

DEUXIEME PROBLEME

I. Mesure d'une inductance au pont de Maxwell:

1. L'application du théorème d'Ampère donne le résultat habituel: $\vec{B} = m_0 \frac{N}{l} I \vec{u}_z$

Le flux du champ magnétique à travers toute la bobine est égal à NSB , B désignant la norme du champ magnétique. D'où $F = NSm_0 \frac{N}{l} I = m_0 N^2 \frac{S}{l} I = LI \Rightarrow L = m_0 N^2 \frac{S}{l}$

A.N: $L = 43.1 \text{ mH}$.

2. Chaque spire est carrée, de côté $\sqrt{S}$, donc de longueur $4\sqrt{S}$. Sa résistance sera égale à:

$$r = 4N\sqrt{S} \frac{\rho}{s}; \text{ l'application numérique donne } r = 8.47 \, \Omega.$$

3. a. On retrouve la condition habituelle du pont avec $Z_1 Z_2 = PQ$, soit :

$$(r + jL\omega) \left(\frac{R}{1+jC\omega} \right) = PQ, \text{ ce qui donne : } r = \frac{PQ}{R} \text{ et } L = \frac{PQC}{R} = rC$$

b. A.N: $r = 8.70 \, \Omega$ et $L = 18.5 \, \mu\text{H}$. La valeur expérimentale de la résistance est voisine de celle calculée, mais il n'en n'est pas de même pour l'autoinductance: supposer le champ magnétique homogène dans tout le volume de la bobine, et qui plus est égal à celui sur son axe de révolution évalué sans tenir compte des effets de bord est une approximation très grossière.

4. On peut écrire à chaque instant l'expression du flux Φ du champ magnétique total dans la bobine; il est donné par $\Phi = Li(t) + \Phi_e$, où $i(t)$ désigne l'intensité parcourant la bobine à la date t .

Le circuit est régi par l'équation différentielle $\frac{dF}{dt} + ri(t) = 0$.

Pour $t < 0$, $\Phi_e = \text{cte}$. Puisqu'il n'y a pas de générateur, et que la bobine a une résistance non nulle, l'intensité pour $t < 0$ est donc nulle. Le régime transitoire apparaît lors de l'établissement de Φ_e à disparu, l'énergie étant dissipée par effet Joule.

Pour $t \geq 0$, on résout l'équation différentielle précédente et on trouve $i(t) = i_0 \exp(-rt/L)$, avec $i_0 = i(t=0)$. On détermine i_0 en réécrivant l'équation différentielle sous la forme $d\Phi = -r i(t) dt$ et en intégrant entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$: à $t = 0$, $\Phi = \Phi_0$ et $\Phi(t \rightarrow \infty) = 0$ (plus de flux extérieur et intensité nulle, donc plus de flux propre). D'où:

$$\int dF = 0 - F_0 = \int -ri(t)dt = \int -ri_0 e^{-\frac{r}{L}t} dt = i_0 \left[-\frac{r}{L} e^{-\frac{r}{L}t} \right]_0^\infty = -Li_0 \Rightarrow i_0 = \frac{F_0}{L}$$

L'intensité, dans ce modèle, passe donc instantanément de 0 à i_0 non nulle.

b.



II. Circuits couplés: mesure d'une mutuelle inductance:

1. Voir cours. Les inductances propres sont positives, les inductances mutuelles peuvent être positives ou négatives, leur signe dépendant d'une condition d'orientation arbitraire.

$$2. \quad W = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

3. Les trois termes de la somme constituant l'expression de W sont positifs (y compris le dernier). On peut donc considérer W comme une forme quadratique définie positive de i_1 et i_2 . Son déterminant caractéristique est donc positif ou nul, donc $L_1 L_2 - M^2 \geq 0$ donc $|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$, donc $0 \leq k \leq 1$.

4. a. Branchement de la figure 4.

Les deux bobines sont parcourues par la même intensité i . Le flux total dans les deux bobines est donc $\Phi = (L_1 + L_2 + 2M) i = L_e i \Rightarrow L_e = L_1 + L_2 + 2M$ (sans préjuger du signe de M, en faisant simplement une hypothèse de couplage).

Branchement de la figure 5.

Les deux bobines sont parcourues par la même intensité i' . Le flux total dans les deux bobines est donc $\Phi' = (L_1 + L_2 - 2M) i' = L_e' i' \Rightarrow L_e' = L_1 + L_2 - 2M$ (en faisant l'hypothèse du couplage opposé).

$$\text{D'où} \quad |M| = \frac{|L_e' - L_e|}{4}$$

b. On obtient $L_e = 20.56 \mu\text{H}$ et $L_e' = 15.50 \mu\text{H} \Rightarrow |M| = 1.27 \text{mH}$

5. a. Branchement de la figure 6.

