

Corrigé de l'épreuve TPE 96 - physique commune

I ETUDE MAGNETOSTATIQUE D'UNE BOBINE

I- 1 Magnétostatique et régimes quasi-stationnaires.

On ne tient pas compte de l'induction, d'où:

sous forme locale : $\text{div} \{ \vec{B} = 0 \} \text{et} \text{rot} \vec{B} = m_0 \vec{j} + e_0 m_0 \frac{\vec{\rho}}{\epsilon_0}$

sous forme intégrale: $\iint_{S_{\text{ferme}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ et $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = S m_0 I$

Le principe de conservation de la charge impose aux courants de vérifier $\text{div} \{ \vec{j} = 0 \}$ en régime quasi-stationnaire. Si une charge macroscopique apparaît dans un conducteur ohmique, elle vérifie les lois locales

$$\text{div} \{ \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \} \text{(théorème de Gauss)} \text{ et } \text{div} \{ \vec{j} + \frac{\vec{\rho}}{\epsilon_0} = 0 \} \text{(conservation de la charge)}$$

mais aussi $\vec{j} = s \vec{E}$

On obtient ainsi $\text{div} \{ \vec{j} = -\frac{\vec{\rho}}{\epsilon_0} = s \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ce qui s'intègre en: $\rho = \rho_0 \exp(-\frac{t}{\tau}) = \frac{e_0}{s}$

Pour le cuivre le temps de relaxation vaut environ $\tau = 1,5 \cdot 10^{-19}$ s.

On peut conclure que, sauf à considérer des fréquences extraordinairement élevées, les lois de la magnétostatique sont valables. En particulier dans l'équation de Maxwell-Ampère on peut négliger le courant de déplacement vis à vis du courant de conduction. En effet le rapport des amplitudes vaut :

$$\left| \frac{j_d}{j_c} \right| = \frac{|e_0 m_0 \omega E|}{|m_0 j|} = \omega t \ll 1 \quad \text{pour des fréquences usuelles}$$

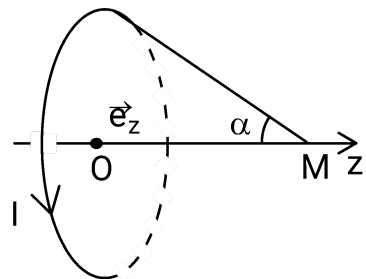
I- 2 Champ magnétique créé par une bobine.

I- 2-1. Champ sur l'axe.

Une rotation d'angle quelconque autour de l'axe Oz laisse la distribution invariante ainsi que le point M. La seule direction invariante étant alors l'axe Oz lui-même le champ magnétique est dirigé suivant l'axe Oz.

On peut donc écrire $\vec{B} = B(z) \vec{e}_z$ le calcul de la fonction B(z) peut se faire à partir de la loi de Biot et Savart avec la forme inhérente:

$$\vec{B} = \frac{m_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\Omega}{r^2} \text{ avec ici } \Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha) = \text{angle sous lequel on voit le circuit depuis le point M.}$$



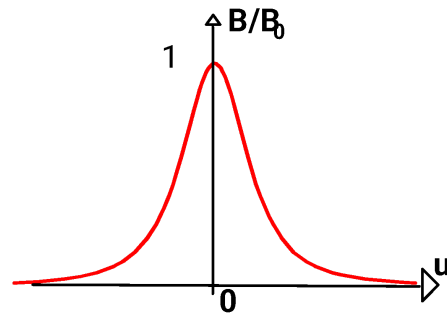
$$\vec{B} = \frac{m_0 I}{4\pi} 2\pi \sin \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dz} \vec{e}_z$$

$$\text{or } \cotan \alpha = \frac{z}{R} \Rightarrow \frac{d\alpha}{dz} = \frac{R}{z^2 + R^2}$$

D'où le résultat bien connu

$$\vec{B} = \frac{m_0 I}{2R} \sin^3 \alpha = B_0 F\left(\frac{z}{R}\right) \vec{e}_z \quad \text{où } F(u) = (1 + u^2)^{-3/2}$$

et son graphe en chapeau de gendarme tout aussi connu.

