

Concours commun MINES-PONTS 1998

MATH 2 (option PSI)

1ère partie :

1.a) Si X est un vecteur propre associé à λ , $AX = \lambda X$, d'où $\|AX\| = |\lambda|\|X\| \leq \|A\|_d\|X\|$ et comme X n'est pas nul, $|\lambda| \leq \|A\|_d$.

1.b) Donc, si $\lambda > \|A\|_d$, λ n'est pas valeur propre et $\lambda I_d - A$ est inversible. Et comme $\lambda^1 0$, $\left(I_d - \frac{1}{\lambda}A\right)\lambda(\lambda I_d - A)^{-1} = I_d$ ce qui prouve l'inversibilité de la matrice $I_d - \frac{1}{\lambda}A$.

1.c) Si $\lambda \rightarrow +\infty$, $I_d - \frac{1}{\lambda}A \rightarrow I_d$ d'après **P.2**. Le déterminant d'une matrice étant une fonction polynomiale donc continue des coefficients, la matrice des cofacteurs de $I_d - \frac{1}{\lambda}A$ a pour limite la matrice des cofacteurs de I_d et le déterminant de $I_d - \frac{1}{\lambda}A$ tend vers $\det(I_d) = 1$. Donc $\left(I_d - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} I_d$.

$$\mathbf{1.d)} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\lambda I_d - A)^{-1} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \left(I_d - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = 0.$$

$$\mathbf{2.} B_\lambda - I_d = \lambda(\lambda I_d - A)^{-1} - (\lambda I_d - A)^{-1}(\lambda I_d - A) = (\lambda I_d - A)^{-1}(\lambda I_d - (\lambda I_d - A)) = A \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

$$C_\lambda - A = \lambda(B_\lambda - I_d) - A = \lambda(\lambda I_d - A)^{-1}A - A = (\lambda I_d - A)^{-1}(\lambda I_d - (\lambda I_d - A))A = (\lambda I_d - A)^{-1}A^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

2ème partie :

1.a) Si A est positive, le j -ème vecteur colonne, image du j -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$ par A doit être positif pour tout j . Donc $a_{ij} \geq 0, i, j$. La réciproque est immédiate.

Si $a_{ijn} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} a_{ij}$ et si $a_{ijn} \geq 0$ pour tout n , alors $a_{ij} \geq 0$; donc la limite d'une suite de matrices positives est positive.

1.b) Supposons A positive. Alors $\left| \sum_{j=1}^d a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^d a_{ij} |x_j|, i = 1, \dots, d$, c'est à dire $|a(x)| \leq a(|x|)$. Inversement, appliquons la relation $|a(x)| \leq a(|x|)$ au j -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$: on obtient $|a_{ij}| \leq a_{ij}, i = 1, \dots, d$ { ce qui prouve que $a_{ij} \geq 0$ pour tout couple (i, j) , et donc que A est positive.

1.c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ \lambda & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas positive.
 $(\lambda I_2 - A)^{-1} = (\lambda I_2 - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ \lambda & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix})^{-1} = \frac{1}{\lambda^2 - 3\lambda + 1} (\lambda I_2 - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ \lambda & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix})$. Pour que cette matrice soit positive, il faut et il suffit que $\lambda^2 - 3\lambda + 1 > 0$, c'est à dire $\lambda^2 - 3\lambda + 1 > 0$.

2. $XC_\lambda X = \lambda^2 X(\lambda I_d - A)^{-1} X - \lambda XX$. Si $(\lambda I_d - A)^{-1}$ est positive, l'inégalité triangulaire donne $X(\lambda I_d - A)^{-1} X \leq |X|(\lambda I_d - A)^{-1}|X|$. Par ailleurs, $\lambda XX = \lambda |X||X|$. Donc $XC_\lambda X \leq |X|C_\lambda |X|$.

Lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, on obtient alors $XAX \leq |X|A|X|$.

3ème partie :

1.a) $(xy)B(xy) = -x^2 - y^2 + 4xy$ est positif pour $x = y = 1$; donc B n'est pas dissipative. B admet une valeur propre double égale à -1.

$(xyz)C(xyz) = 0$; donc C est dissipative. Son polynôme caractéristique est $\det(\lambda I_3 - C) = \lambda^3 + 3\lambda$ et $\text{Sp}(C) = \{0, \pm i\sqrt{3}\}$.

1.b) Si X est un vecteur propre associé à une valeur propre λ , $XAX = \lambda XX \leq 0$, d'où $\lambda \leq 0$.

1.c) Si A est symétrique, toutes ses valeurs propres sont réelles et si elle est dissipative, elles sont dans $\mathbb{R}_-$. Réciproquement, si A est symétrique et à valeurs propres négatives ou nulles, on peut écrire $A = ODO^T$ où

D est une matrice diagonale à éléments diagonaux négatifs ou nuls et O une matrice orthogonale. D'où $XAX = XODO^{-1}X = YDY = \sum_{i=1}^d d_{ii} y_i^2 \leq 0$, avec $Y = O^{-1}X$.

