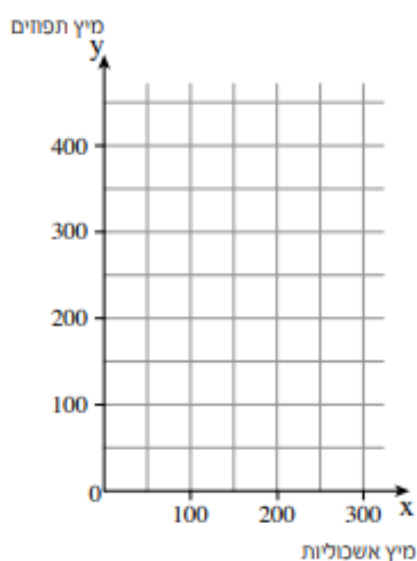
x כמות בליטרים של מיץ אשכוליות, שמייצר המפעל בשעה.

y כמות בליטרים של מיץ ענבים, שמייצר המפעל בשעה.

א. רשמו פונקציית מטרה לכמות המיץ שמייצרים במשך 5 שעות.

ב. במשך 5 שעות ניתן לייצר לא יותר מ-1000 ליטר. רשמו אי שוויון מתאים.

ג. שרטטו במערכת הצירים גרף מתאים לאי שוויון.



ד. האם הנקודות הבאות נמצאות בתחום שנוצר?

$$A(50, 200), B(100, 100), C(0, 200)$$

ה. האם המפעל יכול לייצר 70 ליטרים מיץ אשכוליות ו-140 ליטרים מיץ ענבים?

אוסף כל הפתרונות האפשריים של בעיה נקרא **התחום האפשרי**.



2. בית חרושת מייצר מכנסיים ארוכים וקצרים.

כמות המכנסיים, שהמפעל יכול לייצר בשעה, מתוארת בגרף.

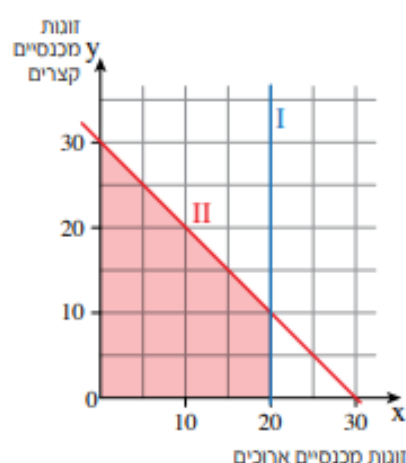
א. האם ניתן לייצר בשעה 20 זוגות של מכנסיים קצרים בלבד?

ב. האם ניתן לייצר בשעה 6 זוגות של מכנסיים קצרים ו-12 זוגות של מכנסיים ארוכים?

ג. רשמו את משוואת הישר II שבשרטוט.

ד. רשמו מערכת אי שוויונות מתאימה לאזור הצבוע.

ה. רשמו במילים את המגבלות של בית החרושת.



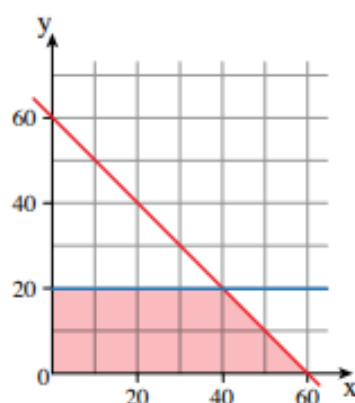
מערכת אי שוויונות, המתארת מגבלות, נקראת **מערכת אילוצים**.



3. כתבו מערכות של אי שוויונות מתאימים.

א.

ב.



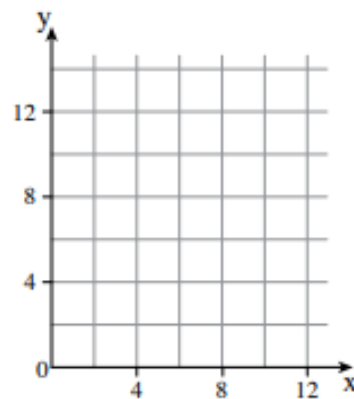
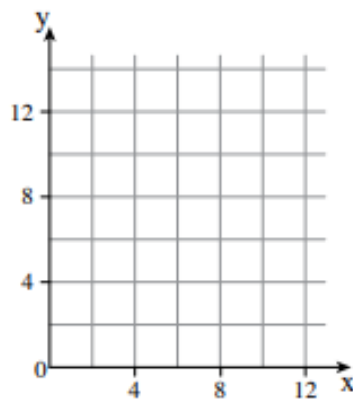
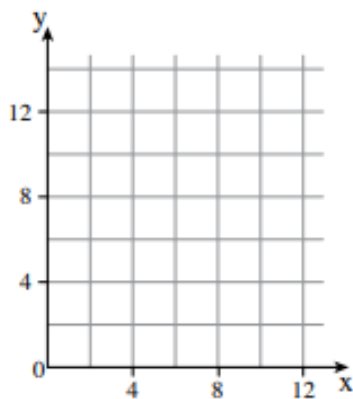
תרגילים

4. שרטטו גרף מתאים לכל מערכת, ברביע הראשון.

ג.
$$\begin{cases} x \leq 4 \\ 2x + y \leq 10 \end{cases}$$

ב.
$$\begin{cases} y \leq 10 \\ x - y \leq 5 \end{cases}$$

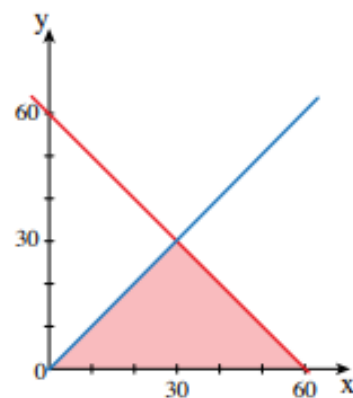
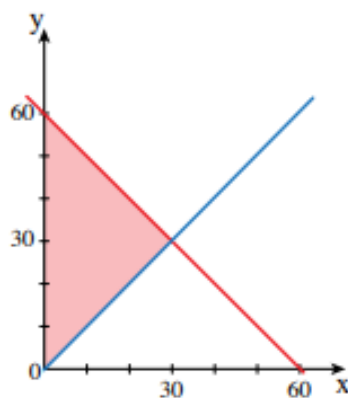
א.
$$\begin{cases} y \leq 3 \\ y \leq -x + 10 \end{cases}$$



5. לאיילת התפזרו הדפים של שיעורי הבית. עיזרו לה "לשדך" את האי שוויונות לגרפים המתאימים (ברביע ה-I).

ב.
$$\begin{cases} y \leq 60 - x \\ x \geq y \end{cases}$$

א.
$$\begin{cases} y \leq 60 - x \\ y \geq x \end{cases}$$



6. א. ידוע, שדרור מקבל **לכל היותר** 50 ש"ח לשבוע דמי-כיס.

האם ייתכן, שבשבוע שעבר קיבל דרור 30 ש"ח?

האם ייתכן שקיבל 60 ש"ח?

האם ייתכן שקיבל 50 ש"ח?

- ב. איילת מקבלת **לכל הפחות** 40 ש"ח דמי-כיס.
האם ייתכן, שאיילת קיבלה בשבוע מסוים 30 ש"ח?
האם ייתכן שקיבלה 60 ש"ח?
האם ייתכן שקיבלה 50 ש"ח?
- ג. האם ייתכן, שבשבוע מסוים יקבלו דרור ואיילת אותו סכום?
7. משאית גדולה מסוגלת להעביר בכל הסעה x טון ירקות, ומשאית קטנה y טון ירקות.
כמות הירקות, שמעבירות 2 המשאיות ביחד ב- 3 הסעות, היא לכל היותר 60 טון.
- א. כיתבו פונקציית מטרה לכמות הירקות המועברת ב- 3 הסעות.
- ב. כיתבו אי שוויון מתאים לאילוץ הנ"ל, ושרטטו גרף.
- ג. רשמו אילו מהנקודות A, B, C, D, E מהוות פתרון אפשרי.
 $E(6, 15)$, $D(10, 12)$, $C(10, 10)$, $B(20, 0)$, $A(5, 12)$

"אל המטרה"



למדתם לשרטט תחום אפשרי. כעת תלמדו להשתמש בתחום האפשרי, כדי לבצע שיקולים כלכליים. לשם כך תכירו בסעיף זה מושג חדש: "פונקציית מטרה".



1. במפעל מייצרים שני מוצרים.
רווח המפעל הוא 5 ש"ח מק"ג של המוצר הראשון, ו-1.5 ש"ח מק"ג של המוצר השני.
א. מה יהיה הרווח מייצור של 5 ק"ג מהמוצר הראשון ו-10 ק"ג מהמוצר השני?
ב. רשמו פונקציית מטרה לרווח, המתקבל מייצור x ק"ג מהמוצר הראשון ו- y ק"ג מהמוצר השני.
$$f(x, y) = \square \cdot x + \square \cdot y$$

ג. חשבו את ערך פונקציית המטרה אם $x = 12$ ו- $y = 3$.
ד. חשבו את הרווח אם $x = 7$ ו- $y = 50$.
ה. חשבו את רווח המפעל מייצור 4.8 ק"ג מהמוצר השני **בלבד** (ללא ייצור של המוצר הראשון).



2. x מייצג משקל, בק"ג, של עגבניות הנמכרות ביום.
 y מייצג משקל, בק"ג, של מלפפונים הנמכרים ביום.
ממכירת ק"ג עגבניות מרוויחים 1 ש"ח.
ממכירת ק"ג מלפפונים מרוויחים 0.5 ש"ח.
א. רשמו פונקציית מטרה לרווח המתקבל ביום: $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$
ב. מה ערך פונקציית המטרה שרשמתם, אם $x = 20$ ו- $y = 30$?
ג. מה היה הרווח ביום בו נמכרו 50 ק"ג עגבניות ו-40 ק"ג מלפפונים?
ד. ערך פונקציית המטרה 100. רשמו שתי אפשרויות שונות ל- x ול- y .
ה. הרווח 120 ש"ח. רשמו שתי אפשרויות שונות של מכירה.



3. x מייצג כמות של חלב בליטרים, הנמכרת ביום.
 y מייצג כמות של מיץ בליטרים, הנמכרת ביום.
ממכירה של ליטר חלב מרוויחים 0.5 ש"ח.
ממכירה של ליטר מיץ מרוויחים 2 ש"ח.
רשמו פונקציית מטרה מתאימה לרווח.

פונקציות כמו אלה שרשמתם, נקראות "פונקציות מטרה". אנו מעוניינים בערכיהן בנקודות מסויימות בתוך התחום האפשרי.

4. בתחרות ידע זוכים ב- 5 נקודות עבור כל תשובה נכונה, ומפסידים 2 נקודות עבור כל תשובה שאינה נכונה.



x מייצג את מספר התשובות הנכונות של משתתף בתחרות.

y מייצג את מספר התשובות השגויות שלו.

רשמו פונקציית מטרה, שתייצג את מספר הנקודות שצבר.

א. מה ערך פונקציית המטרה אם $x = 7$ ו- $y = 10$?

ב. מה מספר הנקודות שצבר מתחרה שענה נכון על 10 שאלות, ושגה ב- 3 שאלות?

ג. רשמו שתי אפשרויות, המתאימות למשתתפים שצברו 45 נקודות.

ד. אילו מספרים ניתן להציב במקום x ו- y בשאלה זו?

5. לחברת נסיעות ישנן הוצאות קבועות: 100 ש"ח לטיול פרטי, ו- 50 ש"ח לטיול קבוצתי.



א. רשמו פונקציית מטרה להוצאות החברה עבור x טיולים פרטיים ו- y טיולים קבוצתיים.

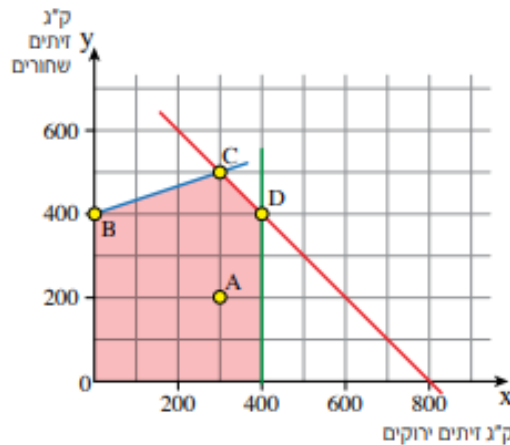
ב. מה הוצאות החברה עבור 50 טיולים פרטיים ו- 10 טיולים קבוצתיים?

ג. אילו מספרים ניתן להציב במקום x ו- y בשאלה זו?



6. מפעל מייצר שימורי זיתים ירוקים ושחורים.

- א. רשמו מערכת אילוצים מתאימה לתחום המשורטט (מערכת אי שוויונות).
סמנו ב- x את המשקל בק"ג של זיתים ירוקים, שמייצר המפעל במחזור ייצור, וב- y את המשקל בק"ג של זיתים שחורים שמייצר במחזור ייצור.



רווח המפעל מזיתים ירוקים הוא 2 ש"ח לק"ג, ומזיתים שחורים 1 ש"ח לק"ג.

- ב. חשבו את רווח המפעל מייצור של 200 ק"ג זיתים ירוקים ו- 450 ק"ג זיתים שחורים.
ג. רשמו פונקציית מטרה לרווח.
ד. מצאו את הערך של פונקציית המטרה שרשמתם בנקודה A.
ה. מצאו את ערך פונקציית המטרה בנקודות B, D, C.
ו. באיזו מהנקודות A, B, C, D הרווח הוא הגדול ביותר?
ז. האם ניתן להרוויח 1300 ש"ח במחזור ייצור אחד? נמקו.

תרגילים

7. א. רשמו פונקציית מטרה לרווח ממכירה של x ק"ג פירות ו- y ק"ג ירקות, אם הרווח לק"ג פירות 2 ש"ח, ולק"ג ירקות 1.5 ש"ח.

ב. מצאו את הרווח, אם מוכרים 30 ק"ג פירות ו- 20 ק"ג ירקות.

ג. רשמו שתי אפשרויות של מכירה, המתאימות לרווח של 150 ש"ח.

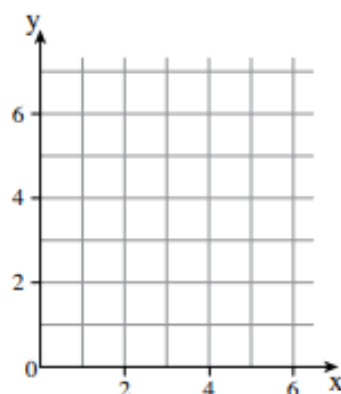
$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x - y \leq 2 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

8. נתונה מערכת אילוצים:

(ברביע ה- I: $x \geq 0$, $y \geq 0$)



א. שרטטו את התחום האפשרי.



ב. סמנו בתחום את הנקודות $A(1, 1)$, $B(1.5, 2)$, $C(0.5, 2)$.

ג. חשבו את ערך פונקציית המטרה $f(x, y) = x - 5y$ בנקודות A , B , C .

ד. באיזו מהנקודות הנ"ל הערך הוא הגדול ביותר?

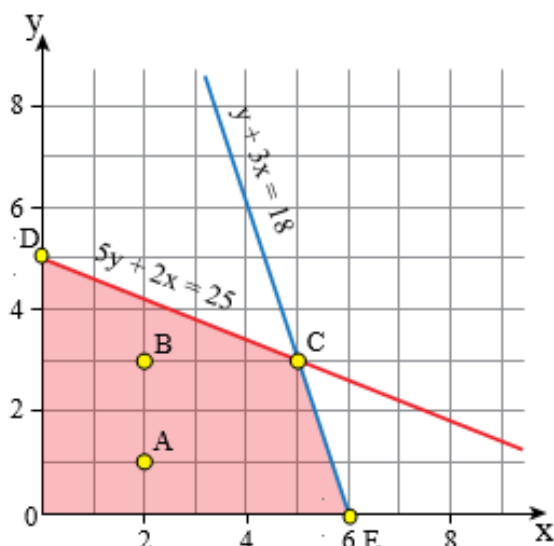
9. במפעל מייצרים שני סוגי מרצפות: ריבועיות ומלבניות. ייצור מרצפת ריבועית נמשך 3 דקות, וייצור מרצפת מלבנית נמשך 4 דקות.

א. רשמו פונקציית מטרה לזמן, בדקות, הדרוש לייצור x מרצפות ריבועיות ו- y מרצפות מלבניות.

ב. רשמו 3 אפשרויות שונות לייצור מרצפות בשעה (60 דקות).

אל הקודקוד"

1. נתון תחום אפשרי משורטט, פונקציית מטרה: $F(x, y) = 6x + 3y$



את

א. מצאו

הערך של פונקציית המטרה בנקודה A.

ב. מצאו את הערך של פונקציית המטרה בנקודה B.

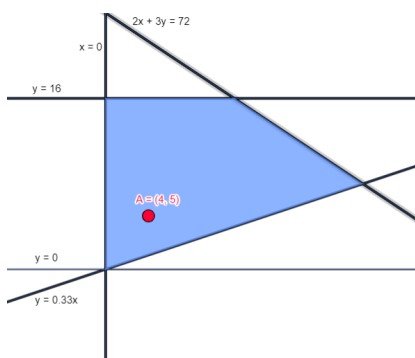
ג. מצאו את הערך של פונקציית המטרה בנקודה C, D, E.

ד. באיזו מהנקודות A, B, C, D, E הרווח הוא הגדול ביותר?

ה. מהו הערך המקסימלי של פונקציית מטרה בתחום האפשרי?

[יישומון המדגים באיזו נקודה מתקבל הערך המקסימלי והמינימלי של פונקציית מטרה בתחום האפשרי \(בעזרת הזזת נקודה A\)](#)

GeoGebra



שאלה: נתון תחום אפשרי משורטט, פונקציית מטרה:

$$F(x, y) = 18x + 25y$$

נקודה A נמצאת בתוך התחום האפשרי,

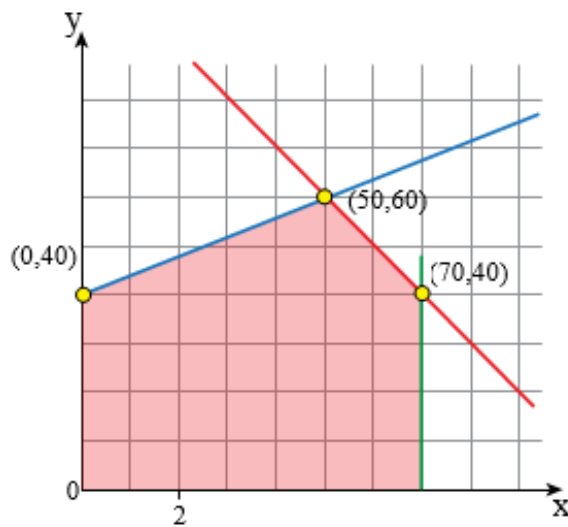
גררו את הנקודה A ומצאו את ערך מקסימלי

ומינימלי של פונקציית המטרה וכתבו את

שיעורי הנקודות.



