MODUL AJAR DEEP LEARNING
MATA PELAJARAN : MATEMATIKA
BAB: 4 - INTEGRAL

A. IDENTITAS MODUL

Nama Sekolah	**:**	.....
Nama Penyusun	**:**	.....
Mata Pelajaran	**:**	**Matematika**
Kelas / Fase /Semester	**:**	**XII/ F / Genap**
Alokasi Waktu	**:**	**12 JP (6 pertemuan x 2 JP)**
Tahun Pelajaran	**:**	**2025 / 2026**

B. IDENTIFIKASI KESIAPAN PESERTA DIDIK

Peserta didik kelas XII yang mengambil Matematika Tingkat Lanjut umumnya memiliki dasar yang kuat dalam aljabar, trigonometri, dan kalkulus diferensial (turunan). Mereka sudah terbiasa dengan manipulasi ekspresi matematika, pemecahan persamaan, dan konsep laju perubahan. Beberapa peserta didik mungkin sudah pernah melihat sekilas konsep integral di tingkat sebelumnya, namun pemahaman mendalam tentang integral sebagai anti-turunan dan penggunaannya untuk menghitung luas atau volume mungkin belum merata. Keterampilan yang sudah dimiliki meliputi kemampuan berpikir logis, memecahkan masalah matematis, dan menerapkan rumus.

C. KARAKTERISTIK MATERI PELAJARAN

Materi "Integral" adalah jenis pengetahuan konseptual dan prosedural yang memerlukan pemahaman mendalam tentang prinsip-prinsip matematika. Relevansinya dengan kehidupan nyata peserta didik sangat tinggi, terutama dalam bidang fisika, teknik, ekonomi, dan biologi (misalnya, menghitung jarak tempuh, volume benda putar, akumulasi perubahan, atau luas daerah). Tingkat kesulitan materi ini tergolong kompleks karena melibatkan konsep abstrak dan teknik perhitungan yang beragam. Struktur materi akan diawali dengan integral tak tentu sebagai anti-turunan, dilanjutkan dengan integral tentu untuk perhitungan luas dan volume, dan puncaknya adalah penerapan integral dalam berbagai konteks nyata. Integrasi nilai dan karakter akan ditekankan pada ketekunan, ketelitian, berpikir kritis, kreativitas dalam pemecahan masalah, dan apresiasi terhadap keindahan matematika.

D. DIMENSI PROFIL LULUSAN PEMBELAJARAN

Berdasarkan tujuan pembelajaran Bab 4, dimensi profil lulusan yang akan dicapai adalah:

- **Penalaran Kritis:** Peserta didik akan menganalisis masalah, memilih metode integral yang tepat, dan mengevaluasi kebenaran solusi.
- **Kreativitas:** Peserta didik akan memodelkan masalah dunia nyata menggunakan konsep integral dan menemukan solusi inovatif.
- **Kemandirian:** Peserta didik akan mampu memahami dan menyelesaikan soal-soal

integral secara mandiri setelah dibekali konsep.

- **Kolaborasi:** Peserta didik akan bekerja sama dalam kelompok untuk memecahkan masalah integral yang kompleks atau mengerjakan proyek penerapan integral.
- **Komunikasi:** Peserta didik akan mengkomunikasikan ide dan solusi matematis secara jelas, baik lisan maupun tulisan.

DESAIN PEMBELAJARAN

A. CAPAIAN PEMBELAJARAN (CP) NOMOR : 32 TAHUN 2024

Di akhir Bab 4 ini, peserta didik diharapkan mampu:

- **Pengetahuan:** Memahami konsep integral tak tentu dan integral tentu, serta menguasai berbagai teknik pengintegralan (e.g., substitusi, parsial).
- **Keterampilan:** Menerapkan konsep integral untuk menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan luas daerah di bawah kurva, volume benda putar, dan permasalahan terkait akumulasi.
- **Sikap:** Menunjukkan sikap teliti, cermat, pantang menyerah, dan kreatif dalam menyelesaikan masalah integral.