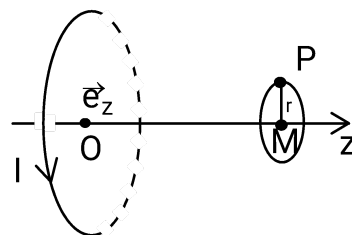


I- 2-2 Champ au voisinage de l'axe.

I- 2.2.a.

Une symétrie par rapport à un plan contenant P et l'axe Oz laisse invariant le point P et la distribution au signe près. Le champ magnétique étant un vecteur axial appartient donc à ce plan et ne possède donc pas de composante orthogonale à ce plan: $B_\theta = 0$.

Une rotation d'angle quelconque autour de l'axe Oz laisse la distribution invariante alors que l'angle polaire change; donc le module du champ ne peut dépendre de l'angle θ .



I- 2.2.b.

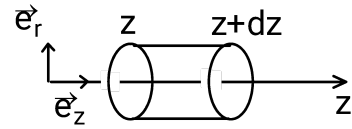
Les équations locales vérifiées par le champ sont: $\text{div} \{ \vec{B} = 0 \} \text{et} \text{rot} \vec{B} = \vec{0}$. Ce qui veut dire que le flux et la circulation sont conservatifs.

I- 2.2.c.

Pour r faible on a approximativement

$$F = pr^2[B(z + dz) - B(z)] + 2prdzB_r = 0$$

Soit $B_r = -\frac{r}{2} \frac{dB(z)}{dz} = -\frac{r}{2} \frac{dB(z)}{dz}$



I- 2.2.d.

La circulation vaut

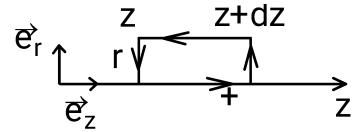
$$G = dz[B(z) - B_r(r, z)] + \int [B_r(z + dz) - B_r(z)] dr = 0$$

Or $B_r(z) = -\frac{r}{2} \frac{dB(z)}{dz}$ donc $B_r(z + dz) = -\frac{r}{2} \left[\frac{dB(z)}{dz} + \frac{d^2B(z)}{dz^2} dz \right]$

Dans ces conditions $G = dz[B(z) - B_r(r, z)] + \int \left[\frac{d^2B(z)}{dz^2} dz \right] dr = 0$

En considérant la dérivée seconde comme constante pour l'intégration on obtient bien

$$B_z(r, z) = B(z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2B(z)}{dz^2}$$



I- 2.2.e.

On calcule la dérivée seconde sans difficulté majeure pour obtenir finalement

$$B_r(r, z) = B_0 \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{r^2}{4R^2} B_0 \left[15 \frac{z^2}{R^2} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-\frac{7}{2}} - 3 \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-\frac{5}{2}} \right]$$

Application : Dans le plan de la spire, soit $z = 0$,

$$B_0(r) = B_0 + 3 \frac{r^2}{4R^2} B_0$$

Si cette expression représente au maximum 1,01 B_0 il faut imposer un écart maximum $r = \frac{0,2R}{\sqrt{3}}$

II ETUDE DE LA RESISTANCE DE LA BOBINE.

II- 1. Résistance statique.

La résistance d'un fil est donnée par la formule: $R = \frac{l}{sS} = \frac{N2pR_0}{spr^2}$ A-N: $R = 0,93 \Omega$

II- 2. Résistance en haute fréquence : Effet de peau ou effet Kelvin.

II- 2.1.

En considérant une dépendance temporelle des fonctions sinusoïdales de la forme $e^{i\omega t}$ on écrit

$$\{\vec{E} \Rightarrow \vec{J}\}$$

L'identité opérationnelle: $\text{rot} \text{rot} L = \text{grad} \text{div} L - \Delta L$ entraîne $\text{grad} \text{div} \vec{J} - \Delta \vec{J} = -i\omega \sigma_0 \vec{J}$

Or $\text{div} \vec{J} = \text{div} \{ \vec{E} = 0 \}$, il reste donc $\Delta \vec{J} - i\omega \sigma_0 \vec{J} = 0$

La géométrie imposant une densité $\vec{J} = j(x) \cdot \vec{e}_z$ l'équation obtenue conduit bien à :

$$\frac{d^2 j}{dx^2} - K^2 j = 0 \text{ avec } K^2 = i\omega \sigma_0$$

II- 2.2.