2. נתון תחום אפשרי משורטט, ופונקציית מטרה: $F(x, y) = 5x + y$



א. באיזו נקודה בתחום האפשרי מתקבל הערך הגבוה ביותר?

ב. מה ערך פונקציית המטרה בנקודה זו?



3. בחישוב קלוריות נקרא לכל 100 גר' "מנה".

במנה אחת של פירות וירקות 40 קלוריות.

במנה אחת של מאכלי חלב 70 קלוריות.

א. רשמו פונקציית מטרה למספר הקלוריות

המתקבל מ- x מנות של ירקות ופירות ו- y

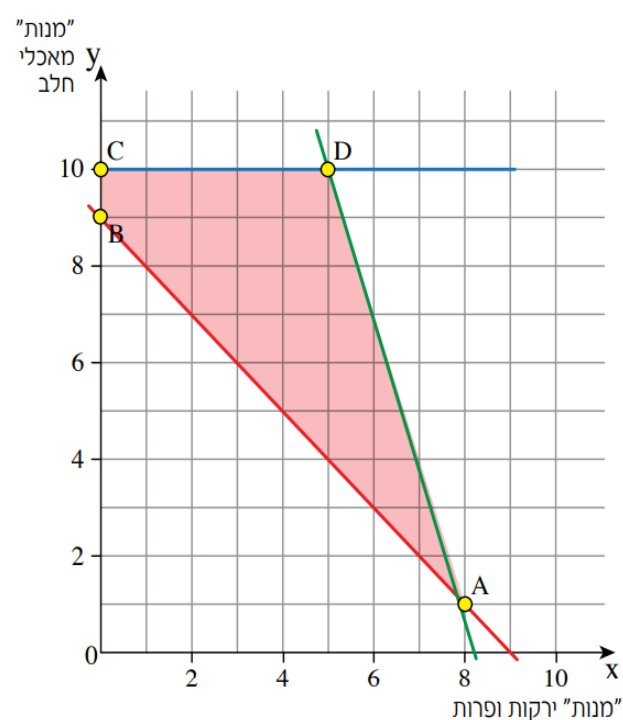
מנות של מאכלי חלב.

ב. כמובן שמעוניינים להפחית את כמות

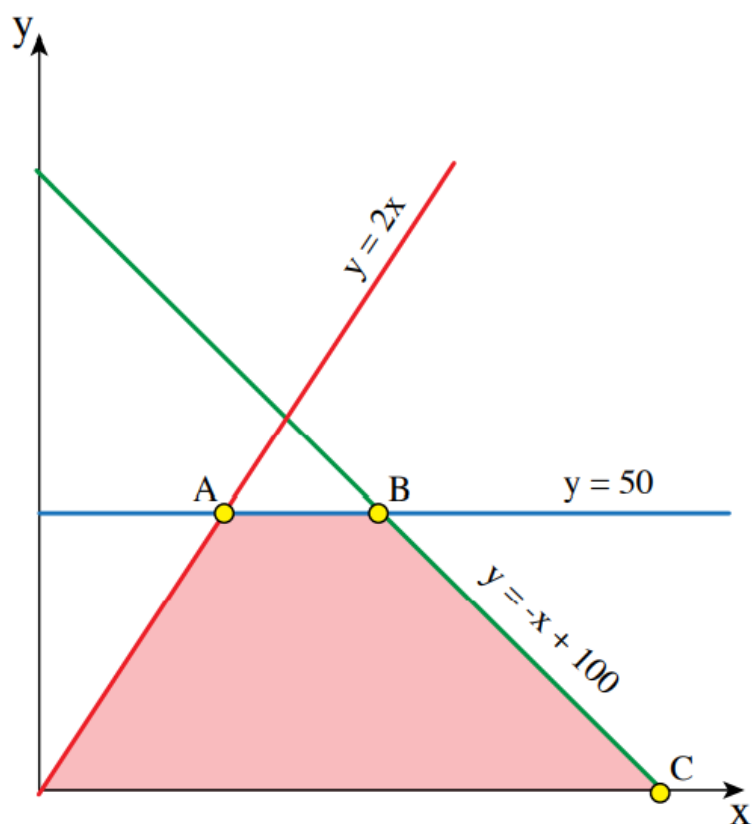
הקלוריות ככל האפשר. באיזו נקודה

בתחום מתקבל מינימום קלוריות?

ג. מהו הערך המינימלי?



4. א. רשמו את שיעורי הקדקודים של התחום האפשרי המפורט: A, B, C, ורשמו יחידות על הצירים (דייקו עד כמה שאפשר).



ב. נתונה פונקציית מטרה: $F(x, y) = 2x + y$, באיזו נקודה בתחום מתקבל הערך הגבוה ביותר של פונקציית המטרה, מהו?

ג. נתונה פונקציית מטרה: $F(x, y) = x + y$
 - היכן בתחום מתקבל הערך הגבוה ביותר?
 - כמה נקודות מתאימות לערך זה?

5. מתי, לדעתכם, יהיה לפונקציית המטרה בתחום נתון יותר מערך מקסימלי אחד?



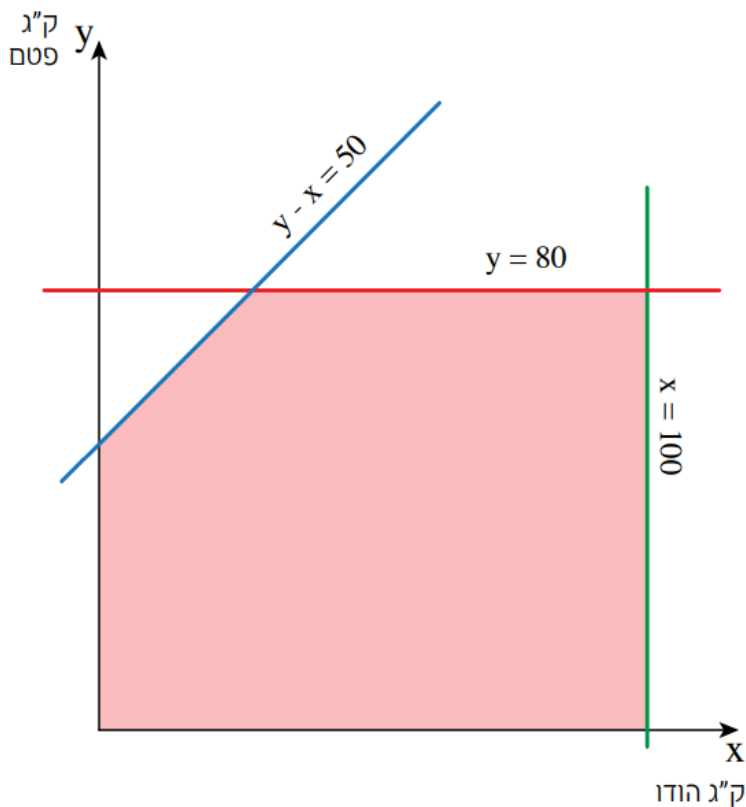
הערך המקסימלי, או המינימלי, של פונקציית מטרה בתחום נתון, מתקבל באחד הקדקודים, או בנקודות שעל אחת הצלעות של התחום.

תרגילים

6. התחום האפשרי מתאר אפשרויות שונות של ייצור מאכלי עוף בשעה,

במפעל "עוף-עף".

x מייצג מספר ק"ג של בשר הודו, y מייצג מספר ק"ג של פטם.



א. חשבו את שיעורי הקדקודים של

התחום האפשרי.

סמנו יחידות על הצירים.

ב. מק"ג בשר הודו מרוויחים 2 ש"ח.

מק"ג בשר פטם מרוויחים 4 ש"ח.

רשמו פונקציית מטרה.

ג. באיזה קודקוד מתקבל הרווח

המקסימלי האפשרי?

ד. מהו הרווח המקסימלי האפשרי?

ה. כמה ק"ג מכל סוג אפשר לייצר,

ולקבל רווח מקסימלי?

7. א. שרטטו את התחום האפשרי, המתאים למערכת האי שוויונות.

$$\begin{cases} x \leq 30 \\ y \geq 2x + 10 \\ y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

ב. חשבו או קראו את שיעורי הקדקודים.

ג. נתונה פונקציית מטרה $f(x, y) = x + 2y$.

ד. מצאו באיזה קדקוד ערך פונקציית מטרה הוא הגדול ביותר, ומה ערך פונקציית המטרה בנקודה זו?



8. בחנות יש מקרר, שיכול להכיל 60 ק"ג גלידה.

x מייצג את הכמות של גלידת וניל.

y מייצג את הכמות של גלידת שוקולד.

בעל החנות מוכר לכל היותר 50 ק"ג גלידת וניל, ולכל היותר 40 ק"ג גלידת שוקולד.

א. רשמו מערכת אי שוויונות מתאימה, ושרטטו תחום אפשרי.

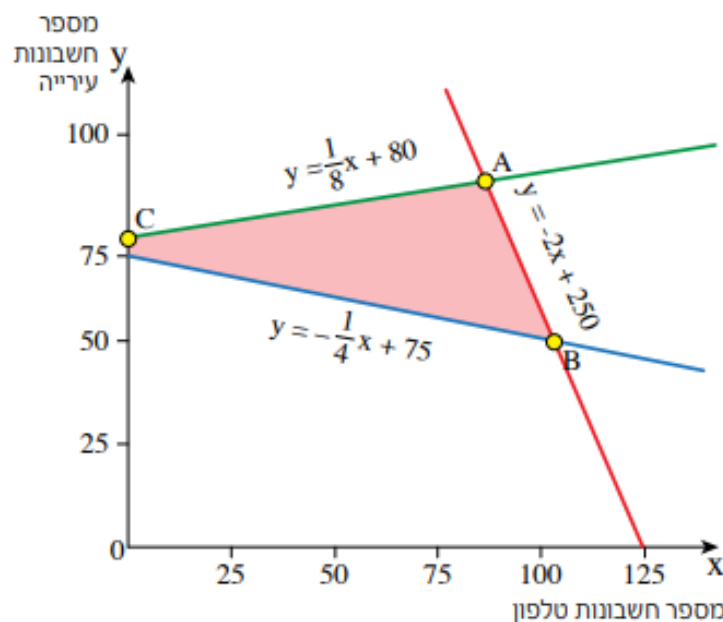
ב. מצאו את שיעורי הקדקודים.

ג. בעל החנות מרוויח 2 ש"ח מק"ג אחד של גלידת וניל, ו-3 ש"ח מק"ג אחד של גלידת שוקולד,

רשמו פונקציית מטרה.

כמה ק"ג מכל סוג כדאי לו למכור, כדי שהרווח יהיה מקסימלי.

9. התחום המשורטט מתאר מגבלות של עבודת מחשב, הנותן שירותים לחברת טלפונים ולעירייה.



א. זמן חישוב לחשבון טלפון - 1 שנייה.

זמן חישוב לחשבון עירייה - 5 שניות

רשמו פונקציית מטרה לזמן החישוב של x חשבונות טלפון ו-y חשבונות עירייה.

ב. מצאו באיזה קדקוד מתקבל **הערך הנמוך** ביותר של הזמן.

חשבו את שיעורי הקדקוד.

ג. כמה חשבונות מכל סוג ניתן לחשב בזמן המינימלי?

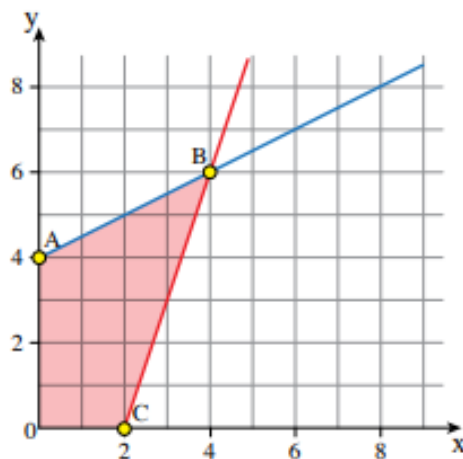
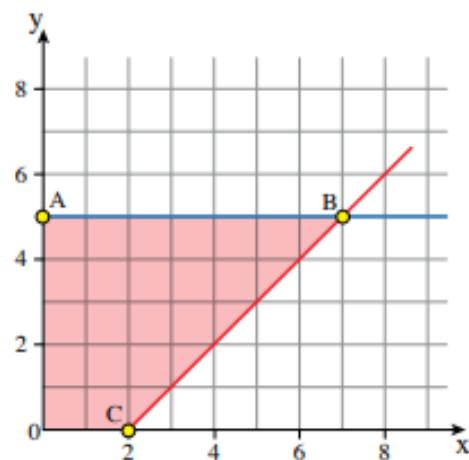
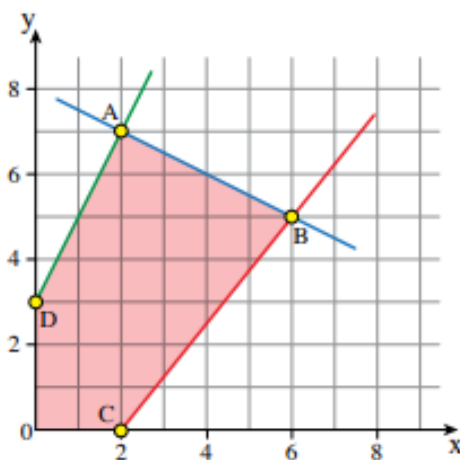


"חלוצים ואילוצים" - שאלות לסיכום

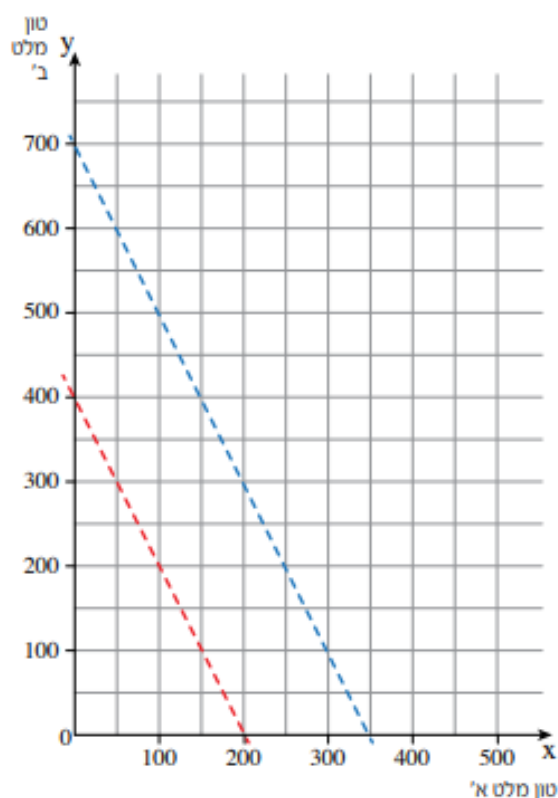


1. לצורך הקמת מפעל,

הכינו שלושה תחומים אפשריים שונים, המתארים את האילוצים.



- א. ידוע, כי הרווח ממוצר א' 2 ש"ח, ומוצר ב' 3 ש"ח.
מייצרים x מוצרים מסוג א' ו- y מוצרים מסוג ב'.
רשמו פונקציית מטרה.
- ב. מי מהתחומים מאפשר רווח מקסימלי?



2. בית חרושת מייצר שני סוגי מלט.

x - משקל בטונות של מלט מסוג א'.

y - משקל בטונות של מלט מסוג ב'.

א. משקל המלט משני הסוגים יחד אינו עולה על 300 טון ליום. רשמו אי שוויון מתאים.

ב. משקל המלט מסוג א' אינו עולה על 200 טון.

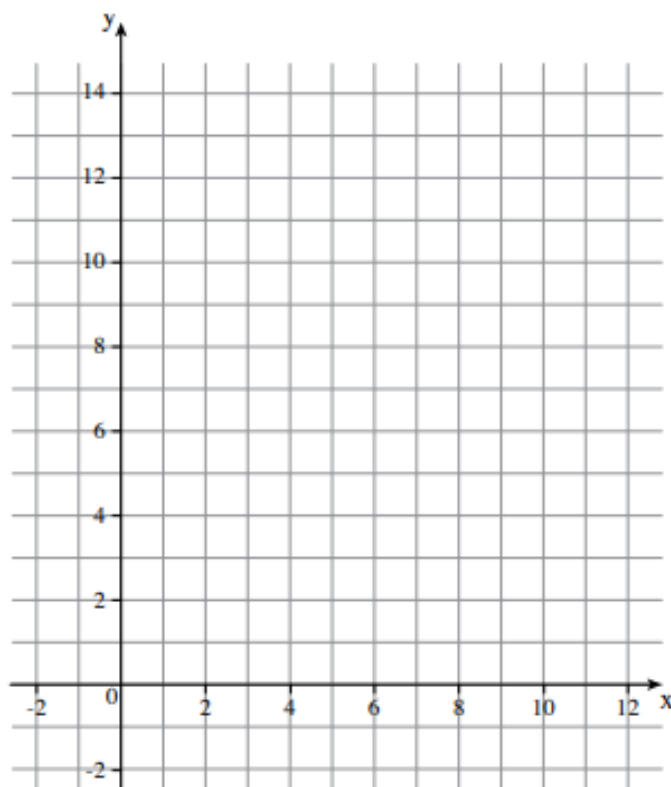
משקל המלט מסוג ב' אינו עולה על 150 טון.
רשמו אי שוויונות מתאימים.

ג. שרטטו את התחום האפשרי במערכת הצירים.

ד. הרווח מטון אחד של מלט מסוג א' הוא 2 ש"ח, וממלט מסוג ב' הוא 1 ש"ח.

- רשמו את פונקציית המטרה.

- איזה קדקוד של התחום מאפשר רווח מקסימלי?

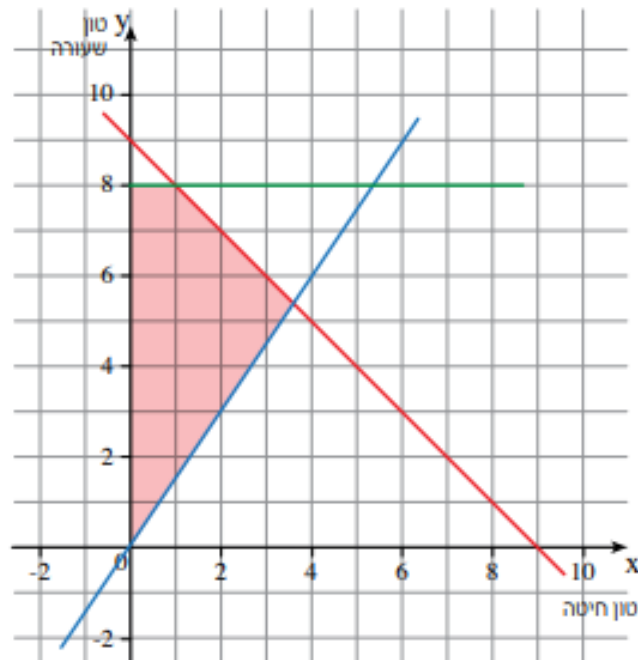


3. שרטטו את התחום המתאים

למערכת האי שוויונות.

$$\begin{cases} x \leq 10 \\ x + 2y \geq 4 \\ x - y \geq -4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

4. א. רשמו מערכת אי שוויונות מתאימה לתחום המשורטט.