B. LINTAS DISIPLIN ILMU YANG RELEVAN

- **Fisika:** Gerak, kecepatan, percepatan, kerja, pusat massa.
- **Kimia:** Laju reaksi, konsentrasi.
- **Biologi:** Pertumbuhan populasi, laju perubahan biomasa.
- **Ekonomi:** Surplus konsumen/produsen, fungsi utilitas marjinal, total biaya.
- **Teknik:** Desain kurva, volume objek.

C. TUJUAN PEMBELAJARAN

Pertemuan 1: Memahami Konsep Integral Tak Tentu dan Aturan Dasar

- Peserta didik mampu mendefinisikan integral tak tentu sebagai anti-turunan dari suatu fungsi setelah presentasi guru dan diskusi kelas, dengan menggunakan bahasa matematis yang tepat.
- Peserta didik mampu menerapkan aturan dasar integral tak tentu untuk menyelesaikan minimal 7 dari 10 soal fungsi aljabar sederhana secara mandiri.

Pertemuan 2: Menguasai Teknik Pengintegralan Lanjut (Substitusi dan Parsial)

- Peserta didik mampu mengidentifikasi fungsi yang dapat diselesaikan dengan metode substitusi dan parsial pada minimal 80% contoh soal yang diberikan.
- Peserta didik mampu menyelesaikan masalah integral tak tentu menggunakan metode substitusi dan parsial pada minimal 7 dari 10 soal yang diberikan secara tepat.

Pertemuan 3: Memahami Konsep Integral Tentu dan Aplikasi Luas Daerah

- Peserta didik mampu mendefinisikan integral tentu sebagai luas daerah di bawah kurva setelah diskusi dan eksplorasi grafis, dengan menghubungkan konsep limit jumlah Riemann.
- Peserta didik mampu menghitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva dan sumbu koordinat atau antar kurva pada minimal 3 dari 4 soal penerapan, dengan langkah-langkah yang benar.

Pertemuan 4: Penerapan Integral Tentu untuk Volume Benda Putar dan Aplikasi Lain

- Peserta didik mampu mengidentifikasi metode yang tepat (cakram/cincin, kulit silinder) untuk menghitung volume benda putar berdasarkan bentuk fungsi dan sumbu putarnya, pada minimal 80% kasus yang diberikan.

- Peserta didik mampu menyelesaikan masalah volume benda putar dan masalah kontekstual lainnya (misalnya, perpindahan dari kecepatan) menggunakan integral tentu pada minimal 2 dari 3 soal penerapan, dengan hasil yang akurat.

D. TOPIK PEMBELAJARAN KONTEKSTUAL

- Menghitung volume reservoir air berbentuk tidak beraturan.
- Menentukan jarak yang ditempuh mobil dari grafik kecepatan.
- Menganalisis pertumbuhan populasi bakteri atau virus.
- Menghitung surplus konsumen dan produsen dalam ekonomi.
- Merancang bentuk desain arsitektur atau komponen mesin dengan kurva tertentu.

