

## ASPECTS ENERGETIQUES DES DIPOLES

1.  $\delta W = v i dt \Rightarrow \underline{p(t) = v i}$ .

2.  $p(t) = 2 V I \sin(\omega t + \phi) \sin \omega t = -V I \{ \cos(2\omega t + \phi) - \cos \phi \}$ .

$$\underline{P = \langle p(t) \rangle = V I \cos \phi}$$

3. Le dipôle série a une impédance  $Z = R + j X$  et  $v = Z i \Rightarrow v = (R + j X) i$ , égalité entre deux nombres complexes qui  $\Rightarrow$  l'égalité de leurs modules et celle de leurs arguments d'où:

$$V = \sqrt{R^2 + X^2} I \quad \text{et} \quad \cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

[module d'un produit = produit des modules ; argument d'un produit = somme des arguments  $\Rightarrow \arg(v) = \phi = \arg Z$ ].

On en déduit facilement:

$$\underline{P = R I^2}$$

4. Par analogie avec  $p(t)$  et  $P$ , notons  $q(t) = v_q i$ .

$$q(t) = 2 V I \sin(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}) \sin \omega t = -V I \{ \cos(2\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}) - \cos(\phi - \frac{\pi}{2}) \}.$$

$$Q = \langle q(t) \rangle = V I \cos(\phi - \frac{\pi}{2}) = V I \sin \phi.$$

$$v = (R + j X) i \Rightarrow V = \sqrt{R^2 + X^2} I \quad \text{et} \quad \sin \phi = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}} \quad \text{dont on déduit :}$$

$$\underline{Q = X I^2}.$$

5.  $i = Y v$  pour ce dipôle ; soit  $i = (G + j B) v$ . On écrit une nouvelle fois l'égalité entre ces deux nombres complexes d'où:

$$I = \sqrt{G^2 + B^2} V, \quad \cos \phi = \frac{G}{\sqrt{G^2 + B^2}} \quad \text{et} \quad \sin \phi = \frac{-B}{\sqrt{G^2 + B^2}}$$

Les expressions des valeurs moyennes de  $p(t)$  et  $q(t)$  sont inchangées, il vient donc:

$$\underline{P = G V^2 \text{ et } Q = -B V^2}.$$

6.1.  $(d_{s1})$  et  $(d_{s2})$  ont même  $P$  et même  $Q$  lorsqu'ils sont soumis à la même tension  $v$  :

$$P = G_1 V^2 = G_2 V^2 \quad \text{et} \quad Q = -B_1 V^2 = -B_2 V^2 \Rightarrow G_1 = G_2 \quad \text{et} \quad B_1 = B_2 \Rightarrow Y_1 = Y_2 \Rightarrow Z_1 = Z_2.$$

6.2.  $P = G V^2 = R I^2$  avec  $I = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}} V \Rightarrow G V^2 = \frac{R V^2}{R^2 + X^2} \Rightarrow G = \frac{R}{R^2 + X^2}$

$$Q = -B V^2 = X I^2 \text{ avec } I = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}} V \Rightarrow -B V^2 = \frac{X V^2}{R^2 + X^2} \Rightarrow -B = \frac{X}{R^2 + X^2}$$

$$\text{donc } Y = G + j B = \frac{R - j X}{R^2 + X^2} = \frac{1}{R + j X} = \frac{1}{Z} \Rightarrow \underline{Y = \frac{1}{Z}}$$

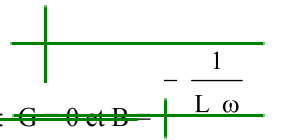
7.  $\underline{G = P / V^2 = 0.065 \text{ S} ; B = -Q / V^2 = -0.112 \text{ S}}$

$$\text{et } X^2 + R^2 = X^2 (1 + R^2 / X^2) = 1 / Y^2 = 59,31 \Omega^2$$

Le calcul donne :  $\underline{R = 3,85 \Omega \text{ et } X = 6,67 \Omega}$

R et X sont positifs le sinus et le cosinus sont donc positifs, le déphasage  $\phi$  est donc compris entre  $-\pi/2$  et  $+\pi/2$ .

$$\tan \phi = X / R = 1,73 \text{ d'où } \phi = 60^\circ$$



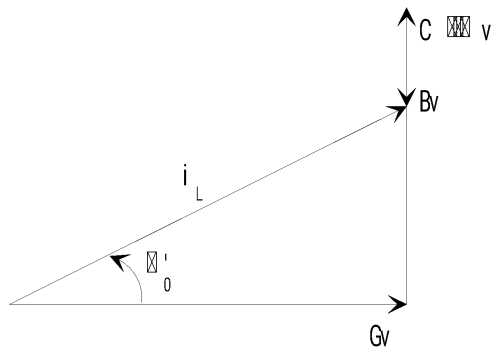
8. Pour une inductance pure ( $Z = j L \omega$ ) :  $G = 0$  et  $B = -\frac{1}{L \omega}$

Pour un condensateur ( $Y = j C \omega$ ) :  $G = 0$  et  $B = C \omega$ .

