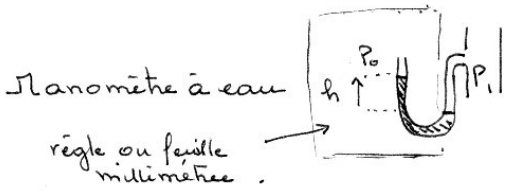
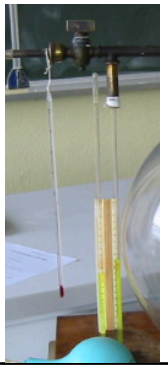
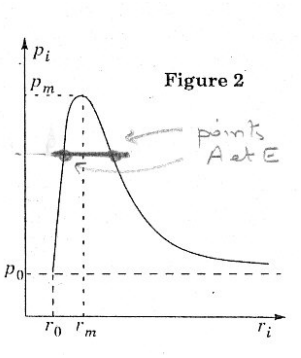
CENTRALE PC1 2003

ECHANGES ENTRE UNE GROSSE BULLE ET UNE PETITE BULLE

1	IA	On peut utiliser un **manomètre à eau** : un tube coudé Au lycée, vous avez vu un tel manomètre sur l'expérience de Clément et Desormes par exemple.  
2	IB	Lorsque le robinet va s'ouvrir, les pressionsvont tendre à s'égaliser dans les deux bulles. Le gaz s''écoule de la bulle de plus forte pression vers la bulle où la pression est la plus faible. Or , comme $p-p_0$ est inversement proportionnel au rayon de la bulle : **La petite bulle (grande pression) se vide dans la grande (faible pression)**
2	IC1	**Définition du potentiel thermodynamique :** *on appelle potentiel thermodynamique d'un système soumis à un certain nombres de contraintes (détaillées plus loin) , une fonction φ , dépendant des paramètres d'état du système, et éventuellement des contraintes extérieures, telle que* *- lors d'une évolution spontanée du système, cette fonction φ tende à diminuer,* *- l'équilibre thermodynamique correspondant à un minimum de φ.*
2	IC2	$\Delta U = U_F - U_I = W + W'$ Q $Q = T_0 \Delta s_{éch} \leq T_0 \Delta S$ $\mathbf{W \geq [U_F - T_0 S_F + P_0 V_F] - [U_I - T_0 S_I + P_0 V_I]}$ Si le système évolue sans travail autre que celui des forces de pression , la relation précédente devient : $\mathbf{G^*_F \leq G^*_I}$: la fonction G* diminue donc au cours de l'évolution du système : à l'équilibre G* est minimale. La fonction G* est donc un <u>potentiel thermodynamique</u> pour le problème envisagé.
1	IC3a	**U, S , et V sont extensifs** $U = U_1 + U_2 + U_{m1} + U_{m2}$ $\Rightarrow$ $G^* = U - TS + P_0 V$ $S = S_1 + S_2 + S_{m1} + S_{m2}$ **$dG^* = dU - TdS - SdT + P_0 dV$** $V = V_1 + V_2$ Avec $dU_m = TdS_m + \sigma d\Sigma_m$ d'où $dG^* = dU_1 + dU_2 - TdS_1 - TdS_1 + S_1\, dT + S_2\, dT + \sigma d\Sigma_{m1} + \sigma d\Sigma_{m2} + P_0\, dV_{1+} P_0\, dV_2$
1	IC3b	$\Sigma = 8\,\pi\, r^2$ **$d\Sigma = 16\,\pi\, r\, dr$** et **$dV = 4\,\pi\, r^2\, dr$** $+\sigma d\Sigma_{m+} P_0\, dV = (\, 4\sigma/r + P_0\,)\, dV = PdV$