ב. x מייצג משקל, בטונות, של חיטה שקוצרים ביום.
 y מייצג משקל, בטונות, של שעורה שקוצרים ביום.
 נסו לתאר במילים את האילוצים המתוארים באי שוויונות.

ג. על טון חיטה מרוויחים 100 ש"ח, ועל טון שעורה 50 ש"ח.
 רשמו פונקציית מטרה, ומצאו את הרווח המקסימלי האפשרי.

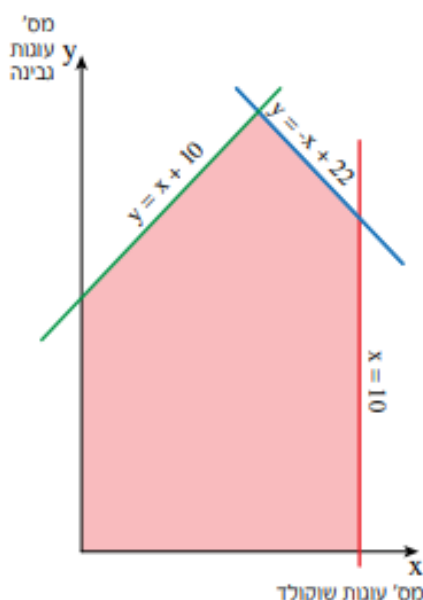


מי ירוויח יותר? עוד שאלות לסיכום



1. 3 קונדיטוריות מייצרות עוגות שוקולד ועוגות גבינה.
 x מייצג מס' עוגות שוקולד, שנמכרות בשעה.
 y מייצג מס' עוגות גבינה, שנמכרות בשעה.
 לפניכם תחום אפשרי, שנקבע לפי אילוצים שונים,
 ומתאים ל- 3 הקונדיטוריות.

א. מצאו את שיעורי הקודקודים,
 ורשמו, בערך, יחידות על הצירים.



- ב. קונדיטוריה "חיים" מוכרת עוגת שוקולד ליחיד ב- 5 ש"ח,
 ועוגת גבינה ב- 3 ש"ח.
 קונדיטוריה "איציק" מוכרת עוגת שוקולד ב- 3 ש"ח,
 ועוגת גבינה ב- 4 ש"ח.
 קונדיטוריה "מלכה" מוכרת עוגת שוקולד ב- 4 ש"ח,
 ועוגת גבינה ב- 5 ש"ח.
 רשמו פונקציית מטרה למכירות של כל קונדיטוריה.
 ג. מצאו עבור כל קונדיטוריה את ההכנסה המקסימלית
 האפשרית.
 ד. למי מהן ההכנסה המקסימלית הגדולה ביותר?

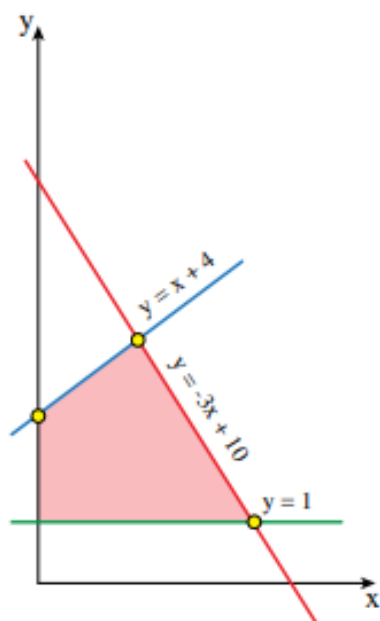
תרגילים

2. לפניכם שרטוט של תחום אפשרי.

א. רשמו את מערכת האי שוויונות המתאימה.

ב. מצאו את שיעורי הקודקודים. סמנו יחידות על הצירים.

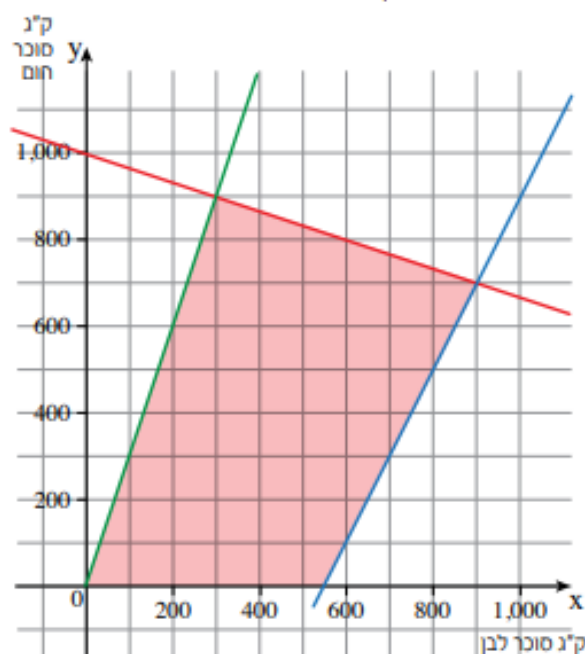
ג. באיזו נקודה מקבלת פונקציית המטרה $f(x, y) = 2x + y$ ערך
 מקסימלי, ומהו הערך המקסימלי?





3. בבית חרושת מייצרים מוטות של ברזל ושל נחושת.
x מייצג משקל בטונות של מוטות ברזל.
y מייצג משקל בטונות של מוטות נחושת.
בשעה מייצרים, לכל היותר, 8 טון של מוטות משני הסוגים יחד.
בשעה חייבים לייצר, לכל הפחות, 3 טון של מוטות משני הסוגים יחד.
כמות הברזל שמייצרים בשעה היא לכל היותר 7 טון.
כמות הנחושת שמייצרים בשעה היא לכל היותר 5 טון.
א. רשמו מערכת אי שוויונות, ושרטטו את התחום האפשרי.
ב. מכל טון של ברזל מרוויח ביהח"ר 500 ש"ח, ומכל טון נחושת 1000 ש"ח.
רשמו פונקציית מטרה, ומצאו מהו הרווח המקסימלי האפשרי.

4. הגרף מתאר אפשרויות של ייצור סוכר לבן וחום.



- מק"ג אחד של סוכר לבן מרוויח 0.5 ש"ח.
מק"ג אחד של סוכר חום מרוויח 1 ש"ח.
רשמו פונקציית מטרה, ומצאו מהו הרווח הגדול ביותר האפשרי.



5. במפעל מייצרים חומר להדברת נמלים וחומר להדברת תיקנים (ג'וקים).

x מייצג משקל בק"ג של חומר להדברת נמלים, המיוצר ביום.

y מייצג משקל בק"ג של חומר להדברת תיקנים, המיוצר ביום.

- בסה"כ מייצרים לא יותר מ- 500 ק"ג חומרי הדברה ביום.

- כמות החומר המיוצר ביום להדברת תיקנים היא לפחות 50 ק"ג.

- כמות החומר המיוצר להדברת תיקנים היא יותר מפי 2 מהכמות להדברת נמלים.

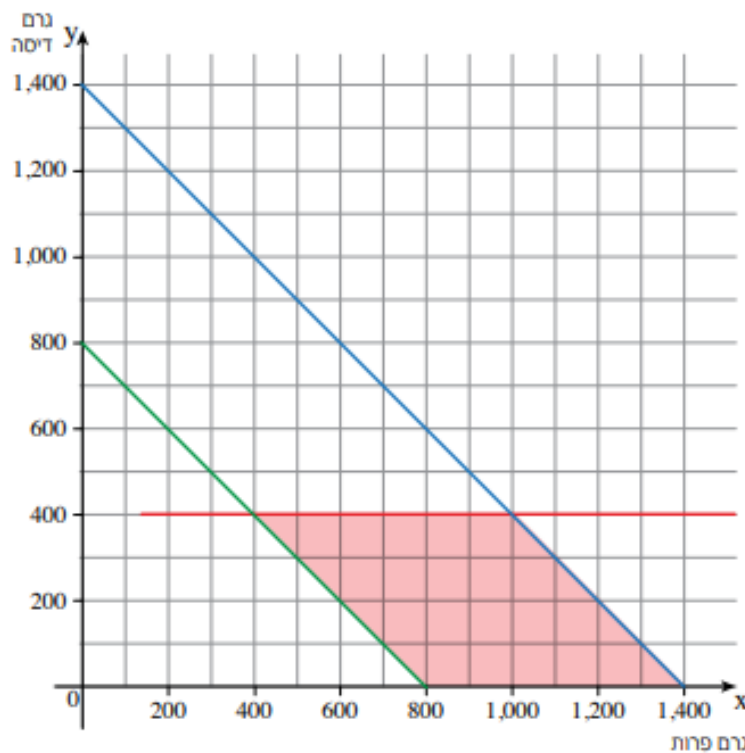
א. רשמו מערכת אי שוויונות מתאימה, ושרטטו במחברתכם את התחום האפשרי. (בחרו ביחידת מידה של 50 ק"ג)

ב. מכל ק"ג של חומר להדברת נמלים מרוויחים 2 ש"ח.

מכל ק"ג של חומר להדברת תיקנים מרוויחים 1.5 ש"ח.

רשמו פונקציית מטרה, מצאו מהו הרווח המקסימלי האפשרי.

6. הגרף מתאר אפשרויות של תפריט יומי לתינוקות.



בכל גרם פירות יש 0.007 גרם ברזל, ובכל גרם דיסה יש 0.005 גרם ברזל.

א. רשמו פונקציית מטרה למשקל הברזל ב x גרם דיסה ו- y גרם פירות.

ב. מצאו תפריט יומי אפשרי, שבו כמות הברזל מקסימלית.

מה כמות הברזל בתפריט שמצאתם?

... ולוהי רק ההתחלה של דעיית תכנון קלאסיה...

ארגון נתונים בתכנון לינארי

עד כה הכרתם כלים לפתרון בעיות פשוטות בתכנון לינארי. בבעיות עם מספר רב יותר של אילוצים, נוח להשתמש בטבלה לארגון הנתונים. נדגים זאת בשאלות הבאות:

1. מפעל מייצר שני סוגי מיצים: מיץ תפוזים ומיץ ענבים. בייצור שלושה שלבים: סחיטה, ערבוב, מילוי. הזמן הנדרש לכל שלב מתואר בטבלה:

סוג המיץ	סחיטה	ערבוב	מילוי
תפוזים	8 דקות לליטר	2 דקות לליטר	5 דקות לליטר
ענבים	3 דקות לליטר	10 דקות לליטר	4 דקות לליטר

א. כמה דקות דרושות **לסחיטה** של 3 ליטר מיץ תפוזים?

לערבוב של 3 ליטר מיץ תפוזים?

למילוי של 3 ליטר מיץ תפוזים?

חשבו כמה דקות דרושות לייצור כולל של 3 ליטר מיץ תפוזים.

רשמו פונקציית המטרה למספר הדקות הדרושות לייצור כולל של x ליטר מיץ תפוזים.

ב. חשבו כמה דקות דרושות לסחיטה של 4 ליטר מיץ תפוזים ו- 5 ליטר מיץ ענבים.

ג. רשמו פונקציית מטרה למספר הדקות הדרוש לסחיטה של x ליטר מיץ תפוזים ו- y ליטר מיץ ענבים.

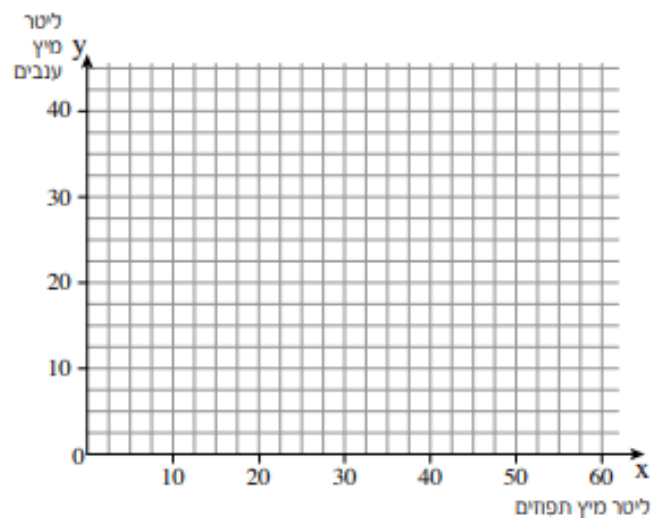
ד. רשמו פונקציית מטרה למספר הדקות הדרושות לערבוב של x ליטר מיץ תפוזים ו- y ליטר מיץ ענבים.

ה. רשמו פונקציית מטרה למספר הדקות הדרושות למילוי של x ליטר מיץ תפוזים ו- y ליטר מיץ ענבים.

ו. ביום מסוים פרצה במפעל שביתה לאחר שעתיים של עבודה (120 ד') רשמו משוואות מתאימות.

ז. שרטטו את הישרים שבסעיף ו'.

(צבעו שטח המתאים לייצור אפשרי של מיץ תפוזים ומיץ ענבים.)



ח. האם אפשר ביום זה לסיים יצור של 10 ליטרים מיץ תפוזים ו-10 ליטרים של מיץ ענבים? הסבירו.
האם אפשר להספיק לייצר 10 ליטרים של מיץ תפוזים ו-8 ליטרים מיץ ענבים? הסבירו.

תרגילים 4 ו-5 בהמשך דומים לתרגיל 1, תוכלו להיעזר בפתרון של תרגיל 1 כדי לפתור אותם.

2. מפעל מייצר שני סוגי מרגרינה: דלת-קוריות ורגילה. הייצור נעשה בשלושה שלבים:

ייצור מרגרינה דלת-קוריות:

משך הבישול:	30 דקות לק"ג.
ערבוב:	5 דקות לק"ג.
מיצוק:	2 דקות לק"ג.

ייצור מרגרינה רגילה:

משך הבישול:	10 דקות לק"ג.
ערבוב:	15 דקות לק"ג.
מיצוק:	5 דקות לק"ג.

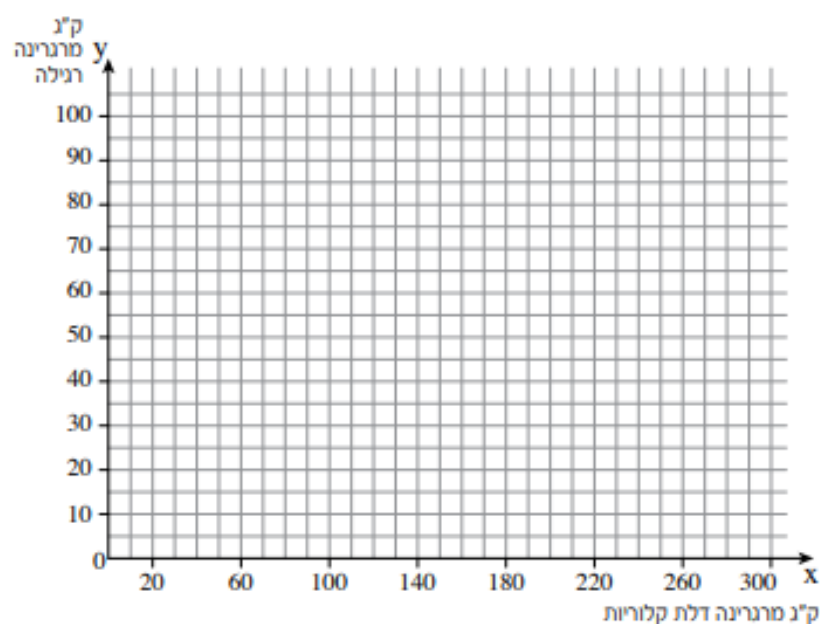
א. הכינו טבלה מתאימה לנתונים ורשמו אותם בתוכה.

ב. מהו זמן הבישול של 3 ק"ג מרגרינה דלת-קוריות, ו-5 ק"ג מרגרינה רגילה.

ג. האם ניתן להספיק לבשל 10 ק"ג מרגרינה דלת-קוריות ו-5 ק"ג מרגרינה רגילה במשך שעתיים?

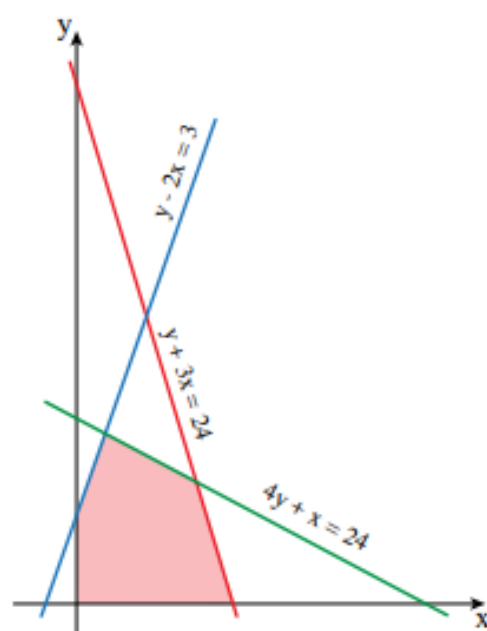
ד. רשמו פונקציית מטרה לזמן הבישול של x ק"ג מרגרינה דלת-קוריות ו- y ק"ג מרגרינה רגילה.
הזמן המוקצב לבישול הוא 10 שעות (____ דקות). רשמו אי-שוויון מתאים.

ה. הזמן המוקצב לערבוב הוא: 12 שעות.
 הזמן המוקצב למיצוק הוא: 8 שעות. רשמו עוד שני אי שוויונות.
 שרטטו גרף של האי שוויונות שרשמתם.



האם ניתן בזמן המוקצב לייצר 20 ק"ג מרגרינה רגילה ו-30 ק"ג מרגרינה דלת-קלוריות?
 האם ניתן בזמן המוקצב לייצר 20 ק"ג מרגרינה רגילה ו-20 ק"ג מרגרינה דלת-קלוריות?

כעת תוכלו לפתור את תרגיל 7 בתרגילים



3. נתון תחום אפשרי, המתאר ייצור של x ק"ג מוצר א' ו- y ק"ג מוצר ב'. רשמו את האי שוויונות המתוארים בתחום.
- ידוע שהרווח לק"ג מוצר א' הוא 3 ש"ח ולק"ג מוצר ב' 5 ש"ח.
- א. רשמו פונקציית מטרה לרווח המתקבל מייצור של x ק"ג מוצר א' ו- y ק"ג מוצר ב'.
- ב. היכן יתקבל הרווח המקסימלי? כמה ק"ג מכל מוצר כדאי לייצר? חשבו מהו הרווח המקסימלי.