9. Diagramme de Fresnel :  $v = v_C = v_D$  et  $i_L = i_C + i = (Y_C + Y_D) v = \{ j C \omega + (G + j B) \} v$

$$i_L = \{ G + j (B + C \omega) \} v.$$

remarque : le dipôle de la question 7 a une valeur de B négative (il est donc inductif).



$$\cos \phi'_0 = \frac{G}{\sqrt{G^2 + (B + C \omega)^2}} \quad \text{et}$$

$$\sin \phi'_0 = \frac{B + C \omega}{\sqrt{G^2 + (B + C \omega)^2}}$$

$$\tan \phi'_0 = (B + C \omega) / G \Rightarrow C = \frac{G \tan \phi'_0 - B}{\omega}$$

$$\text{A.N. } C = 412 \mu\text{F pour } \phi'_0 = 15^\circ \text{ et } C = 301 \mu\text{F pour } \phi'_0 = -15^\circ$$

$$I = V \sqrt{G^2 + (B + C \omega)^2}$$

A.N. :  $I = 15,54 \text{ A}$  dans les deux cas (voir diagramme, symétrie par rapport à l'axe des abscisses).

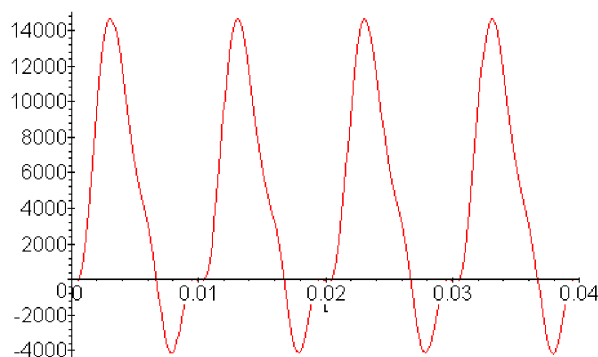
$$10.1. p(t) = v i = 2 V [I_1 \sin \omega t \sin (\omega t + \phi) - I_5 \sin 5 \omega t \sin (\omega t + \phi) - I_7 \sin 5 \omega t \sin (\omega t + \phi)]$$

$$\Rightarrow p(t) = -V [I_1 \{ \cos (2 \omega t + \phi) - \cos \phi \} - I_5 \{ \cos (6 \omega t + \phi) - \cos (-4 \omega t + \phi) \} - I_7 \{ \cos (8 \omega t + \phi) - \cos (-7 \omega t + \phi) \}]$$

$$\frac{2 \pi}{2 \omega} = \frac{T_0}{2} = \frac{1}{2 \nu} = 0,01 \text{ s}$$

La période de  $p(t)$  est donc  $T =$

Tracé de  $p(t)$ :



$$10.2. P = \langle p(t) \rangle = V I_1 \cos \phi = 4042,5 \text{ W.}$$

$$10.3. Q = \langle q(t) \rangle = \langle v_q i \rangle \text{ ce qui revient, encore ici, à changer } \phi \text{ en } \left( \phi - \frac{\pi}{2} \right) \text{ donc les cosinus en sinus.}$$

Par conséquent:  $Q = V I_1 \sin \phi = 7001,8 \text{ VAR}$ .

10.4.  $I_{\text{eff}}^2 = I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \langle i^2 \rangle$

$i^2 = 2 (I_1 \sin \omega t - I_5 \sin 5\omega t - I_7 \sin 7\omega t)^2$ ; la valeur moyenne des trois sinus<sup>2</sup> vaut  $\frac{1}{2}$ ; la valeur moyenne des trois produits de sinus vaut zéro. Par conséquent :

$$I^2 = I_1^2 + I_5^2 + I_7^2$$

A.N.  $I = 35,7 \text{ A}$

10.5.  $i_L = i + i_C$  et  $I_L^2 = \langle i^2 \rangle + \langle i_C^2 \rangle + 2 \langle i i_C \rangle \Rightarrow I_L^2 = I^2 + I_C^2 + 2 \langle i i_C \rangle$  ( $I_{L\text{eff}}^2$  noté  $I_L^2$  ainsi que  $I_{C\text{eff}}^2$  noté  $I_C^2$ )

Il faut donc écrire  $i_C$ .