1	IC3c	En égalant la différentielle de G :$dG_i = dU_i - TdS_i - S_i\,dT + P_i\,dV_i + VdP_i$ avec l'expression donnée dans l'énoncé $dG_i = -S_i\,dT + VdP_i + \mu_i dN_i$ on obtient **$dU_i = TdS_i + -P_i\,dV_i + \mu_i dN_i$** En remplaçant dG* , on obtient $dG^* = \mu_1 dN_1 + \mu_2 dN_2$
1	IC3d	$dG^* = \mu_1 dN_1 + \mu_2 dN_2 = f(T)(dN_1+dN_2) + RT(\ln p_1\,dN_1 + \ln p_2\,dN_2)$ or **$dN_1 = -dN_2$** , d'où $dG^* = RT\ln(p_1/p_2)\,dN_1$
4	IC4	**2 équations de Laplace** (1) $p_1 - p_0 = \frac{4\sigma}{r_1}$ (2) $p_2 - p_0 = \frac{4\sigma}{r_2}$ **2 équations d'état** (3) $p_1(\frac{4}{3}\pi r_1^3) = N_1\,RT$ (4) $p_2(\frac{4}{3}\pi r_2^3) = N_2\,RT$ **Equation de conservation de la matière** (5) $N_1+N_2=N$ = constante (1) => **$dp_1/dr_1 = -4\sigma/r_1^2 < 0$** (1) dans (3) => $(p_0 + \frac{4\sigma}{r_1})(\frac{4}{3}\pi r_1^3) = N_1\,RT$ => $N_1 = (\frac{4\pi}{3RT})(p_0 r_1^3 + 4\sigma r_1^2)$ $\frac{dN_1}{dr_1} = (\frac{4\pi}{3RT})(3\,p_0 r_1^2 + 8\sigma r_1) > 0$ **donc** Quand **$r_1$croît** : **P_1 décroît, N_1 croît** (5) => **N_2 décroît** etcomme $dN_2/dr_2 > 0$, **r_2 décroît** et $dp_2/dr_2 < 0$ **p_2 croît**
2	IC5	Si $r_1 > r_2$, alors $p_1 < p_2$ donc or $dG^* = RT\ln(p_1/p_2)\,dN_1 < 0$ => $dN_1 > 0$ **N_1 va croître**, **la grosse bulle va croître au détriment de la petite** **Un état initial r1=r2 est un équilibre instable**
1	ID1	Quand on gonfle un ballon, il faut "souffler fort" au début (forte variation de pression nécessaire pour obtenir une faible variation de r) , après , cela devient plus facile
2	ID2a	
2	ID2b	**L'état final correspond à un minimum de G*** **Donc A ou E dans le cas a) et F dans le cas b)**
2	ID3	$(p_0 + K(\frac{1}{r_i} - \frac{r_0^6}{r_i^7})(\frac{4}{3}\pi r_i^3) = N_i\,RT$ Comme au IC4 , on écrit

		Soit $N_i = \frac{4\pi}{3RT}(p_0 r_i^3 + K r_i^2 - \frac{K r_0^6}{r_i^4})$ donc en dérivant $\frac{dN_i}{dr_i} = \frac{4\pi}{3RT}(p_0 3r_i^2 + 2Kr_i + 4Kr_0^6 r_i^3) > 0$ Si la première bulle atteint r_m, alors $N_1 = p_m(4\pi r^3/3)/RT$ et $N_2 = Ne - N_1 = N_1$ Les deux bulles ont alors même rayon. Le comportement est analogue aux bulles de savon dans le **cas a)** : l'état final est alors constitué de deux ballons de rayons différents  Figure 2

Centrale PCI 2003 Problème II
Le phénomène de LEIDENFROST

IIA Approche qualitative

	IIA	Plus la plaque est chaude, plus l'énergie transférée sera importante, donc plus τ est petit.

IIB Etude thermodynamique

	IIB1	L'équation de la chaleur s'écrit : $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu_v C_v}\Delta T = D_{th}\,\Delta T$
	IIB2	$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] >> \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right]$ si $\frac{T}{z^2_{caractéristique}} >> \frac{T}{r^2_{caractéristique}}$ => $\left[\frac{r_{caractéristique}}{z_{caractéristique}}\right]^2 >> 1$ Ici, la dimension caractéristique selon z est e et la dimension caractéristique selon r est a Le résultat est valide si $\left[\frac{r_{caractéristique}}{z_{caractéristique}}\right]^2 = \left[\frac{a}{e}\right]^2 >> 1$
	IIB3	Equation la chaleur => $\frac{T}{\tau^*} = D_{th}\frac{T}{e^2}$ => $\tau^* = \frac{e^2}{D_{th}}$ Le régime permanent est atteint " instantanément" pour $\tau^* << \tau_1$
	IIB4	$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 => \Delta T = 0 => \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$