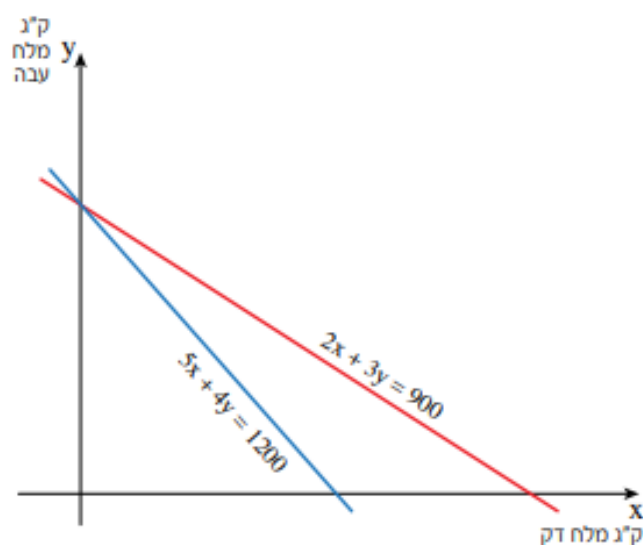
תרגילים

4. הטבלה שלפניכם מתארת תהליך ייצור של שני סוגי מלח: מלח דק ומלח עבה.

סוג	זמן עיבוד	זמן אריזה
מלח דק	2 דקות לק"ג	5 דקות לק"ג
מלח עבה	3 דקות לק"ג	4 דקות לק"ג

- א. חשבו כמה דקות דרושות לעיבוד של 10 ק"ג מלח דק ו- 15 ק"ג מלח עבה. המכונה המעבדת יכולה לעבוד לכל היותר 15 שעות ביום, (900 דקות), והמכונה האורזת יכולה לעבוד לכל היותר 20 שעות (1200 דקות).
- ב. ביום מסוים עיבדו רק מלח דק. האם אפשר היה להספיק לעבד 300 ק"ג מלח דק?
- ג. אם מייצרים רק מלח עבה, האם אפשר להספיק לעבד 300 ק"ג מלח עבה? האם אפשר היה להספיק לעבד ולארז 300 ק"ג מלח עבה?
- ד. רשמו פונקציית מטרה לזמן ה**עיבוד** של x ק"ג מלח דק ו- y ק"ג מלח עבה. רשמו פונקציית מטרה לזמן ה**אריזה** של x ק"ג מלח דק ו- y ק"ג מלח עבה.
- ה. רשמו אי שוויונות מתאימים.

- ו. לפניכם משוואות הישרים שהם גבולות התחומים.
התאימו לכל משוואה את האי שוויון וצבעו שטח מתאים.



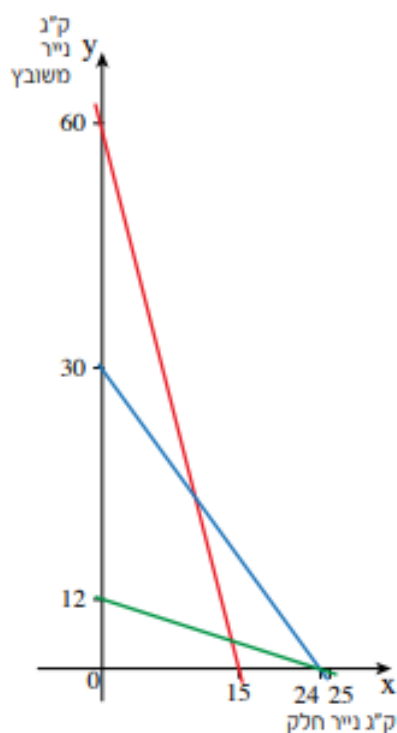
- ז. סמנו 2 נקודות באזור הצבוע, ורשמו במילים כמה ק"ג מכל סוג מייצרים עפ"י נקודות אלה, ומהו זמן העיבוד והאריזה.

5. מפעל מייצר שני סוגי נייר: משובץ וחלק.
תהליך הייצור מורכב מהשלבים הבאים: הרכבת העיסה, ערבוב ועיבוד.
בטבלה נתונים פרטי הייצור **בדקות לק"ג**.

סוג	הרכבת העיסה	ערבוב	עיבוד
נייר חלק	20	10	8
נייר משובץ	5	8	15

- א. כמה דקות דרושות להרכבת עיסה של 20 ק"ג נייר חלק ו- 10 ק"ג נייר משובץ?
כמה דקות דרושות לערבוב עיסה של 20 ק"ג נייר חלק ו- 10 ק"ג נייר משובץ?
כמה דקות דרושות לייצור כולל של 20 ק"ג נייר חלק?
במחזור ייצור אחד:
המכונות המרכיבות את העיסה יכולות לפעול 5 שעות לכל היותר (שהן _____ דקות).
המכונות המערבבות יכולות לפעול 4 שעות לכל היותר (שהן _____ דקות).
המכונות המעבדות יכולות לפעול 3 שעות (שהן _____ דקות).
- ב. רשמו פונקציית מטרה לזמן העיבוד של x ק"ג נייר חלק ו- y ק"ג נייר משובץ, ורשמו אי שוויון מתאים.
- ג. רשמו שני אי שוויונות נוספים, המתאימים לזמן **ההרכבה** ולזמן **הערבוב**.

ד. לפניכם הישרים שבגבולות האי שוויונות. התאימו את המשוואות לישרים וצבעו אזור המתאים לא שוויונים.



ה. אם מייצרים רק נייר חלק, כמה ניתן לייצר במחזור ייצור אחד? אילו מכונות אינן מנוצלות בכל הזמן שניתן להן? הסבירו.

6. נתונה מערכת האילוצים הבאה:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 180 \\ x + y \leq 90 \\ y - x \geq -50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

א. שרטטו את התחום האפשרי.

(כדאי לחלק את הצירים ליחידות של 20).

ב. מצאו את ערכי x ו-y עבורם מקבלת פונקציית המטרה ערך מקסימלי

בתחום האפשרי. חשבו ערך זה.

7. מפעל מייצר שני סוגי סלטים: סלט חמוץ וסלט חריף.

ייצור סלט חמוץ:

משך הבישול 20 דקות לק"ג.

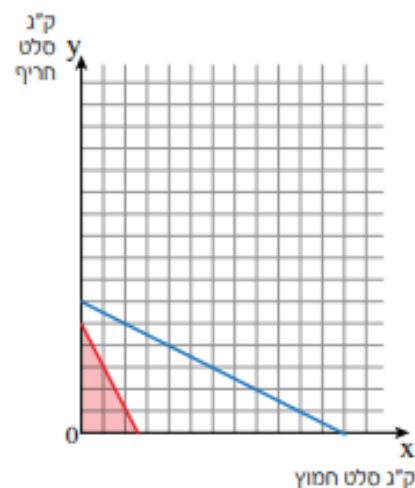
משך הערבוב: 5 דקות לק"ג.

ייצור סלט חריף:

משך הבישול 10 דקות לק"ג.

משך הערבוב: 10 דקות לק"ג.

- הכינו טבלה מתאימה לנתונים, ורשמו אותם בטוכה.
- מהו זמן הבישול של 5 ק"ג סלט חמוץ ו-10 ק"ג סלט חריף?
- האם ניתן להספיק לבשל במשך שעתיים 3 ק"ג סלט חמוץ ו-2 ק"ג סלט חריף?
- רשמו פונקציית מטרה לזמן הבישול של x ק"ג סלט חמוץ ו- y ק"ג סלט חריף.
- הזמן המוקצב לבישול הוא 8 שעות (____ דקות). רשמו אי שוויון מתאים.
- הזמן המוקצב לערבוב הוא 10 שעות. רשמו אי שוויון מתאים.
- לפניכם גרף של האי שוויונות שרשמתם. התאימו לכל ישר את המשוואה.
- בחרו נקודה באזור הצבוע ורשמו במילים מה היא מתארת.
- האם קיים אילוף, שהורדתו לא תשנה את הפתרון? אם כן - רשמו מהו ונמקו.



"הכל פתוח"...

1. נתונה מערכת האילוצים הבאה:



$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 50 \\ y \leq 2x + 40 \end{cases}$$

א. שרטטו את התחום האפשרי; מה המיוחד בתחום הזה?

ב. נתונה פונקציית המטרה $f(x, y) = 3x + 5y$

היכן, בתחום האפשרי, מקבלת פונקציית המטרה ערך מינימלי?
האם יש ערך מקסימלי לפונקציית המטרה, במסגרת התחום האפשרי? נמקו.

בתחום פתוח, לא תמיד מקבלת פונקציית המטרה ערך מקסימלי או מינימלי, יש לבדוק על פי פונקציית המטרה הנתונה.

2. נתונה מערכת האילוצים הבאה:



$$\begin{cases} y - x \leq 3 \\ 5y - x \geq -10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

א. שרטטו את התחום האפשרי.

ב. נתונה פונקציית המטרה
בדקו אם פונקציית המטרה מקבלת מקסימום או מינימום בתחום.

ג. נתונות עוד שתי פונקציות מטרה:

ii) $f(x, y) = x - 2y$

iii) $f(x, y) = x - y$

בדקו לגבי כל אחת מהן, אם היא מקבלת מינימום או מקסימום בתחום.

האם יש יותר מערך אחד כזה בתחום?

3. רשמו מערכת אי שוויונות, כך שהתחום המשותף המתאים להם יהיה פתוח, ושרטטו את התחום.

סרטון-תכנון לינארי- תחום פתוח - יוסי צ'פניצקי



מצגת תכנון לינארי - תחום פתוח - יוסי צ'פניצקי



4. במפעל מייצרים בשעה לפחות 4 ק"ג ריבת משמש, ולפחות 5 ק"ג ריבת שזיפים. ידוע גם, שהמשקל של ריבת המשמש הוא לכל היותר 10 ק"ג יותר מהמשקל של ריבת השזיפים.

א. רשמו מערכת אי שוויונות מתאימה, כאשר x מייצג משקל בק"ג של ריבת משמש, ו- y מייצג משקל בק"ג של ריבת שזיפים.

ב. שרטטו תחום אפשרי מתאים.

ג. עלות הייצור היא 5 ש"ח לק"ג ריבת משמש, ו-7 ש"ח לק"ג ריבת שזיפים. רשמו פונקציית מטרה, $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ ומצאו עלות מינימלית. (מצאו תחילה כמה יש לייצר מכל סוג כדי לקבל עלות מינימלית).

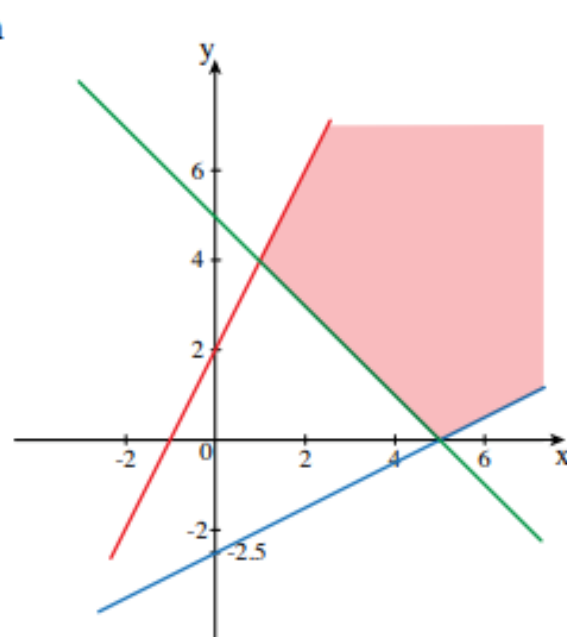
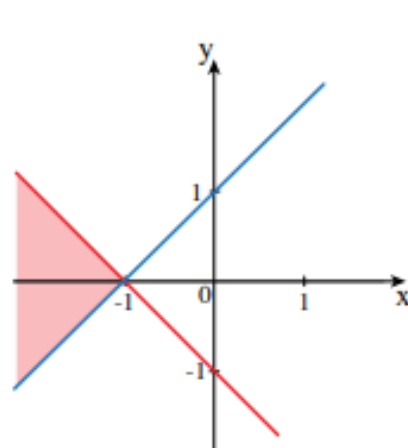
5. נתונה מערכת אי שוויונות:

$$\begin{cases} y \geq 2 \\ x \leq -1 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$$

א. שרטטו את התחום המשותף.

ב. הוסיפו אי שוויון כרצונכם, כך שהתחום הנ"ל "יסגר", ושרטטו בהתאם. הערה: בשאלות הבאות (6, 7) ניתן להשתמש בגאוגברה, או תוכנה גרפית אחרת, לצורך בקרה.

6. רשמו מערכות אי שוויונות, המתאימות לתחומים הפתוחים הבאים:



7. רשמו מערכת של 3 אי שוויונות לפחות, כך שהתחום המשותף המתאים להם יהיה פתוח, וכולו מעל ציר ה- x . (תוכלו לשרטט תחילה תחום כזה).

8. מצאו את נקודות המקסימום והמינימום של פונקציית המטרה:
 $f(x, y) = 5 - 5x + 8y$ במסגרת האילוצים:

$$\begin{cases} x \leq 8 \\ x \geq 2 \\ y \geq -3 \\ 3x + 4y \leq 24 \end{cases}$$

9. תזונאית מעוניינת שאדם הבא אליה להרכיב תפריט יקבל שני סוגי ויטמינים. הכמות המינימלית ההכרחית היא 260 מ"ג מכל סוג ויטמינים לשבוע. שני הסוגים נמצאים בתפוחי אדמה ובסלק בלבד. סמנו ב- x את משקל תפוחי האדמה וב- y את משקל הסלק.

	1 ק"ג תפוחי אדמה	1 ק"ג סלק
כמות ויטמין סוג I	20 מ"ג	60 מ"ג
כמות ויטמין סוג II	50 מ"ג	20 מ"ג

א. רשמו אי שוויונות מתאימים ושרטטו את התחום האפשרי.

ב. ידוע, כי מחיר ק"ג תפוחי אדמה 20 ש"ח, ומחיר ק"ג סלק 15 ש"ח, רשמו פונקציית מטרה $f(x, y)$, ומצאו כמה ק"ג מכל סוג יש לאכול לפי ההוראות, כדי שההוצאות יהיו מינימליות.

ג. מהן ההוצאות המינימליות?

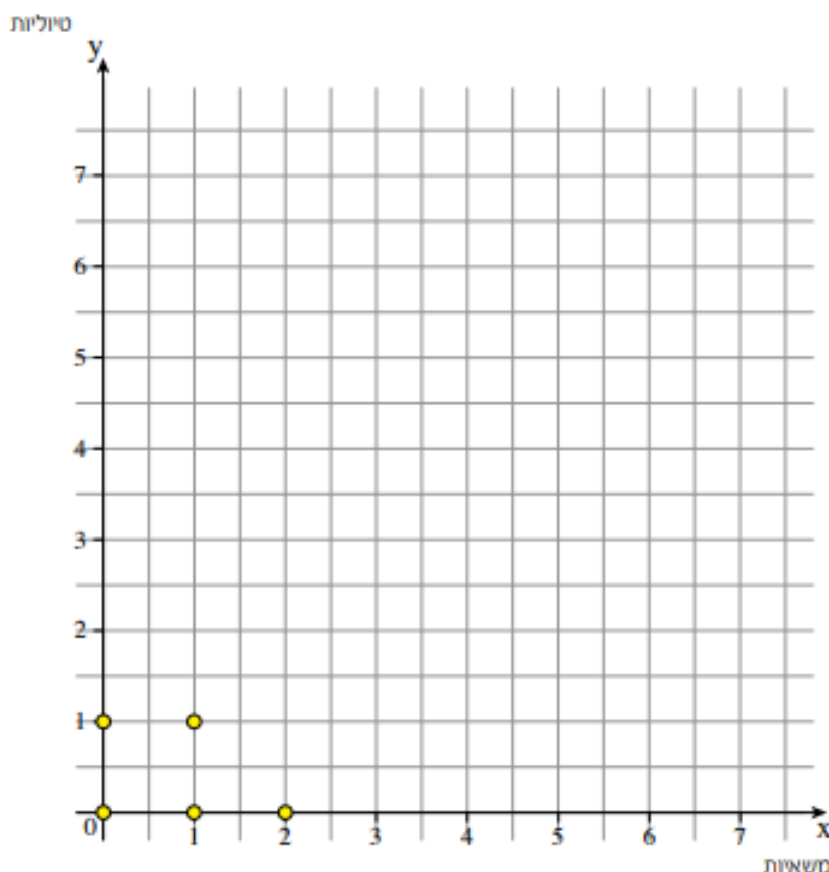
ומה אם מתעניינים רק בנקודות שלמות?

1. באילו מהמקרים הבאים המשתנים x ו- y מקבלים ערכים טבעיים?
 - א. - רוצים למצוא מקסימום רווח ממכירת כמויות של עגבניות ושל מלפפונים.
 - ב. - תחום אפשרי מתאר אילוצים של מפעל המייצר שולחנות וכסאות.
 - ג. - פונקציית המטרה מתארת זמן פעולה.
 - ד. - פונקציית המטרה מתארת מספר נקודות המתקבל מ- x תשובות נכונות ו- y תשובות לא נכונות.

2. חברת "המטייל" משכירה מכוניות לטיולים. לחברה יש 5 משאיות ו-7 טיולים. בית ספר שוכר x משאיות ו- y טיולים.

- א. רשמו אי שוויונות מתאימים.

בשרטוט מסומנות 5 נקודות מהתחום האפשרי.



- ב. המשיכו בסימון הנקודות התחום האפשרי. כמה נקודות בתחום האפשרי? הסבירו.
- ג. שכירת משאית ליום עולה 400 ש"ח ושכירת טיולית עולה 200 ש"ח. רשמו פונקציית מטרה למחיר שתגבה חברת "המטייל" $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$

- ד. מצאו אפשרות של מספר משאיות ומספר טיולים המתאים לרווח יומי של 3000 ש"ח. כמה אפשרויות בתחום האפשרי מתאימות לרווח של 3000 ש"ח? רשמו את כולן.
- ה. סמנו את הנקודה המתאימה לרווח המקסימלי האפשרי (מסעיף א')
3. ב"ס "ארזים" רוצה לשכור משאיות וטיולים מחברת ה"מטייל" ליום אחד, עבור 200 נוסעים לכל היותר. משאית יכולה להכיל 50 נוסעים, וטיולית יכולה להכיל 20 נוסעים. חברת ה"מטייל" יכולה לספק לבי"ס "ארזים" 3 משאיות לכל היותר ו- 7 טיוליות לכל היותר. יחד עם זאת חברת ה"מטייל" מוכנה לשלוח כלי רכב רק אם מספר המקומות הכולל שבהם יהיה לפחות 100. ביה"ס, לעומת זאת, מעוניין שלא יסעו יותר מ- 200 תלמידים. x מייצג את מספר המשאיות ו- y מייצג את מספר הטיוליות.
- א. רשמו מערכת אי שוויונות לבעיה ושרטטו את התחום האפשרי. שכירת משאית ליום עולה 400 ש"ח ושכירת טיולית ליום עולה 200 ש"ח.
- ב. בתחום ששרטטתם, כולל הקויים שתוחמים אותו, נמצאות 17 נקודות ששיעוריהן מספרים שלמים. בחרו 2 נקודות, ורשמו את כל המשתמע מהן: מספר המשאיות והטיוליות, מס' הנוסעים ועלות השכירה. בסופו של דבר התברר, שיצאו לטיול 170 נוסעים.
- ג. המטרה של חברת ה"מטייל" לגבות את התשלום המקסימלי. כמה כלי רכב מכל סוג כדאי לה לשלוח, ומהו המחיר שתגבה? (נסו למצוא יותר מאפשרות אחת).
- ד. מטרת הנהלת בית הספר, לעומת זאת, לשלם מחיר מינימלי. כמה כלי רכב מכל סוג תבקש ההנהלה לשלוח, וכמה תשלם עבור שכירתם?