E. KERANGKA PEMBELAJARAN

1. **Praktik Pedagogik (Model Pembelajaran Berbasis Proyek)**
   - **Eksplorasi Kontekstual (Pertemuan 3 & 4):** Peserta didik akan diajak mengamati fenomena nyata yang dapat dimodelkan dengan integral (misalnya, bentuk benda di sekitar mereka, grafik data dari fisika/ekonomi). Mereka dapat melakukan "eksplorasi lapangan" sederhana di lingkungan sekolah atau mencari data daring.
   - **Diskusi Kelompok (Setiap Pertemuan):** Peserta didik akan berdiskusi dalam kelompok untuk memecahkan soal-soal kompleks, menganalisis kesalahan, dan merancang proyek penerapan integral.
   - **Presentasi Proyek (Akhir Bab):** Peserta didik akan mempresentasikan hasil proyek penerapan integral mereka (e.g., simulasi perhitungan luas/volume, analisis data dengan integral, desain objek dengan perhitungan integral).
2. **Mitra Pembelajaran**
   - **Lingkungan Sekolah:** Guru Fisika/Kimia/Ekonomi (untuk integrasi aplikasi integral), guru TIK (untuk penggunaan *software* matematika), Pustakawan sekolah.
   - **Lingkungan Luar Sekolah/Masyarakat:** Mahasiswa atau dosen matematika/teknik/fisika (melalui sesi tanya jawab virtual atau kunjungan singkat jika memungkinkan), profesional yang menggunakan integral dalam pekerjaannya (arsitek, insinyur).
3. **Lingkungan Belajar**
   - **Ruang Fisik:** Kelas yang dilengkapi proyektor dan papan tulis yang cukup untuk coretan matematis, laboratorium komputer (jika menggunakan *software* matematika seperti GeoGebra/Desmos), atau ruang diskusi kelompok yang fleksibel.
   - **Ruang Virtual:** Penggunaan platform LMS (Google Classroom) untuk materi, tugas, dan forum diskusi. Pemanfaatan *software* simulasi/visualisasi matematika daring (GeoGebra, Desmos) untuk memahami konsep luas/volume. Grup komunikasi instan untuk koordinasi proyek.
   - **Budaya Belajar:** Mendorong budaya kolaboratif dalam memecahkan masalah, partisipasi aktif dalam diskusi, menumbuhkan rasa ingin tahu melalui pertanyaan "mengapa" dan "bagaimana" dalam matematika, serta merayakan keberhasilan dalam menyelesaikan tantangan.
4. **Pemanfaatan Digital**
   - **Perpustakaan Digital:** Mengakses *e-book* matematika, jurnal daring, artikel tentang aplikasi integral dalam berbagai bidang.

- **Forum Diskusi Daring:** Diskusi asinkron melalui Google Classroom atau platform lain untuk membahas soal-soal sulit, berbagi strategi, atau berdiskusi tentang proyek.
- **Penilaian Daring:** Penggunaan Google Forms atau platform kuis daring lainnya untuk asesmen formatif dan diagnostik.
- **GeoGebra/Desmos:** Untuk visualisasi fungsi, luas daerah, dan benda putar, yang mendukung pemahaman konsep integral.
- **Kahoot/Mentimeter:** Untuk kuis cepat, *pre-test*, atau *polling* umpan balik, menciptakan suasana belajar yang menyenangkan.
- **Google Classroom:** Sebagai pusat distribusi materi, pengumpulan tugas, dan komunikasi efektif antara guru dan peserta didik.

F. LANGKAH-LANGKAH PEMBELAJARAN BERDIFERENSIASI

KEGIATAN PENDAHULUAN (15 MENIT)

- **Mindful Learning:** Guru memulai dengan teknik *mindfulness* ringan, seperti meminta peserta didik untuk menutup mata sejenak dan membayangkan "bagaimana kita bisa mengukur luas permukaan atau volume benda yang tidak beraturan?" untuk mengaktifkan pemikiran awal dan fokus.
- **Meaningful Learning:** Guru menampilkan gambar atau video singkat tentang aplikasi integral dalam kehidupan nyata (misalnya, desain jembatan melengkung, grafik pertumbuhan ekonomi, atau lintasan roket) untuk menunjukkan relevansi materi.
- **Joyful Learning:** Guru mengadakan kuis interaktif singkat menggunakan Kahoot atau Mentimeter dengan pertanyaan-pertanyaan ringan tentang konsep turunan atau "tebak luas" dari gambar-gambar sederhana, untuk membangun suasana yang menyenangkan dan memancing rasa ingin tahu.
- Guru menyampaikan tujuan pembelajaran untuk bab Integral dan memperkenalkan proyek akhir yang akan dikerjakan secara bertahap.

KEGIATAN INTI (60-70 MENIT PER PERTEMUAN)

Memahami (Meaningful Learning):

- Guru memfasilitasi diskusi tentang kuis awal dan menghubungkannya dengan konsep integral sebagai anti-turunan (Integral Tak Tentu) atau penjumlahan luas kecil (Integral Tentu).
- Peserta didik secara individu atau berpasangan melakukan eksplorasi konsep (misalnya, dari buku teks, video tutorial, atau aplikasi GeoGebra/Desmos) untuk memahami definisi, notasi, dan sifat-sifat dasar integral. Guru menyediakan worksheet terpandu atau guided notes.
- Dalam kelompok kecil (3-4 orang), peserta didik berdiskusi untuk menyelesaikan soal-soal latihan konsep dasar. Guru berkeliling memfasilitasi, mengidentifikasi kesulitan, dan memberikan penguatan.