La constante K^2 peut encore s'écrire: $K^2 = i\omega \sigma_0 = (1 + i)^2 \frac{\sigma_0}{2d^2}$ avec $d = \sqrt{\frac{2}{\sigma_0}}$

D'après l'équation du courant, K^2 est homogène à $1/x^2$ donc d à une longueur.

Les solutions de l'équation du courant sont alors: $j(x) = C_1 e^{(1+i)\frac{x}{d}} + C_2 e^{-(1+i)\frac{x}{d}}$

Mais la fonction $j(x)$ est nécessairement paire, les constantes d'intégration sont égales $\Rightarrow C_1 = C_2 = C/2$

Ainsi la solution est-elle simplement: $j(x, t) = C e^{i\omega t} \text{ch}[(1 + i) \frac{x}{d}]$

A-N: On trouve successivement: $d = 9,2 \text{ mm}; 0,92 \text{ mm}; 92 \mu\text{m}; 9,2 \mu\text{m}$

II- 2.3.

L'intensité totale s'exprime par l'intégrale $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$; l'élément de surface retenu étant une bande $a \cdot dx$ on a:

$$I = 2 \int_0^{\frac{e}{2}} j(x, t) \cdot a dx = \frac{2Cad}{(1+i)} e^{i\omega t} [\text{sh}[(1 + i) \frac{x}{d}]]_0^{\frac{e}{2}}, \text{ soit finalement } I = \frac{2Cad}{(1+i)} e^{i\omega t} \text{sh}[\frac{(1+i)e}{2d}]$$

Cette dernière équation détermine la constante d'intégration C: $j(x, t) = \frac{(1+i)I}{2ad \text{sh}[\frac{(1+i)e}{2d}]} \text{ch}[(1 + i) \frac{x}{d}]$

Ce qui permet de calculer les amplitudes réelles via l'opération: $j \cdot j^*$.

$$j \cdot j^* = \frac{II \cdot (1+i)(1-i)}{4a^2 d^2 \operatorname{sh}[\frac{(1+i)e}{2d}] \operatorname{sh}[\frac{(1-i)e}{2d}]} \operatorname{ch}[\frac{(1+i)x}{d}] \cdot \operatorname{ch}[\frac{(1-i)x}{d}] = \frac{II}{2a^2 d^2} \frac{\operatorname{ch}[\frac{2x}{d}] + \cos[\frac{2x}{d}]}{\operatorname{ch}[\frac{e}{d}] - \cos[\frac{e}{d}]}$$

Le dernier résultat s'obtenant grâce aux formules aimablement communiquées dans l'énoncé.

On peut alors conclure en écrivant: $R_e[j(x, t)] = \sqrt{j \cdot j} \cdot \cos wt$ et $R_e[E(x, t)] = \frac{1}{s} \sqrt{j \cdot j} \cos wt$

II- 2.4.

La densité volumique de puissance moyenne est $P_v = \langle \cos^2 wt \rangle R_e[\vec{j}] \cdot \operatorname{Re}[\vec{E}] = \frac{1}{2s} j \cdot j$

L'intégration permet de calculer la puissance Joule dégagée dans une longueur $L = 1$ unité de ruban

$$P = \iiint \frac{1}{s} j \cdot j \, dV = \frac{2aII}{4sa^2 d^2 [\operatorname{ch}[\frac{e}{d}] - \cos[\frac{e}{d}]]} \int_0^{\frac{e}{2}} [\operatorname{ch}[\frac{2x}{d}] + \cos[\frac{2x}{d}]] dx$$

$$P = \frac{LII}{4sad} \frac{[\operatorname{sh}[\frac{e}{d}] + \sin[\frac{e}{d}]]}{[\operatorname{ch}[\frac{e}{d}] - \cos[\frac{e}{d}]]}$$

que l'on identifie à l'expression classique $P = R \cdot I_{eff}^2 = \frac{1}{2} RII$

$$\frac{R}{L} = \frac{1}{2sad} \frac{\operatorname{sh}[\frac{e}{d}] + \sin[\frac{e}{d}]}{\operatorname{ch}[\frac{e}{d}] - \cos[\frac{e}{d}]}$$