[סרטון תכנון לינארי -שאלות מתקדמות - יוסי ציפניצקי](#)



[מצגת תכנון לינארי - שאלות מתקדמות - יוסי ציפניצקי](#)



בעיות שלמות

עד כה פתרתם בעיות שלמות עם מספר אילוצים קטן, או בעיות אחרות, בהן היו נתונות טבלאות, ונתבקשת לבצע חלקים מפתרון הבעיה: שרטוט התחום האפשרי או רישום האי שוויונות, או מציאת הרווח המקסימלי. למשל, כשהתחום נתון וכו'.
מעתה נפתור בעיות, בהן נבצע את כל השלבים: רישום האי שוויונות. שרטוט התחום ומציאת המקסימום או המינימום.

1. יצרן מייצר שני סוגי ארונות, כמתואר בטבלה:

סוג ארונות	כמות העץ הדרושה לארון	מס' שעות עבודה לארון
מטבח	5 מ"ר לארון	10
בגדים	4 מ"ר לארון	20

כמות העץ שיש למפעל בסה"כ היא 120 מ"ר, ומספר שעות העבודה העומדות לרשותו הוא 450 לכל היותר.

- רשמו מערכת אילוצים, ושרטטו את התחום האפשרי.
 - הרווח הנקי לארון מטבח הוא 900 ש"ח, ולארון בגדים 600 ש"ח.
רשמו פונקציית מטרה לרווח המתקבל מייצור של x ארונות מטבח ו- y ארונות בגדים.
 - כמה ארונות מכל סוג על המפעל לייצר, כדי לקבל רווח מקסימלי, ומהו הרווח המקסימלי?
2. האילוצים הם כמו בשאלה הקודמת, אבל הרווח הנקי לארון מטבח הוא 500 ש"ח, ולארון בגדים 1000 ש"ח. רשמו פונקציית מטרה מתאימה.
- רשמו פתרון מתאים.
 - רשמו את כל הפתרונות המתאימים.
 - מצאו שני זוגות (x, y) , שעבורם הרווח של שני המפעלים זהה.
 - האם תוכלו למצוא רווח זהה מקסימלי עבור שני המפעלים?

פתרתם בעיות שלמות, אולם עדיין בצעתם את העבודה ב- 3 שלבים:

- רישום אי שוויונות לצורך התחום האפשרי
- רישום פונקציית המטרה
- מציאת האופטימום, כלומר: מציאת מקסימום או מינימום.

בהמשך הסעיף תלמדו לפתור בעיות ללא פרוט השלבים האלה.
תוכלו לפתור כעת את שאלות 6, 7 שבתרגילים.

3. מפעל מייצר שני סוגי סלטים: סלט ירקות וסלט חצילים.
בתהליך הייצור שני שלבים: ערבוב ובישול.
פרטי הייצור מרוכזים בטבלה הבאה:

	ערבוב	בישול
סלט ירקות	2 דקות לק"ג	4 דקות לק"ג
סלט חצילים	3 דקות לק"ג	3 דקות לק"ג

במחזור ייצור אחד ניתן להפעיל את ציוד הערבוב למשך שעתיים (120 דקות), ואת ציוד הבישול למשך 3 שעות (180 דקות).

הרווח הנקי של המפעל לק"ג סלט ירקות הוא 8 ש"ח, ולק"ג סלט חצילים - 10 ש"ח.
סמנו את הנתונים הקשורים באילוצים, ובסימון אחר הדגישו נתונים הקשורים בפונקציית המטרה.
רשמו אי שוויונות, ושרטטו את התחום האפשרי.
כמה ק"ג מכל סוג סלט כדאי למפעל לייצר, כדי לקבל רווח מקסימלי?

4. בנגריה מייצרים שולחנות וכיסאות, פרטי הייצור רשומים בטבלה:

	כמות עץ ליחידה	שעות עבודה ליחידה
כסא	0.2 מ"ק	4 ש'
שולחן	0.5 מ"ק	3 ש'

לרשות הנגריה עומדים 4 מ"ק עץ ו- 38 שעות ביום עבודה אחד.
מספר הכיסאות שמייצרים הוא לכל היותר פי 4 ממספר השולחנות.
הנגריה מרוויחה 100 ש"ח לכיסא, ומפסידה 300 ש"ח לשולחן.
כמה שולחנות וכמה כיסאות יש לייצר, כדי שהרווח הכללי יהיה מקסימלי? מהו הרווח המקסימלי?

זכרו, שלבי הפתרון הם:

הפרידו בין הנתונים.

רשמו אילוצים, שרטטו תחום אפשרי, רשמו פונקציית מטרה וענו על השאלה.

זכרו שלבים אלה גם בבואכם לפתור את הבעיות השלמות הבאות.

5. מפעל מייצר גלידת וניל וגלידת שוקולד. תהליך הייצור מתחלק לשני שלבים: בישול וקירור. לייצור ק"ג גלידת וניל זקוקים ל- 10 דקות בישול ו- 20 דקות קירור, ולייצור ק"ג גלידת שוקולד זקוקים ל- 5 דקות בישול ו- 30 דקות קירור. אפשר להפעיל את מכונת הבישול לכל היותר במשך 40 דקות, ואת מכונת הקירור - לכל היותר במשך 180 דקות. מק"ג גלידת וניל מרוויחים 80 ש"ח, ומק"ג גלידת שוקולד - 40 ש"ח. רשמו את הנתונים בטבלה.

	זמן בישול לק"ג	זמן קירור לק"ג	רווח לק"ג
גלידת וניל			
גלידת שוקולד			

- א. מהו הרווח המקסימלי, שיוכל המפעל להרוויח?
 ב. אם מרוויחים 50 ש"ח על כל ק"ג מכל סוג, מהו הרווח המקסימלי במקרה זה?
6. במפעל מייצרים שני סוגים של לחמניות: עם שומשום ובלי שומשום. ידוע כי לכל לחמניה עם שומשום דרושים 40 גר' בצק ו- 2 גר' שומשום. לכל לחמניה בלי שומשום דרושים 50 גר' בצק.

א. סדרו את הנתונים בטבלה הבאה:

	כמות הבצק הדרושה ללחמניה	כמות השומשום הדרושה ללחמניה
לחמניה עם שומשום		
לחמניה בלי שומשום		

- ב. בכל מחזור ייצור עומדים לרשות המפעל 5 ק"ג בצק ו- 160 גר' שומשום. רשמו מערכת אילוצים מתאימה לבעיה, ושרטטו את התחום האפשרי. הרווח הנקי של המפעל ללחמניה עם שומשום הוא 20 אג', וללחמניה בלי שומשום 10 אג'.
 x מייצג את מספר הלחמניות עם שומשום שמייצרים.
 y מייצג את מספר הלחמניות בלי שומשום שמייצרים.
- ג. רשמו פונקציות מטרה לרווח הנקי המתקבל $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$
- ד. כמה לחמניות מכל סוג צריך המפעל לייצר במחזור ייצור, כדי לקבל רווח מקסימלי, מהו הרווח המקסימלי?

7. ועד עובדים במפעל מעוניין להזמין לעובדיו חבילות שי, המכילות שקיות עם פירות יבשים וחפיסות שוקולד.

הוחלט כי כל חבילת שי תכיל לכל היותר 8 פריטים, משקלה יהיה לפחות 1000 גר', ונפחה לפחות 2000 סמ"ק.

המשקל והנפח של שקית פירות יבשים ושל חפיסת שוקולד רשומים בטבלה הבאה:

נפח	משקל	
500 סמ"ק	100 גר'	שקית פירות יבשים
100 סמ"ק	200 גר'	חפיסת שוקולד

מחיר שקית עם פירות יבשים 4 ש"ח, ומחיר חפיסת שוקולד 2 ש"ח.

א. כמה שקיות של פירות יבשים וכמה חפיסות שוקולד כדאי למוכר לשים בכל חבילת שי כדי לגבות מחיר מקסימלי?

ב. המטרה של ועד העובדים לשלם מחיר מינימלי.

כמה שקיות פירות יבשים וכמה חפיסות שוקולד כדאי לו להזמין בכל חבילת שי?

שאלות נוספות לתרגול וחזרה.

8. לרשותו של חקלאי עומדים מקסימום 80 דונם, המתחלקים על פני שני סוגי גידולים (x דונם גידולי עגבניות ו- y דונם פלפלים).

א. רשמו אי שוויון מתאים.

גידול עגבניות דורש 4 ימי עבודה לדונם, וגידול פלפלים - יומיים לדונם.

ב. רשמו פונקציית מטרה למספר הימים הנדרשים ל- x דונם גידולי עגבניות ו- y דונם גידולי פלפלים. ידוע שסך-הכל ימי העבודה לחודש, שניתן להשקיע בגידולים אלה, הוא מקסימום 200 ימים. ההכנסה לדונם גידולי עגבניות היא 1000 ש"ח, ולדונם גידולי פלפל 2000 ש"ח.

ג. כמה דונם כדאי לחקלאי להקצות לכל סוג גידול, כדי שהכנסתו תהיה מקסימלית? נמקו.

ד. אם ידוע שההכנסה לדונם עגבניות היא 1000 ש"ח, ולדונם פלפל 500 ש"ח, כיצד ישתנה הרווח המקסימלי? כמה פתרונות לבעיה? נמקו.

9. בתהליך כימי מפיקים מק"ג חומר גלם 3 חומרים שונים, בשני מפעלים שונים. להלן נתוני ההפקה.

	חומר A	חומר B	חומר C
מפעל א'	4 מ"ג	3 מ"ג	2 מ"ג
מפעל ב'	1 מ"ג	2 מ"ג	5 מ"ג

מסיבות שונות, מפיקים לפחות 140 מ"ג מחומר A, לפחות 180 מ"ג מחומר B, ולפחות 230 מ"ג מחומר C.

- סמנו ב- x את משקל חומר הגלם במפעל א', וב- y את משקל חומר הגלם במפעל ב'.
 הוצאות ההפקה הן 300 ש"ח לק"ג במפעל א' ו- 200 ש"ח לק"ג במפעל ב'.
 - כמה ק"ג חומר גלם כדאי לרכוש מכל מפעל, כדי שיהיו הוצאות מינימליות?
 - מהן ההוצאות המינימליות?

שאלת אתגר

10. מבחן אמריקאי בנוי משלושה חלקים.
 על הנבחן לענות לכל היותר על 10 שאלות מחלק א', 8 שאלות מחלק ב',
ולפחות על 5 שאלות מחלק ג'.
 בסה"כ צריך הנבחן לענות על 15 שאלות
 לרשות הנבחן לכל היותר 44 דקות לפתרון 15 השאלות, כאשר יש להקדיש 3 דקות לכל שאלה בחלק א', 4 דקות לשאלה בחלק ב', ו- 2 דקות לשאלה בחלק ג'.
 א. סמנו ב- x את מספר השאלות שפתר התלמיד בחלק א', ב- y את מספר השאלות שפתר בחלק ב'.
 רשמו אי שוויונות מתאימים.
 לכל שאלה מחלק א' מעניקים 6 נקודות, לכל שאלה מחלק ב' מעניקים 5 נקודות, ולכל שאלה מחלק ג' מעניקים 4 נקודות.
 רשמו פונקציית מטרה לסך כל הנקודות שמקבל תלמיד.
 ב. כמה שאלות מכל פרק על התלמיד לפתור, כדי לקבל מספר נקודות מקסימלי, ומהו מספר הנקודות המקסימלי?
 ג. אם מעניקים 5 נקודות לשאלה מחלק א', 5 נקודות לכל שאלה מחלק ב' ו- 4 נקודות לכל שאלה מחלק ג', כמה שאלות כדאי לפתור מכל פרק, כדי לקבל ניקוד מקסימלי? כמה פתרונות לשאלה? רשמו אותם והסבירו.

מבחר פתרונות

עמ' 7 - 8	תרגיל 1:	הרווח המקסימלי בנקודה (40, 0)
עמ' 9 - 16	תרגיל 11:	משלוחים אפשריים: (2, 3), (1, 2), (1.5, 2.1)
עמ' 17 - 20	תרגיל 6:	$x + y \leq 150$
עמ' 29 - 36	תרגיל 5:	$y \leq x + 2$
		$2x + y \leq 5$
	תרגיל 6:	תשובה אפשרית: $y = 2$
	תרגיל 8:	$y \leq 3$
		$y \geq -3x$
		$y \geq 3x$
	תרגיל 13:	הנקודות המתארות משלוח של 20 טון ברזל נמצאות צלע המחברת את הקדקוד (20, 0) עם הקדקוד (10, 10)
עמ' 37 - 39	תרגיל 5ב':	(-3, 3), (0, 2), (0, -3). נקודת החיתוך: (-3, 3)
עמ' 40 - 43	תרגיל 1ב':	$5x + 5y \leq 1000$
	תרגיל 2ד':	$x + y \leq 30$
		$x \leq 20$
עמ' 44 - 47	תרגיל 2א':	$f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$
	תרגיל 2ה':	(100, 40), (40, 160)
	תרגיל 4ג':	לדוגמה: $x = 9, y = 0$
	תרגיל 16ז':	1300 לא מתקבל.
	תרגיל 8ד':	הערך הגבוה ביותר מתקבל ב-A
עמ' 48 - 52	תרגיל 1א':	15
	תרגיל 1ב':	21
	תרגיל 1ד':	בנקודה C
	תרגיל 1ה':	39
	תרגיל 2ב':	390
	תרגיל 3ג':	390, מתקבל בנקודה A
	תרגיל 7ג':	150
עמ' 53 - 55	תרגיל 2:	מקסימום בנקודה (200, 100)

עמ' 56 - 58	תרגיל 1:	104 ש"ח
	תרגיל 4:	1150 ש"ח
	תרגיל 6ב'	מקסימום בנקודה (0, 1400).
עמ' 59 - 65	תרגיל 3:	מקסימום בנקודה $(6\frac{6}{11}, 7\frac{5}{13})$
עמ' 66 - 68	תרגיל 1:	מינימום בנקודה (0, 50). אין מקסימום
	תרגיל 2:	מינימום בנקודה (0,0). אין מקסימום
	תרגיל 4ג:	$5x+7y$, מינימום בנקודה (4,5)
	תרגיל 6:	$\begin{aligned} x+y &\geq 5 \\ y &\geq \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2} \\ y &\leq 2x+2 \end{aligned}$ ב. $y \leq -x - 1$ $y \geq x + 1$
	תרגיל 8:	מינימום בנקודה (6, -3), מקסימום בנקודה $(2, 4\frac{1}{2})$
עמ' 69 - 70	תרגיל 2:	(5, 7).
	תרגיל 3:	$\begin{aligned} 50x + 20y &\leq 200 \\ 0 &\leq x \leq 3 \\ 0 &\leq y \leq 7 \\ 50x + 20y &\geq 100 \end{aligned}$
עמ' 71 - 75		
	תרגיל 1:	מקסימום בנקודה (24, 0).
	תרגיל 3:	בנקודה (30, 20) - רווח מקסימלי של 440 ש"ח.
	תרגיל 3ג':	ב- (0, 160) רווח של 600 ש"ח.
	תרגיל 4:	200 ש"ח
	תרגיל 5:	א.: (0, 6) ב.: $(1\frac{1}{2}, 5)$
	תרגיל 6:	(18, 10)
	תרגיל 8:	מקסימום (6, 2), מינימום (4, 0).
	תרגיל 9:	מקסימום בנקודה (0, 80) והוא 160,000 ש"ח.
	תרגיל 10:	במקרה השני לאורך כל הצלע של התחום. מינימום 18,000 ש"ח.

אוסף שאלות לדוגמא מתוך אשכול כלכלי פיננסי -תכנון לינארי תכ"ל חדשה במתמטיקה

שאלה 1

בנגריה מייצרים שני סוגים של שולחנות: שולחנות כתיבה ושולחנות אוכל.

ידוע, שביום אחד יכול המפעל לייצר לכל היותר 50 שולחנות.

הרווח הנקי של הנגרייה לכל שולחן כתיבה הוא 50 שקלים

והרווח לכל שולחן אוכל הוא 40 שקלים.

א. שרטטו את תחום הפתרונות האפשרי למערכת האילוצים של השאלה.

ב. באחד הימים, לאחר שסיימו לייצר 20 שולחנות כתיבה, ניסה מנהל העבודה

לחשב כמה שולחנות כתיבה יהיה עליו לייצר במטרה להרוויח 2,600 ש"ח ביום

זה.

לאיזו מסקנה הגיע מנהל העבודה?

ג. סמנו על הגרף את הנקודה (20,10). האם הנקודה נמצאת בתוך התחום

האפשרי או מחוץ לו? מה המשמעות של התשובה בהקשר לתוכן השאלה?

ד. כמה שולחנות מכל סוג על הנגרייה לייצר ביום, כדי שהרווח היומי של הנגרייה

יהיה מקסימלי?

פעילות בדסמוס -שאלה 1- מתוך שאלות תכ"ל חדשה - מפמ"ר מתמטיקה



שאלה 2

במפעל העובדים מתחלקים לשני סוגים: בעלי תואר אקדמי, חסרי תואר אקדמי. משכורתו החודשית (ברוטו) של בעל תואר היא 20,000 שקלים ומשכורתו החודשית (ברוטו) של חסר תואר היא 14,000 שקלים.

המפעל יכול להעסיק לכל היותר 30 עובדים משני הסוגים יחד. התקציב למשכורות החודשיות של המפעל הוא לכל היותר 480,000 שקלים. ההכנסה החודשית של המפעל מעבודתו של כל בעל תואר היא 7,000 שקלים וההכנסה החודשית מעבודתו של כל חסר תואר היא 5,500 שקלים.

א. כמה עובדים מכל סוג כדאי לבעל המפעל להעסיק, כדי שההכנסה החודשית הכוללת תהיה מקסימלית?

ב. מהי ההכנסה החודשית המקסימלית הכוללת של המפעל?

ג. באחד החודשים, אחד מבעלי התואר האקדמי היה חולה, ובנו, חסר התואר האקדמאי, החליף אותו.