		qui s'intègre en $T = \alpha z + \beta$ avec les C. Lim $\begin{cases} T(r,0,t) = T_p \Rightarrow \beta = T_p \\ T(r,e,t) = T_e \Rightarrow \alpha = \dfrac{Te - T_p}{e(t)} \end{cases}$ donc $T(r,z,t) = (Te - T_p)\dfrac{z}{e(t)} + T_p$ Remarque : bien qu'on ait pris $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$, on a une solution dépendant de t par e(t)
	IIB5	$\vec{j} = -\lambda \, \vec{\text{grad}}\, T \Rightarrow j_z = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial z} = -\dfrac{\lambda}{e(t)}(T_e - T_p)$
	IIB6	$\Phi = \iint j_z \, dS = -j_z \, \pi a^2 \quad \Phi = \dfrac{\pi a^2 \lambda}{e(t)}(T_p - T_e)$ La résistance thermique est $R_{th} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{e}{S} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{e}{\pi a^2} = \dfrac{\Phi}{(T_p - T_e)}$
	IIB7	a)Système fermé = la couche d'eau liquide qui va se vaporiser entre t et t+dt , de masse $D_m dt$ L'enthalpie de cette couche varie de $dH = (D_m \, dt) l_v$ Elle reçoit pendant dt une énergie thermique $\delta Q = \Phi dt = \dfrac{\pi a^2 \lambda}{e(t)}(T_p - T_e)dt$ Et pour cette transformation isobare : $dH = \delta Q$ Donc $D_m = \dfrac{\pi a^2 \lambda (T_p - T_e)}{e(t) l_v}$ b)Le rayon de la goutte passe donc de a(t) à a(t+dt) , la masse D_m dt s'étant évaporée : $D_m dt = \mu_l\left(\dfrac{2\pi a(t)^3}{3} - \dfrac{2\pi a(t+dt)^3}{3}\right) = -\dfrac{2\pi}{3}\mu_l \dfrac{da^3}{dt}dt \Rightarrow \Rightarrow D_m = -2\pi\mu_l a^2 \dfrac{da}{dt}$ $\dfrac{da}{dt} = -\dfrac{D_m}{2\pi\mu_l a^2} = -\dfrac{\pi a^2 \lambda (T_p - T_e)}{e(t) l_v}\dfrac{1}{2\pi\mu_l a^2} = -\dfrac{\lambda (T_p - T_e)}{2\mu_l \, e(t) l_v}$

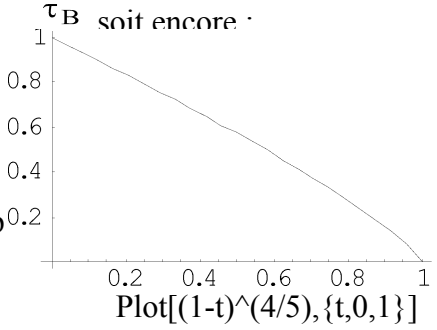
IIC Modèle A

	IIC1	a) $\delta m = \mu_v (\pi a^2 v_0 dt)$ b) $\vec{P}(t+dt) = \delta m(-v_0 \vec{e}_z)$ et $\vec{P}(t) = \vec{0} \Rightarrow$ $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \dfrac{\delta m}{dt}(-v_0 \vec{e}_z) = -\mu_v \, \pi a^2 {v_0}^2 \vec{e}_z$
	IIC2	$\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \Sigma \vec{f}ext = \vec{P}oids = \mu_l \dfrac{2\pi}{3} a^3 \vec{g} \Rightarrow \mu_l \dfrac{2\pi}{3} a^3 \vec{g} = \mu_v \pi a^2 {v_0}^2 \Rightarrow$ $v_0 = \sqrt{\dfrac{2ga\mu_l}{3\mu_v}}$
	IIC3	$Dm = \dfrac{-\delta m}{dt} = \mu_v \pi a^2 v_0$ et $D_m = \dfrac{\pi a^2 \lambda (T_p - T_e)}{e(t) l_v}$ (IIB7)

