

ЗАДАНИЯ
для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»
9 класс

Место	Страна	Количество очков
1	Россия	16
2	Беларусь	13
3	Болгария	10
4	Польша	9
5	Эстония	3

1. В одной отборочной группе к чемпионату мира по футболу среди юношей играли команды Беларуси, России, Польши, Эстонии и Болгарии. Каждая команда сыграла со всеми остальными по два матча: на своем поле и в гостях. За победу команде начислялось 3 очка, за ничью начислялось 1 очко, за поражение – 0 очков. По окончании турнира команды набрали следующее количество очков:

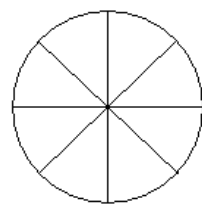
Сколько матчей турнира закончилось вничью?

2. Буквами М, А, Ш, И, Е, Д, В, Ь зашифрованы некоторые цифры, причем разные буквы обозначают разные цифры. Известно, что $M+A+Ш+A+И+М+E+Д+В+E+Д+Ь=34$. Число МАША делится на 5, а число МЕДВЕДЬ – на 125. Какую цифру обозначает буква М?

3. Пусть d_1 и d_2 – диагонали некоторого параллелограмма, S – его площадь.

Доказать, что $d_1^2 + d_2^2 \geq 4S$.

4. Витраж магазина представляет собой круг, разбитый на 8 равных секторов (см. рисунок). На День дружбы народов России и Беларуси владелец магазина решил раскрасить стекла (сектора) витража в цвета государственных флагов России и Беларуси: *белый, синий, красный и зеленый*. Каждый сектор должен быть окрашен в один из цветов и на витраже должны присутствовать все 4 цвета. При этом владелец магазина хочет, чтобы соседние цвета на витраже, соответствовали соседним цветам на флагах России или Беларуси:



- рядом с *зеленым* должен быть только *красный* цвет (как на флаге Беларуси),
- рядом с *белым* должен быть только *синий* цвет (как на флаге России),
- рядом с *красным* должен быть *зеленый* (как на флаге Беларуси) или *синий* (как на флаге России) цвет,
- *синий* цвет должен быть между *белым* и *красным* цветом (как на флаге России).

Сколькими способами владелец магазина может раскрасить стекла витража с соблюдением всех этих требований?

Замечание. Витраж не может вращаться, поэтому раскраски, отличающиеся поворотом круга, считаются различными.

5. В 9«А» классе 23 человека. Некоторые ученики дружат между собой. По исследованию школьного психолога оказалось, что у половины девочек имеется по 2 друга среди одноклассников, у другой половины – по 4 друга среди одноклассников. Каждый мальчик этого класса дружит ровно с тремя одноклассниками. Директор-математик, ознакомившись с этими результатами, сказал, что психолог ошибся. Прав ли директор? (Считаем, что если А дружит с Б, то Б дружит с А).

Пользоваться калькулятором не разрешается

Математика
9 класс. Решения.

1. Решение.

Подсчитаем, сколько всего матчей было сыграно на турнире. Каждая команда сыграла по 8 матчей. Всего матчей было $\frac{5 \cdot 8}{2} = 20$ (делим на 2, поскольку каждый матч подсчитывается дважды: если играли команды A и B , то эта игра идет в зачет каждой из этих команд). В каждом матче разыгрывалось 3 очка (если игра завершилась победой одной из команд) или 2 очка (если игра завершилась вничью). Если бы все игры закончились победой одной из команд, то общее количество очков, набранных командами, было бы равно $3 \cdot 20 = 60$. Каждая игра вничью вычитает из этого числа единицу. Все команды набрали вместе $16+13+10+9+3=51$ очко. Тогда вничью закончились $60 - 51 = 9$ матчей.

Ответ: 9 матчей.

2. Решение.

Поскольку МАША и МЕДВЕДЬ делятся на 5, то либо $A = 5$ и $B = 0$, либо $A = 0$, $B = 5$. Далее, МЕДВЕДЬ делится на 125, поэтому ЕДЬ является числом, кратным 125, причем все цифры должны быть различны. Это могут быть числа 125, 250, 375, 625, 750, 875. Так как в ЕДЬ нет буквы A , то это число не должно содержать одновременно цифры 0 и 5. Остаются числа 125, 375, 625 и 875.