1. האם המצב החדש תואם למערכת האילוצים? נמקו.

2. האם ההחלפה הייתה משתלמת מנקודת המבט של בעל המפעל? נמקו.

שאלה 3

מפעל גדול מייצר שני סוגים של שוקולד: "שוקולד חלב" ו"שוקולד מריר".

הכנת השוקולדים נעשית באמצעות שתי מכונות.

מכונה א - מייצרת את התערובת ממנה עשויים השוקולדים.

מכונה ב - יוצקת את השוקולד בטבליות ואורזת בנייר.

לפניכם נתוני הזמן הדרוש לכל אחת משתי המכונות להכנת 1 ק"ג שוקולד:

- מכונה א מייצרת תערובת ל 1 ק"ג שוקולד חלב ב 15 דקות ותערובת ל 1 ק"ג שוקולד מריר בחצי שעה.

- מכונה ב יוצקת ואורזת 1 ק"ג שוקולד חלב ב 25 דקות ו 1 ק"ג שוקולד מריר ב 20 דקות.

מכונה א יכולה לעבוד ברציפות 2 שעות לכל היותר

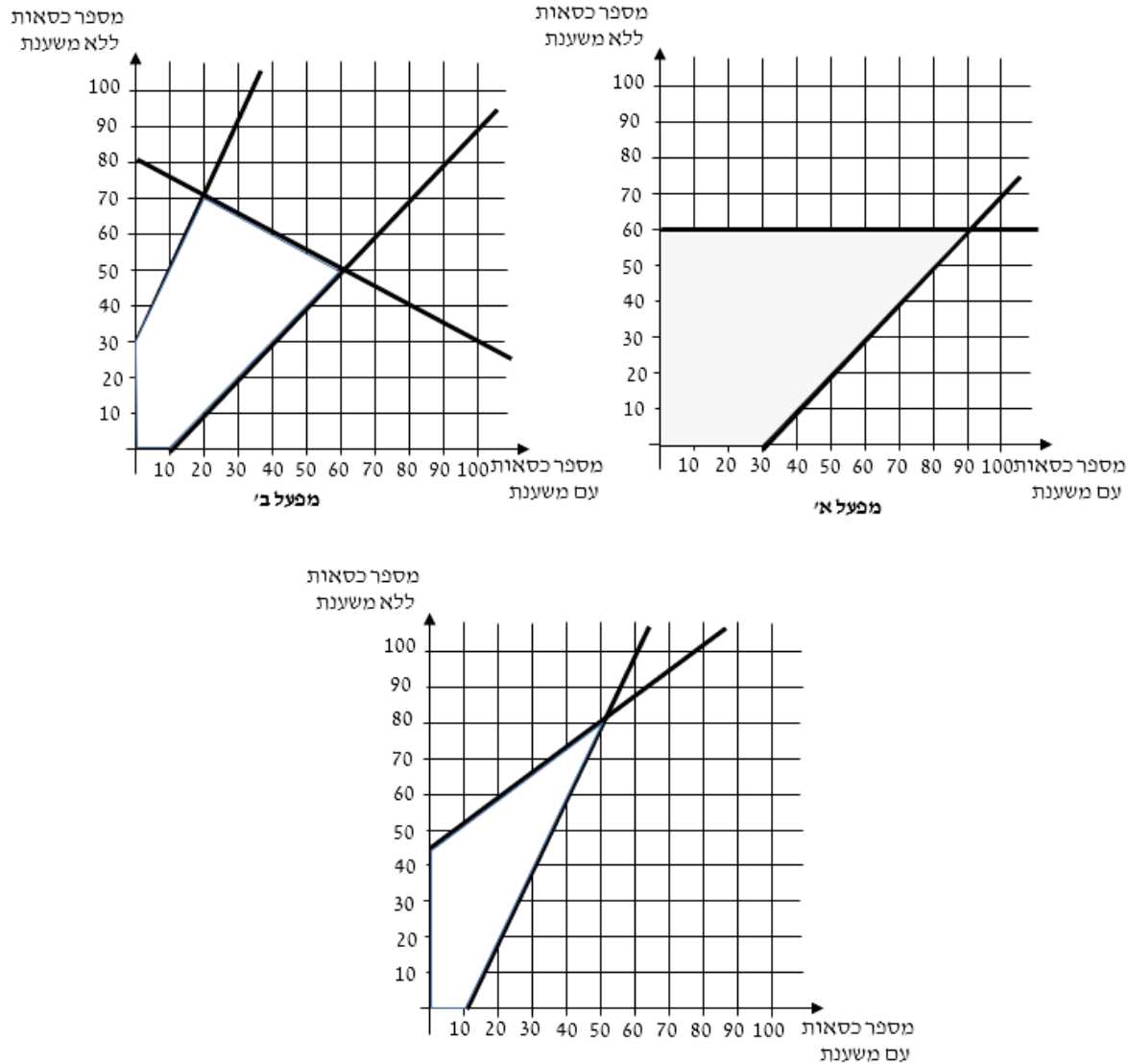
מכונה ב יכולה לעבוד ברציפות 3 שעות לכל היותר.

הרווח של המפעל לכל 1 ק"ג שוקולד חלב הוא 10 שקלים והרווח לכל 1 ק"ג שוקולד מריר הוא 12 שקלים.

מהי כמות השוקולד (ביחידות ק"ג) מכל סוג שכדאי למפעל לייצר ביום כדי שהרווח של המפעל ביום יהיה מקסימלי?

שאלה 4

מפעל מייצר שני סוגי כסאות: כסאות עם משענת וכסאות ללא משענת.
המפעל מייצר את הכיסאות בשלושה מפעלי משנה. לפניכם האילוצים של כל אחד מן המפעלים:



- הרווח עבור כיסא עם משענת הוא 40 ₪ ועבור כיסא ללא משענת הוא 25 ₪.
- באיזו המפעלים יש לבחור כדי שהרווח שלו יהיה מקסימלי?
 - כמה כסאות עם משענת וכמה כסאות ללא משענת יש לייצר כדי להגיע לרווח המקסימלי?

שאלה 5

יניב החליט להשקיע סכום של 10,000 שקלים בשלושה סוגי חסכונות לתקופת חיסכון מסוימת.

לאחר שעשה את החשבון המתאים גילה שבתום תקופת החיסכון:

- בתכנית א ירוויח 48 אגורות לכל שקל שישקיע.
 - בתכנית ב ירוויח 28 אגורות לכל שקל שישקיע.
 - בתכנית ג ירוויח 41 אגורות לכל שקל שישקיע.
- בהמלצת רואה החשבון שלו, החליט יניב לשמור על האילוצים הבאים:
- בתכנית א ישקיע לפחות 2,000 שקלים.
 - בתכנית ג להשקיע לפחות כמו בתכנית א.
 - ההשקעה בתכנית ב תהיה גדולה מההשקעה בתכנית ג או שווה לה.

סמנו: x - סכום הכסף (בשקלים) שישקיע יניב בתכנית א.

y - סכום הכסף (בשקלים) שישקיע יניב בתכנית ב.

כיצד על יניב לחלק את ההשקעות בין התכניות, בהתאם לאילוצים, כך שיגיע לרווח מקסימלי בתום תקופת החיסכון? מהו הרווח המקסימלי?

שאלה 6

במחלקת כסאות של מפעל רהיטים מייצרים שני סוגי כסאות: כסאות לפנים הבית וכסאות גינה. בכל הכיסאות המושבים והמשענות עשויים מעץ (אותו סוג עץ) והרגליים מאלומיניום.

לייצור כיסא-בית משתמשים ב- 0.18 מ"ר עץ וב- 2.5 ק"ג אלומיניום,

ולייצור כיסא-גינה משתמשים ב- 0.14 מ"ר עץ וב- 2 ק"ג אלומיניום.

המחיר שמשלם המפעל עבור 1 מ"ר עץ הוא 50 שקלים והמחיר ל-1 ק"ג אלומיניום הוא 6 שקלים.

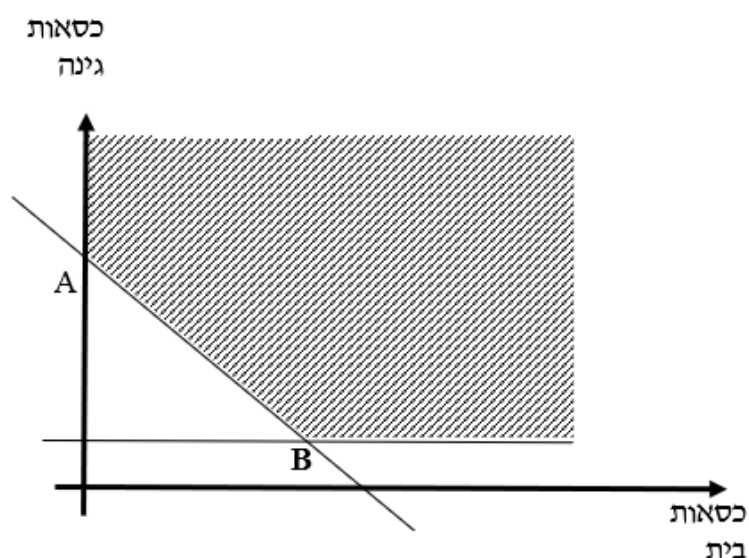
א. חשבו את מחיר עלות החומרים לייצור כיסא אחד לבית ומחיר עלות החומרים לייצור כיסא אחד לגינה.

למפעל הגיעה הזמנה עם דרישה שיהיו

לפחות 500 כסאות ומתוכם, מספר

הכיסאות לגינה יהיה גדול מ-120.

שטח הצבוע מתאר את אילוצי ההזמנה:



ב. חשבו את שיעורי הנקודות A ו-B והסבירו את המשמעות של כל נקודה בהקשר לשאלה.

ג. סמנו בסרטוט נקודה המתארת ייצור של 500 כסאות-בית ו-120 כסאות גינה. האם הנקודה שסימנתם מתאימה לאילוצי השאלה? נמקו.

ד. סמנו בסרטוט נקודה המתארת ייצור של 100 כסאות-בית ו-300 כסאות-גינה. האם נקודה זו מתאימה לאילוצי השאלה? נמקו.

ה. היכן, בסרטוט, נמצאות כל הנקודות שמתארות ייצור של כסאות-גינה בלבד?

ו. מה צריך להיות מספר הכיסאות שעל המפעל לייצר כך שעלות החומרים תהיה מינימלית?

מצגת עם הסבר מפורט לשאלה 6-דוגמאות מתוכנית לימודים חדשה

שאלה 7

(שילוב של תחום פתוח - בחלק א, ותחום סגור - בחלק ב)

במסגרת טיפול רפואי, הומלצה למטופל דיאטה מיוחדת שמכילה רק שני סוגי מזון. פירוט התכולה של יחידת מזון מכל סוג:

סוג	פחמימות	חלבונים	סיבים תזונתיים
יחידת מזון מסוג א	50 גרם	40 גרם	25 גרם
יחידת מזון מסוג ב	40 גרם	16 גרם	5 גרם

לפי הוראות הרופא, המטופל חייב לאכול ביום לפחות 800 גרם פחמימות, לפחות 480 גרם חלבונים ולפחות 200 גרם סיבים תזונתיים.

תנאי נוסף שהציב הרופא הוא שהמטופל חייב באכילת שני סוגי המזון.

סמנו: x – מספר יחידות המזון מסוג א שהמטופל צריך לאכול.

y – מספר יחידות המזון מסוג ב שהמטופל צריך לאכול.

חלק א

א. האם, בהתאם להוראות הרופא, המטופל רשאי לאכול ביום 20 יחידות מזון מסוג א ו-0 גרם מזון מסוג ב?

ב. האם, בהתאם להוראות הרופא, המטופל רשאי לאכול ביום 10 יחידות מזון מסוג א ו-20 גרם יחידות מזון מסוג ב?

ג. באחד הימים, המטופל אכל 6 יחידות מזון מסוג א ו-15 יחידות מזון מסוג ב. האם המטופל מילא באותו יום אחרי הוראות הרופא? נמקו.

ד. ביום אחר, המטופל אכל 6 יחידות מזון מסוג א ו-10 יחידות מזון מסוג ב. האם המטופל מילא באותו יום אחרי הוראות הרופא? אם כן, נמקו. אם לא, אילו מהוראות הרופא לא מולאו?

ה. מהו המספר המינימלי של יחידות מזון מכל סוג שעל המטופל לאכול ביום בהתאם להוראות הרופא?

הרופא

חלק ב



ו. לאחר תקופה של הקפדה על הדיאטה הנ"ל, הבחין המטופל שהוא עולה במשקל, ובכך אינו מעוניין. כדי למנוע השמנה, הקפיד המטופל לצרוך לכל היותר 1,300 גרם פחמימות. (תוך שמירה על הוראות הרופא הנ"ל)

מהו המספר המקסימלי של יחידות המזון מכל סוג שעל החולה לאכול ביום כדי לעמוד בכל התנאים?

שאלה 8

ועד העובדים מעוניין להזמין ממפעל מזון חבילות שי המכילות שקיות חטיפים וחפיסות שוקולד. הוועד החליט שכל חבילה תכיל לכל היותר 20 פריטים. משקלה של כל חבילה יהיה לפחות 3,000 גרם, ונפחה לפחות 4,800 סמ"ק. המשקל, הנפח והמחיר של חטיפים ושוקולד רשומים בטבלה שלפניכם:

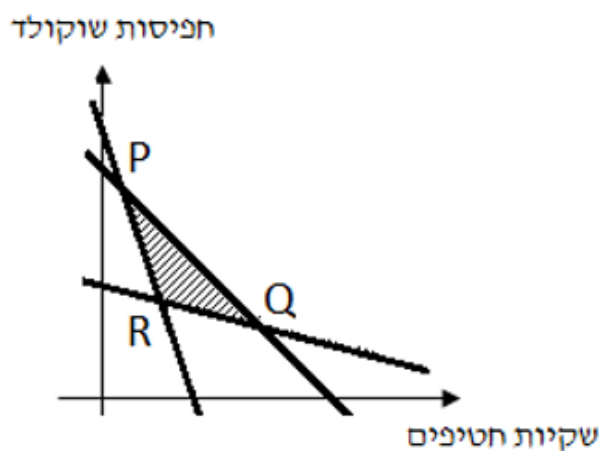
משקל	נפח	מחיר	
שקית חטיפים	100 גרם	600 סמ"ק	m ₪
חפיסת שוקולד	300 גרם	150 סמ"ק	n ₪

נסמן: x - מספר שקיות החטיפים בכל חבילת שי

y - את מספר חפיסות השוקולד בכל חבילת שי.

א. רשמו את מערכת האילוצים של המצב המתואר בשאלה.

ב. הגרף הבא מתאר את מערכת האילוצים הנ"ל. מצאו את השיעורים של הנקודות P, Q ו-R.



ג. רשמו, באמצעות הפרמטרים m , n את הפונקציה שמתארת את המחיר של חבילת שי (פונקציית המטרה).

ד. ידוע כי:

- הערך המקסימלי של פונקציית המטרה הוא 180 ₪ והוא מתקבל בנקודה Q.
 - הערך המינימלי של פונקציית המטרה הוא 108 ₪ והוא מתקבל בנקודה R.
- מצאו את המחירים של שקית חטיפים ושל חפיסת השוקולד.

שאלה 9

במפעל פועלות שלוש מכונות D1, D2 ו-D3 המשמשות להכנת שני סוגים של מוצרים (א ו-ב). בטבלה הבאה מפורטות:

- השעות הדרושות לכל מכונה לייצור פריט אחד מכל סוג של מוצר.
- המספר המקסימלי של השעות העומדות לרשות המפעל במחזור ייצור אחד.
- הרווח הנקי שמקבל המפעל ממכירת פריט אחד מכל סוג.

	D3	D2	D1	
מוצר מסוג א	1 שעה	4 שעות	1 שעה	90 ₪
מוצר מסוג ב	3 שעות	2 שעות	1 שעה	k ₪
מספר מקסימלי של שעות במחזור אחד	30 שעות	40 שעות	12 שעות	

נסמן:

x - מוצר מסוג א'.

y - מוצר מסוג ב'.

א. רשמו את מערכת האילוצים של השאלה.

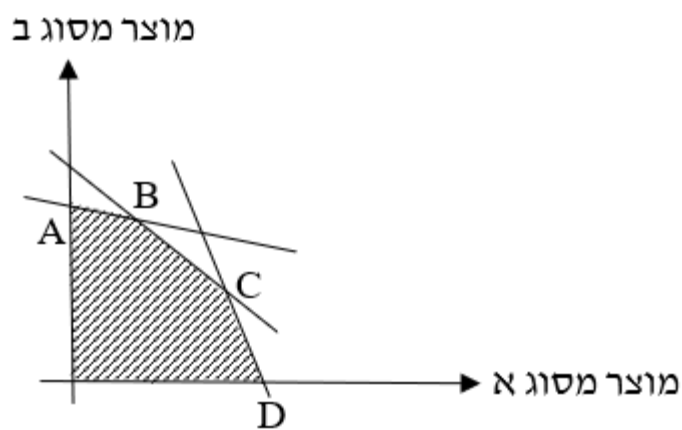
ב. הגרף הבא מתאר את מערכת האילוצים הנ"ל.

מצאו את השיעורים של הנקודות A, B, C, D.

ידוע שבשתי הנקודות B ו-C מתקבל אותו רווח, שהוא הרווח המקסימלי.
מצאו את הרווח שהמפעל מקבל ממכירת המוצר מסוג ב'.

שאלות נוספות לתרגול מתוך מבחני בגרות

שאלה 1 - בגרות



למפעל נחושת יש שני מכרות: מכרה I ומכרה II .

בכל אחד מן המכרות אפשר להפיק שלושה סוגי עפרות:

מכרה I יכול להפיק ביום עבודה 6 טונות עפרה א', 2 טונות עפרה ב' ו- 4 טונות עפרה ג'.

מכרה II יכול להפיק ביום עבודה 2 טונות עפרה א', 2 טונות עפרה ב' ו- 12 טונות עפרה ג'.

המפעל התחייב לספק לפחות 120 טונות של עפרה א', לפחות 80 טונות של עפרה ב', ולפחות 240 טונות של עפרה ג' .

ההוצאות באלפי שקלים עבור הפעלת המכרות במשך יום עבודה אחד הן 120 למכרה I ו- 160 למכרה II .

המפעל מעוניין לספק את הסחורה בהוצאות מינימליות.

הוצאות ההפעלה היו מינימליות כאשר הפעילו את מכרה I 30 יום, ואת מכרה II הפעילו 10 ימים.

א. רשום את מערכת האילוצים של הבעיה.

ב. חשב את ההוצאה המינימלית של המפעל.

פעילות בדסמוס- שאלה 1 - מתוך מבחני בגרות



תשובה לשאלה 1:

- א. נסמן ב- x את כמות העפרה (טונות) במיוצרות במכרה I.
 וב- y את כמות העפרה (טונות) במיוצרות במכרה II.
 נבנה טבלה מתאימה, כולל טור מתאים לפונקציית המטרה.