Mengaplikasi (Meaningful Learning & Joyful Learning):

- Guru memberikan masalah kontekstual yang relevan dengan kehidupan nyata (misalnya, menghitung jarak dari fungsi kecepatan, atau luas kebun dengan batas kurva). Peserta didik dalam kelompok menganalisis masalah, merumuskan fungsi, dan mengaplikasikan teknik integral yang telah dipelajari untuk menemukan solusi.
- Peserta didik dapat menggunakan *software* matematika (GeoGebra/Desmos) untuk

memvisualisasikan masalah dan memeriksa hasil perhitungan mereka, sehingga pembelajaran menjadi lebih interaktif dan menyenangkan.

- Kelompok mulai merancang proyek akhir mereka (misalnya, "Desain Objek dengan Integral" atau "Analisis Data Pertumbuhan dengan Integral"). Mereka dapat membuat model sederhana, infografis, atau presentasi simulasi.

Merefleksi (Mindful Learning & Meaningful Learning):

- Di akhir sesi inti, guru meminta setiap kelompok untuk secara singkat (1-2 menit) membagikan tantangan terbesar yang mereka hadapi dalam memecahkan masalah integral hari itu dan bagaimana mereka mengatasinya.
- Guru memfasilitasi refleksi individu melalui exit ticket atau jurnal reflektif singkat (5 menit), meminta peserta didik menuliskan "Apa yang paling sulit dari integral hari ini?" dan "Bagaimana saya akan mengatasi kesulitan ini di masa depan?" Ini membantu peserta didik meningkatkan kesadaran diri terhadap proses belajar mereka dan mengidentifikasi area yang perlu ditingkatkan.

KEGIATAN PENUTUP (10-15 MENIT)

- **Umpan Balik Konstruktif:** Guru memberikan umpan balik umum mengenai kemajuan belajar peserta didik dan mengapresiasi usaha mereka. Guru juga menyoroti konsep-konsep kunci yang perlu diingat dan area yang mungkin membutuhkan perhatian lebih lanjut.
- **Menyimpulkan Pembelajaran:** Guru dan peserta didik secara kolaboratif merangkum poin-poin penting yang telah dipelajari mengenai integral pada pertemuan tersebut dan mengaitkannya dengan tujuan pembelajaran.
- **Perencanaan Pembelajaran Selanjutnya:** Guru memberikan tugas rumah atau persiapan untuk pertemuan berikutnya (misalnya, "Pelajari kembali materi integral parsial untuk soal yang lebih kompleks" atau "Lanjutkan pengerjaan proyek kalian."). Peserta didik juga dapat memberikan masukan tentang metode belajar atau sumber daya yang mereka butuhkan.

G. ASESMEN PEMBELAJARAN

1. ASESMEN AWAL PEMBELAJARAN

- **Observasi:** Guru mengamati partisipasi peserta didik dalam kuis Kahoot/Mentimeter dan diskusi awal untuk melihat tingkat pemahaman awal dan penguasaan konsep turunan.
- **Tes Diagnostik:** Tes singkat berupa soal-soal turunan dasar atau konsep luas sederhana untuk mengidentifikasi prasyarat pengetahuan.
- **Contoh Soal Tes Diagnostik (5 soal):**
  1. Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)=3x2−4x+5$.
  2. Jika $f'(x)=2x$, sebutkan satu contoh fungsi $f(x)$ yang mungkin.
  3. Apa yang Anda pahami tentang "luas daerah di bawah kurva"?
  4. Bagaimana hubungan antara turunan dan integral yang Anda ketahui?
  5. Sebutkan satu bidang ilmu di mana Anda berpikir konsep integral mungkin berguna.