Le condensateur a la tension  $V$  à ses bornes donc  $i_C = C' \omega V \sqrt{2} \sin(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}) = C' \omega V \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi)$ .

$$\langle i_C^2 \rangle = I_C^2 = (C' \omega V)^2.$$

$$i i_C = \sqrt{2} (I_1 \sin \omega t - I_5 \sin 5\omega t - I_7 \sin 7\omega t) C' \omega V \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi).$$

$$\langle i i_C \rangle = 2 C' \omega V \langle I_1 \sin \omega t \cos(\omega t + \phi) - I_5 \sin 5\omega t \cos(\omega t + \phi) - I_7 \sin 7\omega t \cos(\omega t + \phi) \rangle$$

$$\langle i i_C \rangle = C' \omega V \langle I_1 (\sin(2\omega t + \phi) - \sin \phi) - I_5 (\sin(6\omega t + \phi) - \sin(-4\omega t + \phi)) - I_7 (\sin(8\omega t + \phi) - \sin(-6\omega t + \phi)) \rangle$$

$$\langle i i_C \rangle = -C' \omega V I_1 \sin \phi$$

$$\Rightarrow I_L^2 = I^2 + (C' \omega V)^2 - 2 C' \omega V I_1 \sin \phi \Rightarrow I_L^2 \text{ et, par conséquent } I_L \text{ sera extrême si } d I_L^2 / d C' = 0$$

$$d I_L^2 / d C' = 2 C' V^2 \omega^2 - 2 \omega V I_1 \sin \phi = 0 \Rightarrow \frac{I_1 \sin \phi}{\omega V} = 418 \mu\text{F}$$

11.1. On a établi, à la question 2.  $P = VI \cos \phi$  où  $\phi$  est le déphasage tension/courant donc ici les 3 puissances sont égales et chacune vaut  $VI \cos \phi$ .  $\Rightarrow P = 3 VI \cos \phi$ .

11.2.  $p(t) = 2 VI [\sin(\omega t + \phi) \sin \omega t + \sin(\omega t + \phi + \theta) \sin(\omega t + \theta) + \sin(\omega t + \phi + \psi) \sin(\omega t + \psi)]$

$$p(t) = VI [\cos \phi - \cos(2\omega t + \phi) + \cos \phi - \cos(2\omega t + 2\theta + \phi) + \cos \phi - \cos(2\omega t + 2\psi + \phi)]$$

$$p(t) = 3 VI \cos \phi - [\cos(2\omega t + \phi) + \cos(2\omega t + 2\theta + \phi) + \cos(2\omega t + 2\psi + \phi)] = A + F(t) \text{ avec } A = P \text{ (logique).}$$

$$p(t) = P + [\cos(2\omega t + \phi) + \cos(2\omega t + \phi) \cos 2\theta - \sin(2\omega t + \phi) \sin 2\theta + \cos(2\omega t + \phi) \cos 2\psi - \sin(2\omega t + \phi) \sin 2\psi]$$

$$F(t) = \cos(2\omega t + \phi) [1 + \cos 2\theta + \cos 2\psi] - \sin(2\omega t + \phi) [\sin 2\theta + \sin 2\psi]$$

$$F(t) = 0 \quad \forall t \text{ si } 1 + \cos 2\theta + \cos 2\psi = 0 \text{ et } \sin 2\theta + \sin 2\psi = 0 \Rightarrow \sin 2\theta = -\sin 2\psi \text{ (1) et } \cos 2\theta + 1 = -\cos 2\psi \text{ (2)}$$

$$\Rightarrow \sin^2 2\theta + (1 + \cos 2\theta)^2 = 1 = 2 + 2 \cos 2\theta \Rightarrow \cos 2\theta = -\frac{1}{2}.$$

Si on choisit  $\theta$  et  $\psi$  dans le même intervalle que  $\phi$  :  $2\theta = 120^\circ$  et donc  $\theta = 60^\circ$  alors  $\psi = -60^\circ$  ( $2\psi = -120^\circ \Rightarrow \cos 2\psi = -\frac{1}{2}$ ). et on a alors bien  $1 + \cos 2\theta + \cos 2\psi = 0$  et  $\sin 2\theta + \sin 2\psi = 0$  ( $\sin 120^\circ = -\sin(-120^\circ)$ ).

$$\theta = 60^\circ \text{ et } \psi = -60^\circ \text{ conviennent}$$