По условию $M+A+Ш+A+И+М+Е+Д+В+Е+Д+Ь = 34$,
т.е. $2(A+М+Е+Д)+Ш+И+В+Ь = 34$. (*)

Оценим наименьшее возможное значение левой части последнего равенства. Левая часть будет минимальна, если среди цифр, обозначенных буквами A, M, E, D будут цифры 0, 1, 2, 3, среди цифр, обозначенных буквами $Ш, И, В, Ь$ будут цифры 4, 5, 6, 7.

Тогда $2(A+М+Е+Д)+Ш+И+В+Ь = 2(0+1+2+3)+4+5+6+7=34$.

Это означает что 34 – это наименьшее значение выражения, стоящего в левой части (*). Следовательно, $A=0$, $B=5$. Так как цифры E и D не могут превышать 3, то ЕДЬ = 125. Значит, $E=1$, $D=2$, тогда $M=3$

Ответ: $M = 3$.

3. Доказательство.

При решении будем использовать известное неравенство $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Пусть, a и b – стороны параллелограмма, тогда по свойству параллелограмма:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2) \geq 4ab \geq 4ab \sin \alpha = 4S,$$

где α - угол между сторонами a и b параллелограмма. Поскольку $\sin \alpha \leq 1$, то

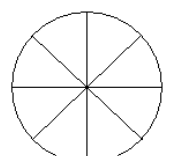
$$d_1^2 + d_2^2 \geq 4S.$$

Что и требовалось доказать.

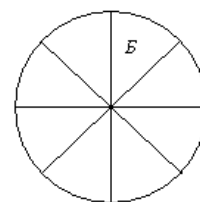
Замечание. Доказать, что $ab \geq S$, можно и без использования формулы $S = ab \sin \alpha$.

Площадь параллелограмма $S = ah$, h – высота параллелограмма, опущенная на сторону a . Легко видеть, что $h \leq b$ (катет короче гипотенузы), равенство достигается, когда параллелограмм является прямоугольником.

4. Решение

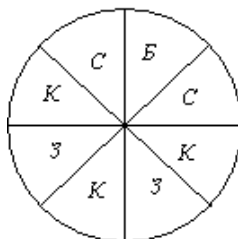


Заметим, что в белый цвет может быть покрашен только один сектор. Если бы было не менее двух белых секторов, то соседними с ними должны были бы быть не менее 4 синих секторов (синий сектор не может быть между двумя белыми). Поскольку синий цвет должен быть между белым и красным, то необходимы еще не менее двух красных секторов. Таким образом, все 8 секторов окажутся окрашены в белый, синий и красный цвета, а зеленого сектора на витраже не будет, что нарушает требование задачи.



Зафиксируем один из секторов и окрасим его в белый цвет (см. рис).

Далее, с учетом всех требований задачи цвета остальных секторов определяются



однозначно

Так как в белый цвет может быть покрашен любой из 8 секторов, то получаем 8 возможных раскрасок.

Ответ: 8 способов.

5. Решение

1 способ.

Из условия задачи следует, что число девочек класса – четно. Значит, число мальчиков – нечетно. Обозначим учеников точками на бумаге. Каждые две точки, которые соответствуют двум друзьям, соединим отрезком. В результате имеем 23 точки. Из каждой точки, соответствующей девочке, выходит 2 или 4 отрезка, из точек, соответствующих мальчикам, выходит по 3 отрезка, причем таких точек нечетное число. Подсчитаем общее количество отрезков. Для этого надо сложить количества отрезков, выходящих из каждой точки и полученную сумму разделить на 2 (каждый отрезок соединяет две точки и, следовательно, подсчитывается дважды). Следовательно, общая сумма количеств отрезков, выходящих из всех точек, должна быть числом четным. Однако в указанной сумме содержится нечетное число нечетных слагаемых (троек), а значит, эта сумма будет нечетной. Получаем противоречие. Значит, описанная ситуация невозможна и директор прав.

Ответ: директор прав.

2 способ.

Задачу легко решить, используя простейшие знания по теории графов. Пусть ученики – это вершины графа, отрезки, соответствующие дружбе двух учеников – ребра графа. Как было установлено в первом способе, число мальчиков в классе нечетно. Следовательно, нечетное число вершин имеют нечетную степень. Однако известно, что в любом графе должно быть четное количество нечетных вершин. Получили противоречие.

Ответ: директор прав.