הוצאות (שקלים)	עפרה ג' (טונות)	עפרה ב' (טונות)	עפרה א' (טונות)	
120	4	2	6	x - מכרה I
160	12	2	2	y - מכרה II
	240	80	120	מינימום אפשרי

נרשום את מערכת האילוצים, הנובעת הן מהמגבלות שהוצגו בטבלה והן מהעובדה שכמות העפרה המיוצרת, מכל סוג, אינה שלילית.

$$\begin{aligned}x &\geq 0 \\y &\geq 0 \\6x + 2y &\geq 20 \\2x + 2y &\geq 80 \\4x + 12y &\geq 240\end{aligned}$$

- ב. ההוצאות באלפי שקלים עבור הפעלת המכרות במשך יום אחד הן 120 למכרה I ו-160 למכרה II.

בהתאם, פונקציית המטרה היא: $f(x, y) = 120x + 160y$.

הוצאות ההפעלה היו מינימליות כאשר הפעילו את מכרה I 30 יום ומכרה II הפעילו 10 ימים.

נציב $x = 30$, $y = 10$ בפונקציית המטרה ונמצא את ההוצאה המינימלית:

$$f(30, 10) = 120 \cdot 30 + 160 \cdot 10 = 5,200$$

לכן, ההוצאה המינימלית היא 5,200 אלפי שקלים.

שאלה 2 - בגרות תשס"ו חורף (חורף 2006)

מכון הרזיה ממליץ על דיאטה הכוללת רק עוף וסלט ירקות. בטבלה שלפניך נתונים מספר הקלוריות, כמויות הוויטמינים, והמחיר למנת עוף ולמנת סלט.

מספר הקלוריות	מיליגרם ויטמין I	מיליגרם ויטמין II	מחיר המנה בשקלים
120	3	3	6
30	1	6	4

לפי תנאי הדיאטה של מכון ההרזיה, יש לצרוך בכל יום לכל היותר 1500 קלוריות,

לפחות 13 מיליגרם ויטמין I ולפחות 33 מיליגרם ויטמין II .

אדם צריך לעמוד בתנאי הדיאטה במחיר מינימלי.

א. רשום את מערכת האילוצים של הבעיה.

ב. רשום את פונקציית המטרה.

ג. כמה מנות עוף וכמה מנות סלט ירקות על אדם לאכול על מנת לעמוד בתנאי

הדיאטה במחיר מינימלי?

ד. מהו מחיר מינימלי?

[פעילות בדסמוס- שאלה 2- מבחן בגרות](#)



שאלה 3 - בגרות קיץ תשס"ו מועד ב' (קיץ 2006 מועד ב')

לרשות נגרייה 3 מ"ק עץ, 21 מ"ר דיקט ו- 104 ימי עבודת פועל.

לייצור ארון מטבח דרושים 0.2 מ"ק עץ, 1 מ"ר דיקט ו- 12 ימי עבודת פועל.

לייצור ארון בגדים דרושים 0.4 מ"ק עץ, 3 מ"ר דיקט ו- 5 ימי עבודת פועל.

הרווח ממכירת ארון מטבח הוא 1000 שקל,

והרווח ממכירת ארון בגדים הוא 1500 שקל.

א. סמן ב- x את מספר ארונות המטבח וב- y את מספר ארונות הבגדים,

וכתוב את מערכת האילוצים, ואת פונקציית המטרה של הבעיה.

ב. בסרטוט התחום האפשרי של הבעיה התקבלו ארבעה קדקודים:

$$A(0, 7) \quad B(3, 6) \quad C(7, 4) \quad D(8\frac{2}{3}, 0)$$

כמה ארונות מטבח וכמה ארונות בגדים הנגרייה צריכה לייצר, כדי שרווחיה יהיו

מקסימליים? פרט את חישוביך.

פתרון לשאלה 3:

א. נסמן ב- x את מספר ארונות המטבח, וב- y את מספר ארונות הבגדים.

נבנה טבלה מתאימה, כולל טור מתאים לפונקצית המטרה.

רווח שקלים	ימי עבודה פועל	דיקט (מ"ר)	עץ (מ"ק)	
1000	12	1	0.2	x - ארונות מטבח
1500	5	3	0.4	y - ארונות בגדים
	104	21	3	מקסימום אפשרי

נרשום את מערכת האילוצים, הנובעת הן מהמגבלות שהוצגו בטבלה

והן מהעובדה שכמות הארונות המיוצרים, מכל סוג, אינה שלילית.

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$0.2x + 0.4y \leq 3$$

$$x + 3y \leq 21$$

$$12x + 5y \leq 104$$

פונקצית המטרה היא: $f(x, y) = 1000x + 1500y$

ב. בסרטוט התחום האפשרי של הבעיה התקבלו ארבעה קדקודים:

$$A(0, 7) \quad B(3, 6) \quad C(7, 4) \quad D(8\frac{2}{3}, 0)$$

נציב שיעורי קדקודי אלה בפונקצית המטרה ונחפש ערך מקסימלי:

קדקוד	$f(x, y) = 1000x + 1500y$	ערך
$A(0, 7)$	$f(0, 7) = 1000 \cdot 0 + 1500 \cdot 7$	10,500
$B(3, 6)$	$f(3, 6) = 1000 \cdot 3 + 1500 \cdot 6$	12,000
$C(7, 4)$	$f(7, 4) = 1000 \cdot 7 + 1500 \cdot 4$	13,000
$D(8\frac{2}{3}, 0)$	$f(8\frac{2}{3}, 0) = 1000 \cdot 8\frac{2}{3} + 1500 \cdot 0$	$8,666\frac{2}{3}$

לכן, הרווח המקסימלי יהיה 13,000 בנקודה $C(7, 4)$

תשובה: 7 ארונות מטבח ו- 4 ארונות בגדים

שאלה 4 - בגרות חורף תשס"ז (חורף 2007)

אדם שעושה דיאטה צריך לשתות בכל יום לפחות 80 מיליליטר מחומר B , ולפחות 36 מיליליטר מחומר C . חומרים אלה נמצאים במיץ עגבניות ובמיץ ענבים, אבל במיצים אלה יש גם חומר D , העלול להזיק לדיאטה, ואסור לשתות ממנו יותר מ- 60 מיליליטר ליום. בטבלה שלפניך נתונות במיליליטרים הכמויות של החומרים B , C , ו- D בכוס מיץ עגבניות ובכוס מיץ ענבים.

	D	C	B
כוס מיץ עגבניות	5	2	20
כוס מיץ ענבים	5	6	4

- כוס מיץ עגבניות עולה 10 אגורות. כוס מיץ ענבים עולה 50 אגורות.
- א. כתוב את מערכת האילוצים של הבעיה.
- ב. אדם שעושה את הדיאטה שתי ביום ראשון 9 כוסות מיץ עגבניות ו- 3 כוסות מיץ ענבים. ביום שני הוא שתי 4 כוסות מיץ עגבניות ו- 6 כוסות מיץ ענבים. באיזה יום, יום ראשון או יום שני, ההוצאה שלו עבור הדיאטה הייתה קטנה יותר?

תשובה לשאלה 4:

א. נעדכן את הטבלה, בהתאם לסיפור המעשה.

נסמן: x מספר כוסות מיץ עגבניות, y מספר כוסות מיץ ענבים

D	C	B	
5	2	20	x כוסות מיץ עגבניות
4	6	5	y כוסות מיץ ענבים
לא יותר מ 60	לפחות 36	לפחות 80	אילוץ

מערכת האילוצים הנתונה היא:

$$20x + 4y \geq 80$$

$$2x + 6y \geq 36$$

$$5x + 5y \leq 60$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

ב. נבנה טבלה שתסייע במענה לשאלה – מתי הוצאה קטנה יותר

כאשר פונקצית המטרה היא: $f(x, y) = 10x + 50y$

כאשר $G(9, 3)$ מתאר את הצריכה ביום ראשון

ו- $H(4, 6)$ מתאר את הצריכה ביום שני

	$f(x, y) = 10x + 50y$
$G(9, 3)$	$f(9, 3) = 10 \cdot 9 + 50 \cdot 3 = 240$
$H(4, 6)$	$f(4, 6) = 10 \cdot 4 + 50 \cdot 6 = 340$

ההוצאה ביום ראשון הייתה 240 אגורות

ההוצאה ביום שני הייתה 340 אגורות

תשובה: ההוצאה עבור הדיאטה הייתה קטנה יותר ביום ראשון.

שאלה 5 - בגרות קיץ תשס"ז (קיץ 2007)

מכון הרזיה ממליץ לאדם מבוגר לאכול רק עוף וסלט ירקות. בטבלה שלפניך מפורטים לכל מנת עוף ומנת סלט מספר הקלוריות, כמויות הוויטמינים, והמחיר.

מספר הקלוריות	מיליגרם ויטמין I	מיליגרם ויטמין II	מחיר המנה בשקלים
מנת עוף	120	3	15
מנת סלט ירקות	30	1	5

לפי תנאי הדיאטה של מכון ההרזיה, אדם מבוגר צריך לקבל ביום אחד

לכל היותר 900 קלוריות, לפחות 13 מיליגרם ויטמין I ,

ולפחות 33 מיליגרם ויטמין II .

אדם רוצה לעמוד בתנאי הדיאטה במחיר מינימלי.

א. רשום את מערכת האילוצים של הבעיה.

ב. רשום את פונקציית המטרה.

ג. אדם אוכל בכל יום 3 מנות עוף ו- 4 מנות סלט.

כמה האדם משלם ליום עבור הדיאטה?

פתרון לשאלה 5:

מספר קלוריות	מיליגרם ויטמין I	מיליגרם ויטמין II	מחיר מנה בשקלים
מנת עוף	120	3	15
מנת סלט ירקות	30	1	5

$$\geq 33$$

$$\geq 13$$

$$\leq 900$$

רישום אילוצים

$$120x + 30y \leq 900$$

$$3x + 1y \geq 13$$

$$3x + 6y \geq 33$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

ב.

$$f(x, y) = 15x + 5y$$

ג.

$$f(3, 4) = 15(3) + 5(4) = 65 \text{ ש"ח}$$

שאלה 6 - בגרות חורף תשס"ח (חורף 2008)

ועד עובדים מעוניין להזמין ממפעל מזון חבילות שי, המכילות רק שקיות ציפס וחפיסות שוקולד.

הוועד החליט כי כל חבילה תכיל לכל היותר 20 פריטים,

משקלה יהיה לפחות 3000 גרם, ונפחה יהיה לפחות 4800 סמ"ק.

המשקל, הנפח והמחיר של שקית ציפס ושל חפיסת שוקולד רשומים בטבלה שלפניך:

משקל	נפח	מחיר	
שקית ציפס	100 גרם	600 סמ"ק	2 שקלים
חפיסת שוקולד	300 גרם	150 סמ"ק	3 שקלים

נסמן ב- x את מספר שקיות הציפס וב- y את מספר חפיסות השוקולד.

א. רשום את מערכת האילוצים של הבעיה.

התחום האפשרי של הבעיה הוא תחום סגור, שקדקודיו הם: $(4, 16)$, $(6, 8)$, $(15, 5)$.

ב. כמה שקיות ציפס וכמה חפיסות שוקולד צריך להכניס לכל חבילת שי כדי שמחירה

יהיה מינימלי, במקרה שהוועד קובע את הרכב החבילות?

ג. כמה שקיות ציפס וכמה חפיסות שוקולד צריך להכניס לכל חבילת שי כדי שמחירה

יהיה מקסימלי, במקרה שהמפעל קובע את הרכב החבילות?

תשובה לשאלה 6:

משקל	נפח	מחיר	
x : שקיות ציפס	100	600	2
y : חפיסת שוקולד	300	150	3
$20 \leq$	≥ 3000	≥ 4800	

א.

$$100x + 300y \geq 3000$$

$$600x + 150y \geq 4800$$

$$x + y \leq 20$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

ב. $f(x, y) = 2x + 3y$, נציב קודקודים בפונקציית מטרה.

$$f(15, 5) = 2(15) + 3(5) = 45$$

$$= 2(6) + 3(8) = 36$$

$$= 2(4) + 3(16) = 56$$

6 שקיות ציפס ו-8 חפיסות שוקולד במחיר 36 ₪.

ג. המפעל רוצה מקסימום רווח.

4 שקיות ציפס ו-16 חפיסות שוקולד במחיר 56 ₪.

פתרון מלא לשאלה 6

א. נעדכן את הטבלה, בהתאם לסיפור המעשה.

נסמן: x מספר שקיות צ'יפס, y מספר חפיסות שוקולד

משקל	נפח	מחיר	
x - שקיות צ'יפס	$100x$ גרם	$600x$ סמ"ק	
y - חפיסות שוקולד	$300y$ גרם	$150y$ סמ"ק	
לכל היותר	לפחות	לפחות	
20 פריטים	4800 סמ"ק	3000 גרם	אילוץ

מערכת האילוצים הנתונה היא:

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$x + y \leq 20$$

$$100x + 300y \geq 3,000$$

$$600x + 150y \geq 4,800$$

ב. נבנה טבלה שתסייע במענה לשאלה – מתי ההוצאה הקטנה יותר (מינימלית)

כאשר פונקציית המטרה היא: $f(x, y) = 2x + 3y$

	$f(x, y) = 2x + 3y$
(15, 5)	$f(15, 5) = 2 \cdot 15 + 3 \cdot 5 = 45$
(6, 8)	$f(6, 8) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 36$
(4, 16)	$f(4, 16) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 16 = 56$

במקרה שהוועד קובע את הרכב החבילה, הוא מעוניין במחיר מינימלי.

הערך המינימלי של פונקציית המטרה הוא 36 ש"ח ומתקבל בנקודה (6, 8).

תשובה: כאשר הוועד קובע את הרכב החבילה, יהיו בה 6 שקיות צ'יפס ו- 8 חפיסות שוקולד.

ג. במקרה שהמפעל קובע את הרכב החבילה, הוא מעוניין במחיר מקסימלי.

הערך המקסימלי של פונקציית המטרה הוא 56 ש"ח ומתקבל בנקודה (4, 16).

תשובה: כאשר המפעל קובע את הרכב החבילה, יהיו בה 4 שקיות צ'יפס ו- 16 חפיסות שוקולד.

שאלה 7 - בגרות קיץ תשס"ח (קיץ 2008)

בית חרושת מייצר שני סוגי סיבים.

לעיבוד של טונה אחת של סיב א' נדרשות 8 שעות במכונת ניקוי ו- 5 שעות במכונת עיבוד.

לעיבוד של טונה אחת של סיב ב' נדרשות 6 שעות במכונת ניקוי ו- 15 שעות במכונת עיבוד.

אפשר להפעיל כל אחת מהמכונות 45 שעות לכל היותר בשבוע עבודה.

הרווח של בית החרושת הוא 15 אלף שקל לכל טונה מסיב א',

ו- 20 אלף שקל לכל טונה מסיב ב'.

נסמן ב- x את מספר הטונות של סיב א', וב- y את מספר הטונות של סיב ב'.

א. רשום את האי-שוויונים המבטאים את האילוצים של הבעיה.

ב. התחום האפשרי של הבעיה הוא תחום סגור, שקדקודיו הם:

$$(0, 0) \quad (0, 3) \quad (4.5, 1.5) \quad (5.625, 0)$$

כמה טונות סיב מכל סוג בית החרושת צריך לייצר בשבוע כדי שהרווח שלו

יהיה מקסימלי?

התשובה היא:

פתרון לשאלה 7:

א.

ניקוי	עיבוד	
8	5	x סיב א'
6	15	y סיב ב'
≤ 45	≤ 45	

$$8x + 6y \leq 45$$

$$5x + 15y \leq 45$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$f(x, y) = 15000x + 20000y$$

ב. נציב את הקודקודים של התחום האפשרי:

$$f(0,0) = 15000(0) + 20000(0) = 0$$

$$f(0,3) = 15000(0) + 20000(3) = 60000$$

$$f(4.5,1.5) = 15000(4.5) + 20000(1.5) = 97500$$

$$f(5.625,0) = 15000(5.625) + 20000(0) = 84375$$

יש לייצר 4.5 טונות סוג א'.

1.5 טונות סוג ב'.

שאלה 8 - בגרות קיץ תשס"ט מועד ב' (קיץ 2009 מועד ב')

מפעל מייצר באותו ציוד שני סוגי שולחנות: שולחן אוכל ושולחן לסלון. תהליך הייצור מורכב משלושה שלבים עיקריים: חיתוך, עיבוד וצביעה. במחזור ייצור אחד אפשר להפעיל את ציוד החיתוך 16 שעות לכל היותר, את ציוד העיבוד אפשר להפעיל 18 שעות לכל היותר, ואת ציוד הצביעה – 12 שעות לכל היותר. פירוט הזמן הדרוש לכל שלב בייצור שולחן אחד נתון בטבלה שלפניך:

שלב החיתוך	שלב העיבוד	שלב הצביעה	
שולחן אוכל	2 שעות	1 שעה	1 שעה
שולחן לסלון	1 שעה	3 שעות	1 שעה

- רווח המפעל מכל שולחן אוכל הוא 200 שקל, ומכל שולחן לסלון הוא 350 שקל. נסמן: x – מספר שולחנות האוכל. y – מספר השולחנות לסלון.
- א. רשום את מערכת האילוצים של הבעיה.
- ב. התחום האפשרי של הבעיה הוא תחום סגור שקדקודיו הם: $(0, 0)$, $(8, 0)$, $(6, 4)$, $(0, 6)$.
- כמה שולחנות מכל סוג על המפעל לייצר במחזור ייצור אחד, כדי שרווח המפעל יהיה מקסימלי?
- ג. באחד ממחזורי הייצור התקלקל ציוד הצביעה לשעה אחת, לכן היה אפשר להפעילו רק 11 שעות.
- האם ציוד הצביעה עדיין היה יכול לצבוע במחזור אחד את מספר השולחנות מכל סוג שמצאת בסעיף ב? נמק.

תשובה לשאלה 8:

א. נסמן ב- x את מספר שולחנות האוכל וב- y את מספר השולחנות לסלון.

נוסיף סימונים אלו לטבלה, בתוספת שורה המבטאת את אופן ניצול המכונות, ושורה המבטאת את מקסימום ניצול המכונה.