Or $XAX = XAX = X \frac{A+A'}{2} X$. Donc A est dissipative ssi les valeurs propres de $A+A'$ sont dans IR_- .

1.d) $XBX = XAX - \|A\|_d XX \leq \|X\| \|A\|_d \|X\| - \|A\|_d \|X\|^2 = 0$ (on majore le premier terme en utilisant **P.1** et l'inégalité de Schwarz). Donc B est dissipative.

2.a) Soit X un vecteur propre pour la valeur propre 0. Alors $XAX = 0$. Or, d'après **II.2.**, $XAX \leq |X|A|X|$ et si A est dissipative, $|X|A|X| \leq 0$. Le vecteur $Y = |X|$ est donc bien un vecteur positif non nul tel que $YAY = 0$.

2.b) Appliquons ce qui précède à la matrice symétrique $A' = A - s(A)I_d$ dont toutes les valeurs propres sont négatives ou nulles (et qui est donc dissipative d'après **1.c**), qui admet la valeur propre 0 et qui est telle que $(\lambda I_d - A')^{-1}$ soit positive pour λ assez grand (le seuil est celui relatif à A décalé de $s(A)$). Si X' est un vecteur propre de A pour la valeur propre $s(A)$, alors $Y'A'Y' = 0$ avec $Y' = |X'|$ et si Y' est propre pour A' , ce ne peut être que pour la valeur propre 0 d'où il résulte que Y' est bien positif et propre pour A relativement à la valeur propre $s(A)$.

2.c) B admet 1 comme valeur propre évidente. les deux autres sont opposées (car $\text{Tr}(B) = 0$), de produit égal à $\det(B) = -2$. D'où $\text{Sp}(B) = \{-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\}$. Le vecteur $(1 \ 0 \ \sqrt{2} \ -1)$ est propre pour $\sqrt{2}$.

$(\lambda I_3 - B)^{-1} = (\lambda - 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ \lambda - 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ \lambda + 1)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda+1}{\lambda^2-2} & 0 & \frac{1}{\lambda^2-2} & 0 & \frac{1}{\lambda-1} & 0 & \frac{1}{\lambda^2-2} & 0 & \frac{\lambda-1}{\lambda^2-2} \end{pmatrix}$ est positive ssi $\lambda \geq \sqrt{2}$.

4ème partie :

1. $\|x(t)\|^2 = X(t)X(t)$. D'où $\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = X'(t)X(t) + X(t)X'(t) = 2X(t)AX(t)$. A étant dissipative, cette quantité est négative ou nulle. Donc $\|x(t)\| \leq \|x_0\|e^{t^3/6}$.

2.a) Le système $\dot{X} = AX$ a pour solution $X(t) = \exp(At).X_0$. D'où $M(t) = \exp(At) = P \exp(Dt) P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} P^{-1}$.

2.b) $\left(I_d - \frac{t}{n}A\right)^{-n} = \left(I_d - \frac{t}{n}PDP^{-1}\right)^{-n} = P\left(I_d - \frac{t}{n}D\right)^{-n}P^{-1}$. Or on sait que $\left(1 - \frac{t}{n}\lambda\right)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\lambda t}$. Donc $M(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_d - \frac{t}{n}A\right)^{-n}$. Alors si $(\lambda I_d - A)^{-1}$ est positive pour λ assez grand, $\left(\frac{n}{t}I_d - A\right)^{-1}$ est positive pour n assez grand, donc aussi $\left(I_d - \frac{t}{n}A\right)^{-1} = \frac{n}{t}\left(\frac{n}{t}I_d - A\right)^{-1}$ ainsi que $\left(I_d - \frac{t}{n}A\right)^{-n}$. Par passage à la limite (**II.1.a**), $M(t)$ est donc une matrice positive.

2.c) Sachant que pour $\lambda > \|A\|_d$, $\lambda I_d - A$ est inversible, on peut écrire $\int e^{-\lambda t} M(t) dt = \int \exp((- \lambda I_d + A)t) dt = -(\lambda I_d - A)^{-1} [\exp((- \lambda I_d + A)t)]_0^x = (\lambda I_d - A)^{-1} (I_d - e^{-\lambda x} M(x))$.

2.d) $\|M(t)\|_d = \left\| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \right\|_d \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|_d^k t^k}{k!} = e^{t\|A\|_d}$. Donc, pour $\lambda > \|A\|_d$, $\|M(x)e^{-\lambda x}\|_d \leq e^{x(\|A\|_d - \lambda)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\lambda I_d - A)^{-1} (I_d - e^{-\lambda x} M(x)) = (\lambda I_d - A)^{-1}$.

2.e) Si $M(t)$ est positive pour tout $t > 0$, il en est de même de $e^{-\lambda t} M(t)$, donc aussi de $\int e^{-\lambda t} M(t) dt$ puisque les coefficients de cette matrice sont des intégrales sur le segment $[0, x]$ de fonctions positives. Par passage à la limite, $(\lambda I_d - A)^{-1}$ est positive pour tout $\lambda > \|A\|_d$.