		$\mu_v \pi a^2 \sqrt{\frac{2ga\mu_l}{3\mu_v}} = \pi a^2 \frac{\lambda(T_p - T_e)}{e l_v}$ => $e = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{3\lambda^2 (T_p - T_e)^2}{2g\mu_l \mu_v l_v^2}}$
	IIC4	$\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda(T_p - T_e)}{2\mu_l e l_v} = -\frac{\lambda(T_p - T_e)}{2\mu_l l_v} \sqrt{a} \sqrt{\frac{2g\mu_l \mu_v l_v^2}{3\lambda^2 (T_p - T_e)^2}}$ => $\frac{da}{dt} = -\sqrt{a} \sqrt{\frac{g\mu_v}{6\mu_l}}$ Cette équation s'intègre en : $\frac{da}{\sqrt{a}} = -\frac{dt}{\tau}$ soit $\sqrt{a} - \sqrt{a_0} = -\frac{1}{2}(\frac{t-0}{\tau})$ Donc $a(t) = \left[\sqrt{a_0} - \frac{t}{2} \sqrt{\frac{g\mu_v}{6\mu_l}} \right]^2$
	IIC5	$\tau_A = \frac{2\sqrt{a_0}}{\sqrt{\frac{g\mu_v}{6\mu_l}}}$ Durée de vie de la goutte : => τ_A= 1.85s
	IIC6	• La durée de vie obtenue est très inférieure aux durées observées ($\tau \cong$ 50s) • $\tau_A$ne dépend pas de le température, contrairement à l'expérience (fig 6) • l'allure de la courbe a(t) n'est pas celle de la figure 5 (par exemple , da/dt ne tend pas vers l'infini pour $\tau=\tau_A$

IID Modèle B

	IID1	La masse vaporisée par unité de temps : $\mu_v \pi r^2 v_0$ est éjectée parle face latérale de ce cylindre Ce flux de masse vaut : $\iint \mu_v \vec{v} d\vec{s}) = \mu_v u(r)(2\pi r e)$ => $u(r) = \frac{r}{2e} v_0$
	IID2	a) Pour un écoulement **P**arfait, **H**omogène, **I**ncompressible, **S**tationnaire et **I**rrotationnel , le théorème de Bernouilli s'écrit en négligeant le rôle de la pesanteur: $\frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} = \text{constante} = \frac{p_0}{\mu} + \frac{u(a)^2 + w(e)^2}{2}$ b) En négligeant le terme en w : $\frac{p}{\mu} = \frac{p_0}{\mu} - \frac{u(r)^2 - u(a)^2}{2} \Rightarrow p(r) = p_0 + \mu \frac{v_0^2}{8e^2}(a^2 - r^2)$
	IID3	$\vec{F}_B = \iint p \, d\vec{s} = \iint_{\text{disque de rayon a}} (p(r,z) - p_0) 2\pi r \, dr \, \vec{e}_z$ $\vec{F}_B = \vec{e}_z \int_0^a \mu \frac{v_0^2}{8e^2}(a^2 - r^2) 2\pi r \, dr = \vec{e}_z \mu \frac{2\pi v_0^2}{8e^2} \left[a^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^a$ => $\vec{F}_B = \vec{e}_z \frac{\mu \pi v_0^{2^4} a^4}{16 e^2}$

	IID4	L'équation donnée se met sous la forme : $\left[\frac{a(t)}{a_0}\right]^{5/4} = 1 - \frac{t}{\tau_B}$ soit encore : $\frac{a(t)}{a_0} = \left[1 - \frac{t}{\tau_B}\right]^{4/5}$ Le graphe est donc  Plot[(1-t)^(4/5),{t,0,1}] Avec une la tangente verticale en t= τ_B comme dans l'exp $\tau_B \cong 5$ s <u>Conclusion</u> • On a la bonne allure pour la courbe (tangente verticale) • Le temps est encore nettement plus petit que τ_1 • τ_B dépend de T_p contrairement au modèle A Le modèle n'est pas encore pleinement satisfaisant