En régime continu: $w \rightarrow 0$ donc $d \rightarrow \infty$ et $\frac{R}{L} \rightarrow \frac{1}{2sad} \frac{2\frac{e}{d}}{[1+0,5[\frac{e}{d}]^2 - 1+0,5[\frac{e}{d}]^2]} = \frac{1}{sae}$

Ce qui est le résultat attendu.

Remarque: $w \rightarrow \infty$ donc $d \rightarrow 0$ $\frac{R}{L} \rightarrow \frac{1}{2sad} \rightarrow \infty$

La résistance devient infinie en HF

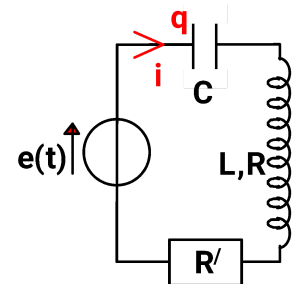
III CIRCUIT RESONNANT.

III- 1. Equation différentielle.

La définition de l'intensité et la loi des mailles donnent:

$\{ \Rightarrow \{$

En effectuant le produit membre à membre (1)x(2) et en ordonnant, on introduit des termes homogènes à des puissances, dont l'interprétation est immédiate.



$$e \, idt = L \, idi + \frac{1}{C} q \, dq + (R + R') i^2 dt$$

E fournie par le générateur = variations d'énergies de la bobine et du condensateur + pertes par effet Joule

III- 2. Réponse fréquentielle du circuit. Facteur de qualité.

III- 2.1.

Le facteur de qualité Q est posé égale à: $Q = \frac{1}{R+R'} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{Lw_0}{R+R'} = \frac{1}{(R+R')Cw_0}$ pour un circuit série.

On montre que $Q = \omega_0 / \Delta\omega$; où $\Delta\omega$ est la bande passante à - 3dB. Q caractérise donc l'acuité de la résonance.

On montre aussi que $Q/2\pi$ est égal au quotient de l'énergie moyenne sur l'énergie dissipée lorsque $\omega = \omega_0$.

Si le générateur délivre une tension sinusoïdale d'expression complexe $e(t) = E_0 e^{j\omega t}$ alors en régime forcé les réponses en intensité et en charge auront la même dépendance temporelle.

(N-B: Pour des raisons de cohérence avec la suite E_0 est la valeur maximale et non efficace)

Les équations différentielles deviennent $\{$

Soit encore avec les paramètres Q et ω_0 $\{$

La résonance correspond à la situation fréquentielle où l'amplitude de la réponse est maximale.

- Résonance d'intensité: $[(\frac{w_0^2}{w} - w)^2 + (\frac{w_0}{Q})^2]^{-\frac{1}{2}}$ maximal $\Rightarrow w = w_0$
- Résonance de charge: $[(w_0^2 - w^2)^2 + (\frac{w_0 w}{Q})^2]^{-\frac{1}{2}}$ maximal $\Rightarrow w = w_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

La résonance de charge n'existe que pour $Q > (1/2)^{1/2}$. On peut ainsi conclure qu'une charge maximale ne correspond pas à une intensité maximale. Les deux résonances sont différentes par la position de la fréquence vis à vis de la fréquence propre.

III- 2.2.

Aux bornes de R' : $V_{R'} = R'i$ donc $H = \frac{R'e^{j\omega t}}{L[\frac{\omega_0}{Q} - j(\frac{\omega_0}{w} - w)]} = \frac{QR'e^{j\omega t}}{Lw_0[1 - jQ(\frac{\omega_0}{w} - \frac{w}{\omega_0})]}$

(On mesure en fait une valeur efficace, mais comment définir alors la phase et le module de H !)