Les deux bobines sont soumises à la même ddp $u = v(A_1) - v(B_1)$. On aura donc:

$$u = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = L_e'' \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right) \text{ en vertu de la loi aux noeuds.}$$

Cet ensemble d'équations peut être résolu pour obtenir $L_e'' = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$

b. On va utiliser l'inductance équivalente L_e'' . $Q(t)$ désignant la charge de l'armature droite du condensateur C , $i(t)$ l'intensité arrivant sur l'armature portant la charge Q , le système sera décrit par les équations $i(t) = \frac{dQ}{dt}$ et $u(t) = \frac{Q}{C} = -L_e'' \frac{di}{dt}$, soit encore $\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{u(t)}{L_e'' C} = 0$ dont une forme des solutions est $u(t) = Q_0 C \cos(\omega t)$ avec $\omega^2 L_e'' C = 1$.

Le circuit est supposé sans résistance électrique, il n'y aura donc pas d'amortissement par effet Joule.

III. Circuits oscillants couplés: (uniquement pour l'option M)

1. L'intensité i_1 étant choisie dans le sens rétrograde et i_2 dans le sens trigonométrique, les équations sont:

$$\{ \underline{E} = \frac{\underline{I}_1}{jC\omega} + jL\omega \underline{I}_1 + jM\omega \underline{I}_2 = 0 = \frac{\underline{I}_2}{jC\omega} + jL\omega \underline{I}_2 + jM\omega \underline{I}_1 \quad , \quad \text{ce qui donne, après}$$

substitution et en posant $x = \omega/\omega_0$:

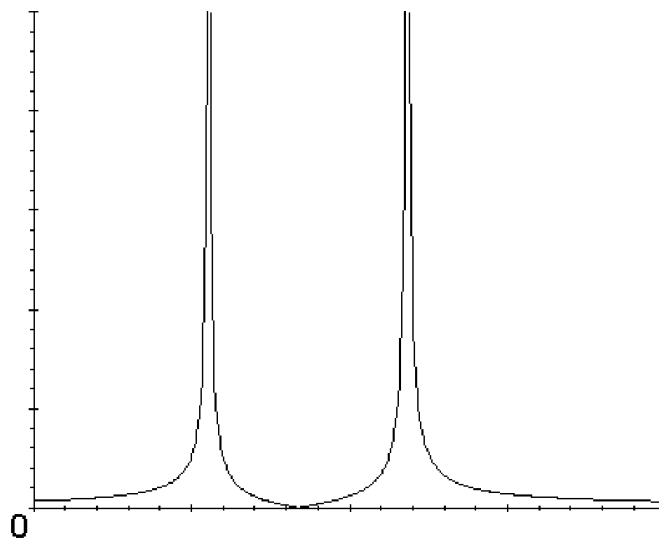
$$\{ \underline{I}_1 = jCE\omega_0 \frac{x(1-x^2)}{1-2x^2+x^4(1-k^2)} \underline{I}_2 = jCE\omega_0 \frac{kx^3}{1-2x^2+x^4(1-k^2)}$$

On a négligé les résistances des deux circuits, on trouve donc que $\phi_1 = \pm \pi/2$ et $\phi_2 = \pm \pi/2$.

On trouve $\phi = \phi_2 - \phi_1 = 0$ pour $x < 1$, c'est-à-dire $\omega < \omega_0$ et $\phi = \pm \pi$ pour $x > 1$.

2. Les pulsations de résonance sont celles qui annulent les dénominateurs de l'expression des intensités, soit $x_1 = \frac{1}{\sqrt{1-k}}$ et $x_2 = \frac{1}{\sqrt{1+k}}$, avec $x_1 > x_2$. La pulsation d'antirésonance est celle pour laquelle l'intensité dans le circuit (1) est nulle, soit $x_3 = 1$ ou encore $\omega_3 = \omega_0$.

3.



Allure de $I_1(\omega)$

Allure de $I_2(\omega)$

En ne négligeant pas les résistances des deux circuits, les intensités $I_1(\omega)$ et $I_2(\omega)$ gardent une valeur finie aux pulsations de résonance, mais l'allure des courbes reste la même.

4. On dispose des relations: $LC\omega_0^2 = 1, M = kL, \omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}, \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}$

On a donc 4 équations pour 3 inconnues.

L'application numérique donne $k = 0.129$, $L = 42.7$ mH et $M = 5.5$ mH.