2. ASESMEN PROSES PEMBELAJARAN

- **Tugas Harian:** Pengumpulan latihan soal integral tak tentu atau integral tentu yang

dikerjakan secara mandiri.

- **Diskusi Kelompok:** Penilaian rubrik untuk partisipasi aktif, kualitas argumen dalam memecahkan masalah, dan kemampuan kolaborasi.
- **Presentasi Mini:** Penilaian presentasi singkat kelompok tentang analisis studi kasus atau progres proyek.
- **Contoh Soal/Penilaian Diskusi Kelompok (5 poin):**
  1. **Rubrik Kemampuan Pemecahan Masalah Kelompok:**
     - **Sangat Baik:** Mampu mengidentifikasi masalah, memilih metode integral yang tepat, menyelesaikan dengan akurat, dan menjelaskan langkahnya.
     - **Baik:** Mampu mengidentifikasi masalah dan memilih metode, namun ada sedikit kesalahan perhitungan.
     - **Cukup:** Kesulitan dalam mengidentifikasi metode atau melakukan perhitungan.
     - **Perlu Bimbingan:** Belum mampu memecahkan masalah tanpa bantuan signifikan.
  2. **Pertanyaan Pemicu Diskusi:**
     - "Bagaimana cara memastikan hasil integral tak tentu yang kita dapatkan itu benar?"
     - "Kapan sebaiknya kita menggunakan metode substitusi, dan kapan metode parsial?"
     - "Jika kita ingin menghitung luas antara dua kurva, langkah pertama apa yang harus kita lakukan?"
     - "Bagaimana integral dapat membantu kita menghitung volume sebuah vas bunga yang bentuknya tidak beraturan?"
     - "Sebutkan satu aplikasi integral di bidang yang bukan matematika murni yang paling menarik menurut kelompok Anda dan mengapa?"

3. ASESMEN AKHIR PEMBELAJARAN

- **Jurnal Reflektif (Individu):** Peserta didik menuliskan refleksi tentang keseluruhan proses pembelajaran, termasuk pengetahuan baru, keterampilan yang dikembangkan, tantangan, dan bagaimana integral relevan dengan minat mereka.
- **Contoh Soal Jurnal Reflektif (5 soal):**
  1. Apa tiga konsep integral yang paling Anda kuasai setelah mempelajari bab ini?
  2. Bagaimana perasaan Anda ketika berhasil menyelesaikan soal integral yang sulit? Apa yang membuat Anda termotivasi?
  3. Keterampilan apa yang Anda rasakan paling berkembang selama proses belajar integral dan pengerjaan proyek?
  4. Jika Anda harus menjelaskan integral kepada teman yang belum mempelajarinya, bagaimana cara Anda menjelaskannya agar mudah dipahami?
  5. Apa satu hal yang ingin Anda pelajari lebih lanjut atau dalami terkait aplikasi integral di masa depan?
- **Tugas Akhir/Proyek (Kelompok):** Penilaian produk proyek (simulasi perhitungan, desain objek, analisis data) berdasarkan rubrik yang telah disepakati (kejelasan konsep, akurasi perhitungan, kreativitas, relevansi, kerja sama tim, kualitas presentasi).

- **Tes Tertulis (Individu):** Tes komprehensif berupa soal pilihan ganda dan esai yang mencakup Integral Tak Tentu, Integral Tentu, dan Penerapan Integral.
- **Contoh Soal Tes Tertulis (5 soal):**
  1. Hitunglah integral tak tentu dari $\int(4x3-6x2+2x-1)dx$.
  2. Selesaikan integral tentu dari $\int12(3x2+2x)dx$.
  3. Sebuah benda bergerak dengan kecepatan $v(t)=3t2-2t+5$ m/s. Tentukan fungsi posisi $s(t)$ benda tersebut jika pada $t=0$, posisi benda adalah $s(0)=10$ m.
  4. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y=x2-4$ dan sumbu X.
  5. Sebuah tangki air berbentuk seperti benda putar yang dihasilkan dari perputaran kurva $y=x$ dari $x=0$ hingga $x=4$ mengelilingi sumbu X. Tentukan volume tangki air tersebut.