Le gain vaut

$$G_{dB} = 20\log \frac{QR'}{Lw_0} - 10\log[1 + Q^2(\frac{\omega_0}{w} - \frac{w}{\omega_0})^2]$$

$$G_{dB} = 20\log \frac{R'}{R+R'} - 10\log[1 + Q^2(\frac{\omega_0}{w} - \frac{w}{\omega_0})^2]$$

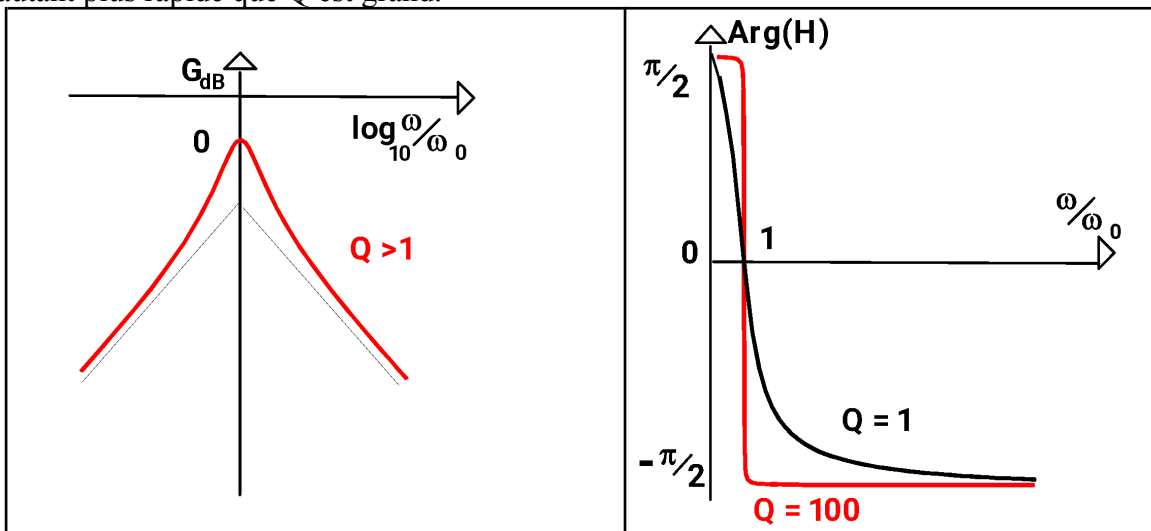
Le maximum correspond à $\omega = \omega_0$ et vaut $(G_{dB})_{max} = 20\log \frac{R'}{R+R'} < 0$

Les asymptotes ont pour équations:

En B-F: $G_{dB} = 20\log \frac{R'}{Q(R+R')} - 20\log \frac{\omega_0}{w}$ En H-F : $G_{dB} = 20\log \frac{R'}{Q(R+R')} - 20\log \frac{w}{\omega_0}$

Les asymptotes se coupent en $\omega = \omega_0$ et $(G_{dB})_0 = 20\log \frac{R'}{Q(R+R')}$; ce point d'intersection est donc au dessous du maximum lorsque $Q > 1$ (cas de la figure)

Les diagrammes sont ceux d'un filtre passe-bande du second ordre qui s'amincit pour devenir un pic lorsque q augmente de plus en plus. Le diagramme de phase est un saut de phase d'autant plus rapide que Q est grand.



III- 2.3..

On peut utiliser un montage avec un oscillo, si possible analogique.

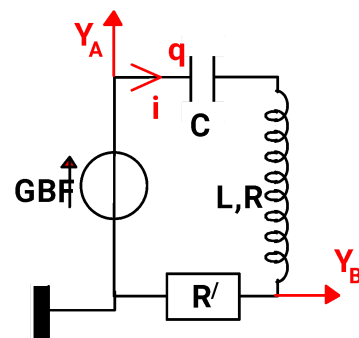
Les branchements se faisant comme indiqué.