II E Modèle C

	IIE1	$\mu_v \frac{\partial u}{\partial t}$ $\mu_v u \frac{\partial u}{\partial r}$ $\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ $\eta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ $\frac{\eta}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$ $\eta \frac{u}{r^2}$ $\mu_v \frac{U}{\tau_1}$ $\mu_v \frac{U^2}{a}$ $\eta \frac{U}{e^2}$ $\eta \frac{U}{a^2}$ $\eta \frac{U}{a^2}$ $\eta \frac{U}{a^2}$ Les trois derniers termes en U/a^2 sont négligeables devant le précédent ($\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$)car e<<a Le terme dépendant du temps est négligeable si : $\left[\mu_v \frac{\partial u}{\partial t}\right] << \left[\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] \Rightarrow \mu_v \frac{U}{\tau_1} << \eta \frac{U}{e^2} \Rightarrow \frac{\mu_v e^2}{\eta \tau_1} << 1$ et le terme $\left[\mu_v u \frac{\partial u}{\partial r}\right] << \left[\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] \Rightarrow \mu_v \frac{U^2}{a} << \eta \frac{U}{e^2} \Rightarrow \frac{\mu_v U e^2}{\eta a} << 1$
	IIE2	P ne dépend que de r (indépendant de z) L'équation (6) s'intègre en $u(z) = (\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial r})\frac{z^2}{2} + \beta z + \gamma$ avec $u(0) = 0 \Rightarrow \gamma = 0$ et $u(e) = 0 \Rightarrow (\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial r})\frac{e^2}{2} + \beta e = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{e}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial r}$ donc $u(z) = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial r}(z - e)z$
	IIE3	$D_v = \int_0^e 2\pi r\, dz\, u(z) = 2\pi r \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial r}\left[\frac{z^3}{3} - e\frac{z^2}{2}\right]_{0 \Rightarrow}^{2}$ $D_v = -\frac{\pi r}{6\eta}\frac{\partial p}{\partial r}e^3$

		notez que $\frac{\partial p}{\partial r} < 0$, donc $D_v > 0$
	IIE4	L'écoulement est incompressible, donc div v = 0 , donc $\frac{\partial (ru)}{\partial r} = 0$ ru est donc indépendant de r Or, d'après IIE2, $r\,u(z) = \frac{1}{2\eta} r \frac{\partial p}{\partial r}(z-e)z$ donc $r\frac{\partial p}{\partial r}$ est indépendant de r $r\,u(z) = \frac{6\eta}{2\eta\pi e^3} D_v (z-e)z \Rightarrow u$ en $\frac{1}{r}$ D_V indépendant de r est bien cohérent avec div v = 0
	IIE5	$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{6\eta D l v}{\pi e^3}\frac{1}{r} \Rightarrow p(r) - p_0 = -\frac{6\eta D l v}{\pi e^3} \ln\frac{r}{a}$ car p(r=a)=p_0
	IIE6	$[D_v] = \text{volume / temps} = L^3\,T^{-1}$ $[\eta] = \text{Pression.Temps (voir données du IIE7 par exemple!)} = \frac{\text{Force}}{L^2} T$ $[a] = [e] = L$ donc $[F] = \left[\frac{3\eta D_v a^2}{e^3}\right] = (\frac{\text{Force}}{L^2} T)\frac{L^3\,T^{-1}}{L} = \text{Force}$
	IIE7	τ_c = 36 s enfin une durée proche du temps expérimental !
	IIE8	a)e = 0.3 mm $\left[\frac{e}{a}\right]^2 = \left[\frac{0.3}{1}\right]^2 \approx \frac{1}{10}$ l'approximation $\left[\frac{e}{a}\right]^2 << 1$ est limite b) $\tau^* = \frac{e^2}{D} = \frac{(310^{-4})^2}{10^{-4}} \approx 10^{-3}$ s $\tau^* << \tau_1$ il est légitime de supposer le régime permanent atteint. c)L'accéleration locale : $\mu_v \frac{\partial u}{\partial t}$ est négligeable si $\frac{\mu_v e^2}{\eta \tau_1} << 1$ $\frac{\mu_v e^2}{\eta \tau_1} = \frac{0.7 * (310^{-4})^2}{10^{-3}\,50} = 1.310^{-6} << 1$ Approximation valide d)L'accélération convective $\mu_v u \frac{\partial u}{\partial r}$ est négligeable si $\frac{\mu_v U e^2}{\eta a} << 1$ $\frac{\mu_v U e^2}{\eta a} = \frac{0.7 * 0.5\ (310^{-4})^2}{10^{-3}\,10^{-3}} \approx 3\ 10^{-2} << 1$ Approximation valide e)Pout t≅ τ_1 , a≅0 donc l'approximation $\left[\frac{e}{a}\right]^2 << 1$ devient fausse