חיתוך	עיבוד	צביעה	
2 שעות	1 שעה	1 שעה	x - שולחן אוכל
1 שעה	3 שעות	1 שעה	y - שולחן לסלון
$2x + y$	$x + 3y$	$x + y$	ניצול הציוד
16	18	12	מקסימום ניצול

נרשום את מערכת האילוצים, הנובעת הן ממגבלות המכונות והן מהעובדה שמספר השולחנות המיוצרים, מכל סוג, אינו שלילי.

$$\begin{aligned}x &\geq 0 \\y &\geq 0 \\2x + y &\leq 16 \\x + 3y &\leq 18 \\x + y &\leq 12\end{aligned}$$

ב. נבנה טבלה שתסייע במענה לשאלה – מתי הרווח הוא הגדול ביותר (מקסימלי)

פונקציית המטרה היא: $f(x, y) = 200x + 350y$

	$f(x, y) = 200x + 350y$
(0, 6)	$f(0, 6) = 200 \cdot 0 + 350 \cdot 6 = 2,100$
(6, 4)	$f(6, 4) = 200 \cdot 6 + 350 \cdot 4 = 2,600$
(8, 0)	$f(8, 0) = 200 \cdot 8 + 350 \cdot 0 = 1,600$
(0, 0)	$f(0, 0) = 200 \cdot 0 + 350 \cdot 0 = 0$

הערך המקסימלי של פונקציית המטרה הוא 2,600 שקלים ומתקבל בנקודה (6, 4).

תשובה: המפעל צריך לייצר 6 שולחנות אוכל ו- 4 שולחנות סלוניים, כדי להשיג רווח מקסימלי.

שאלה 9 - בגרות קיץ תשס"ט (קיץ 2009)

- ברשות נגר 3 מ"ק עצים לכל היותר, 21 מ"ר דיקט לכל היותר, ו-104 ימי עבודת פועל לכל היותר.
- לייצור ארון מטבח דרושים 0.2 מ"ק עץ, 1 מ"ר דיקט ו-12 ימי עבודת פועל.
- לייצור ארון בגדים דרושים 0.4 מ"ק עץ, 3 מ"ר דיקט ו-5 ימי עבודת פועל.
- הרווח ממכירת ארון מטבח הוא 1000 שקל, וממכירת ארון בגדים 1500 שקל.
- הנגר רוצה רווח מקסימלי.
- א. רשום את מערכת האילוצים של הבעיה.
- ב. כדי לקבל רווח מקסימלי ייצר הנגר 7 ארונות מטבח ו-4 ארונות בגדים.
- מצא את הרווח המקסימלי.
- ג. האם כדי לייצר 7 ארונות מטבח ו-4 ארונות בגדים, השתמש הנגר בכל הדיקט שעומד לרשותו? נמק.

פתרון של שאלה 9:

		≤ 3 עץ	≤ 21 דיקט	≤ 104 ימי עבודה	רווח
x	ארון מטבח	0.2	1	12	1000
y	ארון בגדים	0.4	3	5	1500

א.

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ 0.2x + 0.4y &\leq 3 \\ 1x + 3y &\leq 21 \\ 5x + 12y &\leq 104 \end{aligned}$$

פונקצית מטרה:

$$f(x, y) = 1000x + 1500y$$

תשובה: $f(x, y) = 1000x + 1500y$

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ 0.2x + 0.4y &\leq 3 \\ 1x + 3y &\leq 21 \\ 5x + 12y &\leq 104 \end{aligned}$$

ב.

נציב בפונקצית המטרה.

$$f(7, 4) = 1000 \cdot 7 + 1500 \cdot 4 = 13000$$

תשובה: רווח מקסימלי = 13000

ג. יש להציב את הנקודה (7, 4) באילוצים.

עבור הכמות 7 ארונות מטבח ו-4 ארונות בגדים מבחינת כמות דיקט

$$1 \cdot 7 + 3 \cdot 4 = 19 < 21$$

לכן הנגר לא השתמש בכל הדיקט שעמד לרשותו.

פתרון מלא לשאלה 9:

א. נסמן ב- x את מספר ארונות המטבח,

וב- y את מספר ארונות הבגדים.

נבנה טבלה מתאימה, כולל טור מתאים לפונקצית המטרה.

רווח שקלים	ימי עבודה פועל	דיקט (מ"ר)	עץ (מ"ק)	
1000	12	1	0.2	x - ארונות מטבח
1500	5	3	0.4	y - ארונות בגדים
	104	21	3	מקסימום אפשרי

נרשום את מערכת האילוצים, הנובעת הן מהמגבלות שהוצגו בטבלה והן מהעובדה שכמות הארונות המיוצרים, מכל סוג, אינה שלילית.

$$\begin{aligned}x &\geq 0 \\y &\geq 0 \\0.2x + 0.4y &\leq 3 \\1x + 3y &\leq 21 \\12x + 5y &\leq 104\end{aligned}$$

ב. פונקצית המטרה היא: $f(x, y) = 1000x + 1500y$:

כדי לקבל רווח מקסימלי ייצר הנגר 7 ארונות מטבח ו-4 ארונות בגדים
נציב $x = 7$, $y = 4$ בפונקצית המטרה ונמצא את הרווח המקסימלי:

$$f(7, 4) = 1000 \cdot 7 + 1500 \cdot 4 = 13,000$$

לכן, הרווח המקסימלי יהיה 13,000 שקל.

ג. כדי לקבל רווח מקסימלי ייצר הנגר 7 ארונות מטבח ו-4 ארונות בגדים
נציב $x = 7$, $y = 4$ באילוץ של הדיקט:

$$\begin{aligned}1 \cdot 7 + 3 \cdot 4 &\leq 21 \\19 &\leq 21\end{aligned}$$

הנגר ניצל רק 19 מ"ר, כלומר נשאר לו עוד 2 מ"ר דיקט שלא ניצל.

שאלה 10 - בגרות קיץ תש"ע (קיץ 2010)

למפעל נחושת יש שני מכרות : מכרה I ומכרה II.
בכל אחד מן המכרות אפשר להפיק שלושה סוגי עפרות :
מכרה I יכול להפיק ביום עבודה 6 טונות עפרה א', 2 טונות עפרה ב' ו-4 טונות עפרה ג'.
מכרה II יכול להפיק ביום עבודה 2 טונות עפרה א', 2 טונות עפרה ב' ו-12 טונות עפרה ג'.
המפעל התחייב לספק לפחות 120 טונות של עפרה א', לפחות 80 טונות של עפרה ב', ולפחות 240 טונות של עפרה ג'.
ההוצאות באלפי שקלים עבור הפעלת המכרות במשך יום עבודה אחד הן 120 למכרה I ו-160 למכרה II.
המפעל מעוניין לספק את הסחורה בהוצאות מינימליות.
הוצאות ההפעלה היו מינימאליות כאשר הפעילו את מכרה I 30 יום, ואת מכרה II הפעילו 10 ימים.
א. רשום את מערכת האילוצים של הבעיה.
ב. חשב את ההוצאה המינימאלית של המפעל.

פתרון לשאלה 10:

$$6x + 2y \geq 120 \quad \text{א.}$$

$$2x + 2y \geq 180$$

$$4x + 12y \geq 240$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$\text{ב. } f(x, y) = 120,000x + 160,000y$$

$$f(30, 10) = \text{₪ } 5,200,000$$

פתרון מלא לשאלה 10:

א. נסמן ב- x את כמות העפרה (טונות) במיוצרות במכרה I.

וב- y את כמות העפרה (טונות) במיוצרות במכרה II.

נבנה טבלה מתאימה, כולל טור מתאים לפונקציית המטרה.

הוצאות (שקלים)	עפרה ג' (טונות)	עפרה ב' (טונות)	עפרה א' (טונות)	
120	4	2	6	x - מכרה I
160	12	2	2	y - מכרה II
	240	80	120	מינימום אפשרי

נרשום את מערכת האילוצים, הנובעת הן מהמגבלות שהוצגו בטבלה

והן מהעובדה שכמות העפרה המיוצרת, מכל סוג, אינה שלילית.

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$6x + 2y \geq 20$$

$$2x + 2y \geq 80$$

$$4x + 12y \geq 240$$

ב. ההוצאות באלפי שקלים עבור הפעלת המכרות במשך יום אחד הן 120 למכרה I ו-160 למכרה II.

בהתאם, פונקציית המטרה היא: $f(x, y) = 120x + 160y$.

הוצאות ההפעלה היו מינימליות כאשר הפעילו את מכרה I 30 יום ומכרה II הפעילו 10 ימים.

נציב $x = 30$, $y = 10$ בפונקציית המטרה ונמצא את ההוצאה המינימלית:

$$f(30, 10) = 120 \cdot 30 + 160 \cdot 10 = 5,200$$

לכן, ההוצאה המינימלית היא 5,200 אלפי שקלים.

שאלה 11 - בגרות חורף תשע"א (חורף 2011)

במפעל פועלות שלוש מכונות: M_1 , M_2 , M_3 .
 המכונות משמשות להכנת שני סוגי מוצרים: מוצר א ומוצר ב.
 כל אחד מהמוצרים חייב לעבור עיבוד בכל אחת משלוש המכונות.
 במחזור ייצור אחד אפשר להפעיל את המכונה M_1 14 שעות לכל היותר,
 את המכונה M_2 אפשר להפעיל 30 שעות לכל היותר,
 ואת המכונה M_3 – 125 שעות לכל היותר.
 הזמן הדרוש לעיבוד 1 ק"ג מוצר מכל סוג בכל אחת מהמכונות נתון בטבלה שלפניך.

M_3	M_2	M_1	
4 שעות	3 שעות	1 שעה	מוצר א
10 שעות	1 שעה	1 שעה	מוצר ב

- סמן ב- x את מספר הק"ג של מוצר א שאפשר לייצר במחזור ייצור אחד,
 וב- y את מספר הק"ג של מוצר ב שאפשר לייצר במחזור ייצור אחד.
 א. בעל המפעל מעוניין ברווח מקסימלי.
 רשום את מערכת האילוצים המתאימה לבעיה.
 ב. הרווח המקסימלי למפעל מתקבל כאשר הוא מייצר במחזור ייצור אחד
 2.5 ק"ג ממוצר א ו- 11.5 ק"ג ממוצר ב.
 איזו מכונה אינה מנוצלת עד תום כאשר מתקבל הרווח המקסימלי? נמק.

תשובה לשאלה 11:

א. נסמן ב- x את הכמות, בק"ג, של המוצר הראשון
 וב- y את הכמות, בק"ג, של המוצר השני.
 נסיף סימונים אלו לטבלה, בתוספת שורה המבטאת את
 מקסימום הזמן שניתן לנצל את המכונות.

M_3	M_2	M_1	
4 שעות	3 שעות	1 שעה	x - מוצר ראשון
10 שעות	1 שעה	1 שעה	y - מוצר שני
עד 125	עד 30	עד 14	אילוץ

נרשום את מערכת האילוצים, הנובעת הן ממגבלות אלו
 והן מהעובדה שכמות המוצרים המיוצרת, מכל סוג, אינה שלילית.

$$\begin{aligned} x + y &\leq 14 \\ 3x + y &\leq 30 \\ 4x + 10y &\leq 125 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

ב. בנקודה $(2.5, 11.5)$ יש רווח מקסימלי, על פי הנתון.

נציב שיעורי הנקודה בכל אחד מהאילוצים.

$$x + y \leq 14 \rightarrow 2.5 + 11.5 \leq 14 \rightarrow 14 \leq 14 : M_1$$

אילוץ זה נוצל עד תום – המכונה עובדת בכל 14 השעות האפשריות.

$$3x + y \leq 30 \rightarrow 3 \cdot 2.5 + 11.5 \leq 30 \rightarrow 19 \leq 30 : M_2$$

ולכן מכונה זו לא מנוצלת עד תום, נותרו 11 שעות שהמכונה מושבתת.

$$4x + 10y \leq 125 \rightarrow 4 \cdot 2.5 + 10 \cdot 11.5 \leq 125 \rightarrow 125 \leq 125 : M_3$$

אילוץ זה נוצל עד תום – המכונה עובדת בכל 125 השעות האפשריות.

תשובה: המכונה M_2 לא נוצלה עד תום.

שאלות מתוך מבחנים לדוגמא

שאלה מתוך מבחן לדוגמה מס' 1

חקלאי צריך לתכנן את עיבוד שדותיו לעונה חקלאית, כך שרווחיו יהיו מקסימליים.

המשאבים שעומדים לרשותו:

- 800 מ"ק מים,

- 312 ימי עבודה.

הוא החליט לנצל את כל משאביו לגידול מלפפונים ופלפלים.

בטבלה הבאה נתונים הצרכים והרווחים לדונם אחד עבור הגידולים האלה:

מ"ק לדונם אחד	ימי עבודה לדונם אחד	רווחים לדונם אחד	
100 מ"ק	12	1,000 ₪	מלפפונים
60 מ"ק	36	1,500 ₪	פלפלים

א. כתוב את מערכת האילוצים ואת פונקציית המטרה עבור הנתונים בשאלה.

ב. סרטט את מערכת האילוצים במערכת הצירים.

ג. מצא על כמה דונמים צריך החקלאי לגדל מלפפונים ועל כמה דונמים הוא

צריך לגדל פלפלים, כדי שרווחיו יהיו מקסימליים.

ד. חשב את הרווח המקסימלי.

שאלה נוספת מתוך מבחן לדוגמה מס' 1

במפעל פועלות שלוש מכונות: M_1 , M_2 , M_3 .
 המכונות משמשות להכנת שני סוגי מוצרים: מוצר א ומוצר ב.
 כל אחד מהמוצרים חייב לעבור עיבוד בכל אחת משלוש המכונות.
 במחזור ייצור אחד אפשר להפעיל את המכונה M_1 14 שעות לכל היותר,
 את המכונה M_2 אפשר להפעיל 30 שעות לכל היותר,
 ואת המכונה M_3 – 125 שעות לכל היותר.
 הזמן הדרוש לעיבוד 1 ק"ג מוצר מכל סוג בכל אחת מהמכונות נתון בטבלה שלפניך.

M_3	M_2	M_1	
4 שעות	3 שעות	1 שעה	מוצר א
10 שעות	1 שעה	1 שעה	מוצר ב

- סמן ב- x את מספר הק"ג של מוצר א שאפשר לייצר במחזור ייצור אחד,
 וב- y את מספר הק"ג של מוצר ב שאפשר לייצר במחזור ייצור אחד.
- א. בעל המפעל מעוניין ברווח מקסימלי.
 רשום את מערכת האילוצים המתאימה לבעיה.
- ב. הרווח המקסימלי למפעל מתקבל כאשר הוא מייצר במחזור ייצור אחד
 2.5 ק"ג ממוצר א ו- 11.5 ק"ג ממוצר ב.
- איזו מכונה אינה מנוצלת עד תום כאשר מתקבל הרווח המקסימלי? נמק.

שאלה מתוך מבחן לדוגמה מס' 2

בית חרושת מייצר שני סוגי סיבים.

לעיבוד של טונה אחת של סיב א' נדרשות 8 שעות במכונת ניקוי ו- 5 שעות במכונת עיבוד.

לעיבוד של טונה אחת של סיב ב' נדרשות 6 שעות במכונת ניקוי ו- 15 שעות במכונת עיבוד.

אפשר להפעיל כל אחת מהמכונות 45 שעות לכל היותר בשבוע עבודה.

הרווח של בית החרושת הוא 15 אלף שקל לכל טונה מסיב א, ו- 20 אלף שקל לכל טונה מסיב ב. נסמן ב- x את מספר הטונות של סיב א', ונסמן ב- y את מספר הטונות של סיב ב.

א. רשום את האי-שוויונות המבטאים את האילוצים של הבעיה.

ב. התחום האפשרי של הבעיה הוא תחום סגור, שקודקודיו הם:

$$(0,0), (0,3), (4.5,1.5), (5.625,0)$$

כמה טונות סיב מכל סוג בית החרושת צריך לייצר בשבוע כדי שהרווח שלו יהיה מקסימלי?



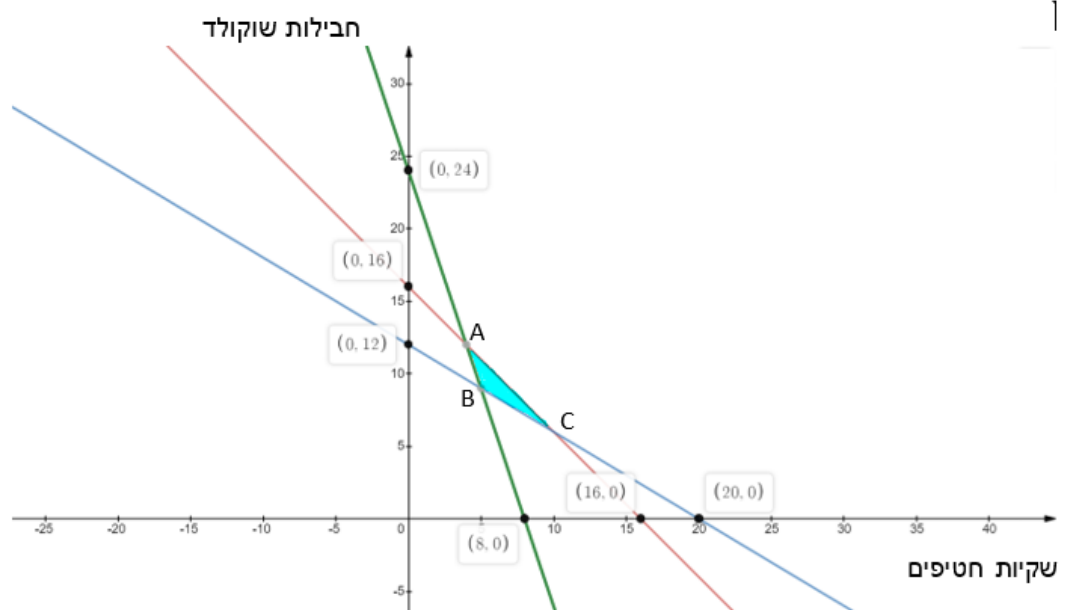
פעילות בדסמוס מתאימה לשאלה מתוך מבחן לדוגמה מס' 2

שאלה מתוך מבחן לדוגמה מס' 3

לקראת חג החנוכה מועצת תלמידים מעוניינת להזמין חבילות שי, המכילות שקיות חטיפים וחפיסות שוקולד. הוחלט שכל חבילה תכיל לכל היותר 16 פריטים. משקלה של כל חבילה יהיה לפחות 1,200 גרם, ונפחה לפחות 2,400 סמ"ק. המשקל, הנפח והמחיר של חטיפים ושוקולד רשומים בטבלה שלפניכם:

משקל	נפח	מחיר	
שקית חטיפים	300 סמ"ק	60 גרם	3 ₪
חפיסת שוקולד	100 סמ"ק	100 גרם	4 ₪

נסמן: x - מספר שקיות החטיפים בכל חבילת שי.



y - מספר חפיסות השוקולד בכל חבילת שי.

א. רשום את מערכת האילוצים של המצב המתואר בשאלה.

התחום המשורטט בציור מתקבל ממערכת האילוצים שקיבלת בסעיף א':

- ב. מצא את השיעורים של הנקודות A, B, C .
- ג. רשום את הפונקציה שמתארת את המחיר של חבילת שי (פונקציית המטרה).
- ד. כמה שקיות חטיפים וכמה חבילות שוקולד צריך להכניס לכל חבילת שי כדי שמחירה יהיה מינימלי?