L'utilisation d'un montage suiveur améliore la qualité en s'affranchissant de la résistance de sortie du GBF

L'amplitude des courbes permet de calculer le module tandis que le déphasage permet de calculer l'argument de H.

Toutefois l'utilisation d'un multimètre gradué en dB est plus pratique pour le diagramme de Bode..

De même l'emploi d'un fréquencemètre améliore la qualité des mesures de fréquences.



IV COUPLAGE DE DEUX CIRCUITS.

IV- 1.

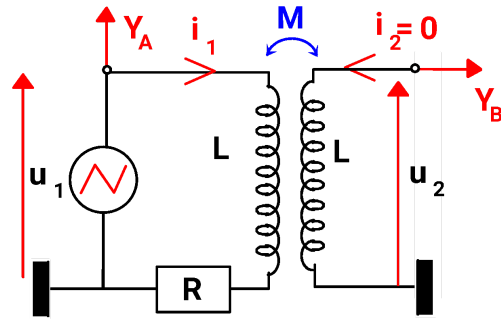
IV- 1.1. Etude expérimentale.

Les notations sont indiquées sur le schéma.

Les équations des circuits sont:

{
D'où l'on déduit

$$\frac{du_1}{dt} = L \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R \frac{di_1}{dt} = \frac{1}{M} [L \frac{du_2}{dt} + R u_2]$$



Le signal appliqué étant triangulaire $\frac{du_1}{dt} = e\alpha$ avec $\varepsilon = \pm 1$; Posons $k = \frac{M}{L}$ et $t = \frac{L}{R}$ ce qui entraîne

$$e\alpha k = \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{t} u_2 \Rightarrow u_2(t) = U_0 e^{-\frac{t}{t}} + e\alpha k t$$

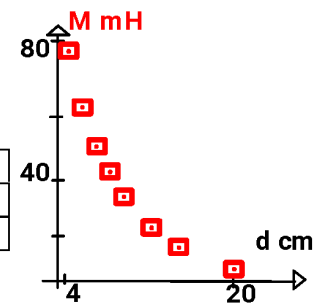
Or le graphe $u_2(t)$ ne fait pas apparaître de parties exponentielles, on peut donc légitimement conclure que la constante de temps τ est suffisamment courte vis à vis de la période du triangle que l'on peut la négliger.

On trouve ainsi que l'amplitude crête à crête de la tension $u_2(t)$ vaut: $A = 2\alpha k = 2\alpha \frac{M}{R}$

Connaissant R et α la mesure de A donne la mutuelle.

A-N: $\alpha = 2,8 \cdot 10^3 \text{ V.s}^{-1}$. Donc $M = A/56 \text{ mH}$, A en mV (et si $L/R \ll 0,2 \text{ ms}$ cad $L \ll 20 \text{ mH}$)

d (cm)	4	5	6	7	8	10	12	16	20
A (mV)	43	33	26	21,5	17	11,5	8	4,12	2,4
M (mH)	0,77	0,59	0,46	0,38	0,30	0,20	0,14	0,07	0,043



IV- 1.2. Calcul approché de l'inductance mutuelle de deux bobines coaxiales.

IV- 1.2.a.

Compte tenu des résultats antérieurs, en particulier l'expression du champ axial (I 2 2 d)

$$B_z(r, z) = B_0 \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{r^2}{4R^2} B_0 \left[15 \frac{z^2}{R^2} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-\frac{7}{2}} - 3 \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-\frac{5}{2}}\right]$$

On écrira que le flux qui traverse les N spires de la seconde bobine est

$$MI = N \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \int_0^R N B_z(r, d) \cdot 2\pi r dr \quad \text{en se rappelant que} \quad B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

$$M = \mu_0 N^2 p \frac{R}{2} \left(1 + \frac{d^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}} - \mu_0 N^2 p \frac{R}{16} \left[15 \frac{d^2}{R^2} \left(1 + \frac{d^2}{R^2}\right)^{-\frac{7}{2}} - 3 \left(1 + \frac{d^2}{R^2}\right)^{-\frac{5}{2}}\right]$$

IV- 1.2.b.

A-N: $M = 42,7 \mu\text{H}$; le développement à l'ordre 2 est très performant à cette distance.

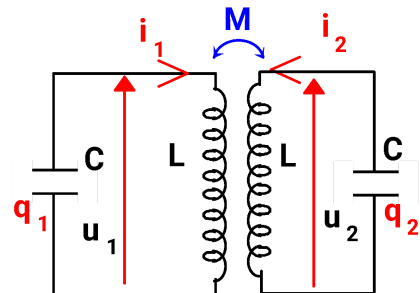
IV- 2. Etude de deux systèmes identiques couplés.

IV- 2.1

En négligeant les résistances, les équations des circuits sont:

{

$$\text{Avec aussi } i_1 = \frac{dq_1}{dt}; i_2 = \frac{dq_2}{dt}$$



Soit finalement un système différentiel que l'on peut écrire sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix} = -C [L \ M \ M \ L] \cdot \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 & \ddot{q}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 & \ddot{q}_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{C(L^2 - M^2)} [L \ -M \ -M \ L] \cdot \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix}$$

Les pulsations propres correspondent aux valeurs vérifiant $\ddot{q}_i = -\Omega^2 q_i$

Il suffit alors de rechercher les valeurs vérifiant : $-\Omega^2 \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{C(L^2 - M^2)} [L \ -M \ -M \ L] \cdot \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix}$

Les solutions doivent conduire à un déterminant nul: $(\frac{L}{C(L^2-M^2)} - \Omega^2)^2 - \frac{M^2}{C^2(L^2-M^2)^2} = 0$

Les solutions (positives) de cette équation bicarrée sont:

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{1}{C(L-M)}} \Omega_2 = \sqrt{\frac{1}{C(L+M)}}$$

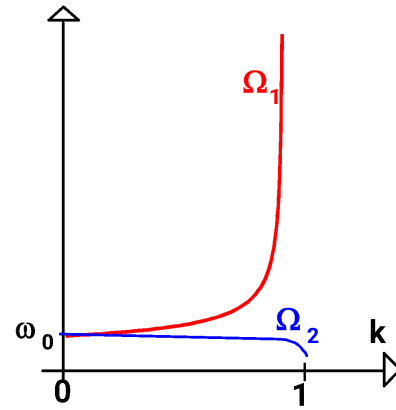
Avec le paramètre de couplage $k = M/L$ et la pulsation propre

ω_0 les expressions sont

$$\Omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{(1-k)}} \Omega_2 = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{(1+k)}}$$

La représentation graphique en fonction du couplage est indiquée ci-contre.

Les modes propres sont les solutions d'une équation d'oscillateur harmonique de pulsation Ω_1 ou Ω_2 .



Soit $q_{1,0} = A_1^0 \cos \Omega_1 t + B_1^0 \sin \Omega_1 t$ et $q_{2,0} = A_2^0 \cos \Omega_2 t + B_2^0 \sin \Omega_2 t$

Les vecteurs propres de la matrice sont de la forme: $\Omega = \Omega_1 \rightarrow (1 \ -1)$; $\Omega = \Omega_2 \rightarrow (1 \ 1)$.

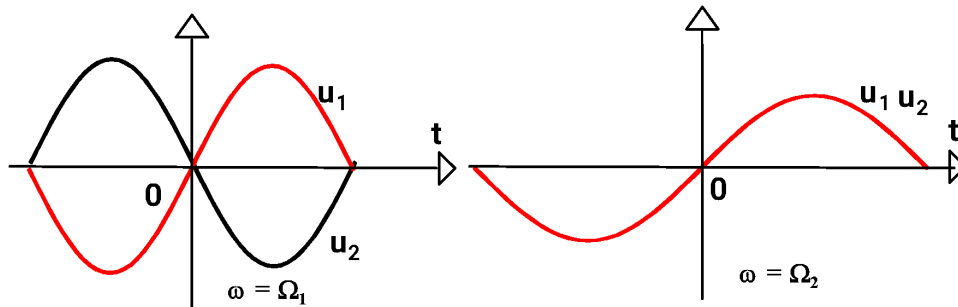
La solution générale s'obtient donc par le changement de base: $(q_1 \ q_2) = \frac{1}{2} [1 \ 1 \ -1 \ 1] \cdot (q_{1,0} \ q_{2,0})$

Ce qui donne

$$q_1 = \frac{q_{1,0} + q_{2,0}}{2} \quad q_2 = \frac{-q_{1,0} + q_{2,0}}{2}$$

Les tensions aux bornes des bobines valent $u_1 = -\frac{q_1}{C} \quad u_2 = -\frac{q_2}{C}$

Suivant le mode propre envisagé les tensions sont parfaitement sinusoïdales de même pulsation mais elles sont identiques dans le mode Ω_2 et sont opposées dans le mode Ω_1 .



IV- 2.2.

En tenant compte des résistances les équations des circuits sont:

$$\{ \Rightarrow \{$$

Ce qui se résout en faisant la somme et la différence et en posant: $S = q_1 + q_2 \quad D = q_1 - q_2$

On trouve ainsi: $\{ \Rightarrow \{$

$$\text{Avec pour paramètres} \quad s_1 s_2 = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4 \frac{(L+M)}{C}}}{2(L+M)} d_1 d_2 = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4 \frac{(L-M)}{C}}}{2(L-M)}$$

- A $t=0$ les courants sont nuls (présence de L oblige) donc: $S' = \frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt} = D' = \frac{dq_1}{dt} - \frac{dq_2}{dt} = 0$
- A $t=0$ les condensateurs sont déchargés, donc $S = q_1 + q_2 = D = q_1 - q_2 = 0$

Ces conditions sont vérifiées si on écrit: $\{$

Les tensions aux bornes des bobines sont $\{$

A-N : $M = 50 \mu H$ (IV-1.2.b) ; $M/L = 0,1 \Rightarrow L = 500 \mu H$, de plus $R = 1 \Omega$ $C = 4,7 \text{ nF}$

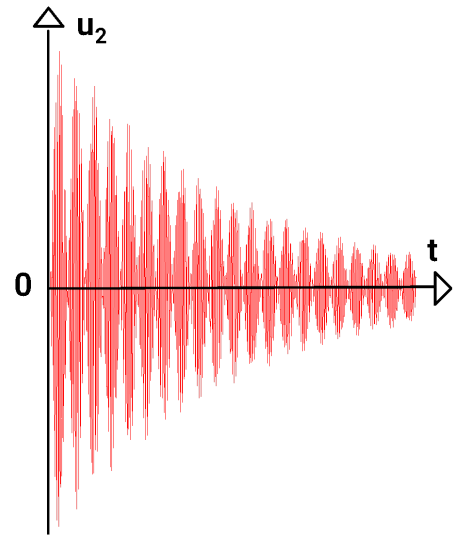
On trouve: $s_1 s_2 = -\frac{1}{t_1} \pm i w_1 = 909,9 \pm i 621,9 \cdot 10^3 d_1 d_2 = -\frac{1}{t_2} \pm i w_2 = -1111,1 \pm i 687,6 \cdot 10^3$

$$\frac{2u_2}{E_0} = \frac{1}{d_1 - d_2} [d_2 e^{d_1 t} - d_1 e^{d_2 t}] - \frac{1}{s_1 - s_2} [s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}]$$

Malgré les apparences le résultat est nécessairement réel.
En effet en développant l'expression il vient:

$$\frac{2u_2}{E_0} = e^{\frac{-t}{t_1}} \left[\frac{\sin w_1 t}{w_1 t_1} + \cos w_1 t \right] - e^{\frac{-t}{t_2}} \left[\frac{\sin w_2 t}{w_2 t_2} + \cos w_2 t \right]$$

On a une différence de deux sinusoïdes amorties; mais les constantes d'amortissement et les périodes sont voisines. On a donc des battements dont l'amplitude est décroissante. Le graphe a l'allure indiquée ci-contre.



FIN