

Тема: Вектори у просторі. Додавання і віднімання векторів

Посилання

на

підручник:

<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-10-klas-2018/14-matematyka-10-klas/merzlyak-ag-matematyka-alg-i-poch-analizu-ta-geom-riven-standartu-10-kl.pdf>

Матеріали до теми:

Вектори в просторі

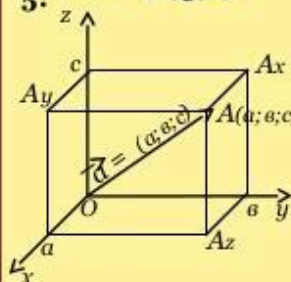
1. **Вектором** називають напрямлений відрізок.

2. **Позначають:** $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$

3. **Координатами вектора** $\overrightarrow{AB}$ початок якого – $A(x_1; y_1; z_1)$, а кінець – $B(x_2; y_2; z_2)$, називають числа:
 $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$.

4. **Записують** $\overrightarrow{AB} = (x; y; z)$ або

5. $\vec{a} = (x; y; z)$



Якщо O – початок координат, а числа a, b, c – координати точки A , то ці числа є координатами вектора $\overrightarrow{OA}$

Дії над векторами

1. **Сумою векторів** $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і

$\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ називають вектор

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$$

2. **Різницею цих векторів** називають вектор

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$$

3. **Щоб помножити вектор на число**, потрібно кожну його координату помножити на це число.

Нехай $\vec{a}(x; y; z)$, тоді

$$m\vec{a} = (mx; my; mz)$$

4. **Для будь-яких векторів** $\vec{a}, \vec{b}$ і чисел m і n завжди: 1) $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$;

$$2) (m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a};$$

$$3) |m\vec{a}| = |m| |\vec{a}|.$$

Властивості векторів

1. Для будь-яких векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Як би не були розміщені в просторі точки A, B, C, D завжди

2) Правило паралелепіпеда $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$

3) Модуль (абсолютною величиною) вектора називається довжина відрізка, яким задається вектор. Якщо

Модуль будь-якого ненульового вектора $\vec{a}(x; y; z)$ чисельно дорівнює $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Модуль нульового вектора дорівнює нулю:

$$\vec{0} = (0; 0; 0), \quad |\vec{0}| = 0$$

4. Два ненульові вектори називають колінеарними, якщо вони співнаправлені або протилежно напрямлені

Види колінеарних векторів



5. Ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх координати пропорційні, тобто $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

Застосування векторів

1. Кут між двома ненульовими векторами називають кут між відповідними їм напрямленими відрізками, які виходять з однієї точки.



2. Кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180° , а між співнаправленими - 0° .

3. Скалярним добутком двох ненульових векторів називається добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними.

Якщо кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює φ , то їх скалярний добуток дорівнює:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

4. Скалярний добуток векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

5. Якщо кут між ненульовими векторами дорівнює 90° , то їх скалярний добуток дорівнює 0, бо $\cos 90^\circ = 0$.

Умова перпендикулярності двох векторів:

Два ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Приклад розв'язування вправ

1. Знайдіть координати і довжини векторів $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$, якщо $A(2; -3; -1)$, $B(-4; -8; 5)$, $C(3; 1; -2)$.

Розв'язання

$$\vec{AB}(-4 - 2; -8 - (-3); 5 - (-1)) = \vec{AB}(-6; -5; 6);$$

$$\vec{AC}(3 - 2; 1 - (-3); -2 - (-1)) = \vec{AC}(1; 4; -1);$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{97};$$

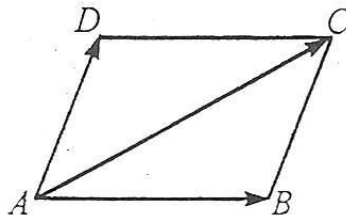
$$|\vec{AC}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{2}.$$

Відповідь: $\vec{AB}(-6; -5; 6)$, $\vec{AC}(1; 4; -1)$, $|\vec{AB}| = \sqrt{97}$, $|\vec{AC}| = 3\sqrt{2}$.

2. Знайдіть довжину діагоналі AC паралелограма ABCD, якщо A(2;-6;0), B(-4;8;2), D(0;-12;0)

Розв'язання

Оскільки $\vec{AB}(-6; 14; 2)$, $\vec{AD}(-2; -6; 0)$, то $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$, $\vec{AC}(-8; 8; 2)$.



Тоді $|\vec{AC}| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2 + 2^2} = \sqrt{132} = 2\sqrt{33}$.

Відповідь: $2\sqrt{33}$.

Додавання і віднімання векторів

Означення. Додавання векторів (сума векторів) $\vec{a} + \vec{b}$ - це операція знаходження вектора $\vec{c}$, всі елементи, якого дорівнюють попарній сумі відповідних елементів векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто кожен елемент вектора $\vec{c}$ дорівнює:

$$c_i = a_i + b_i$$

Означення. Різниця векторів (віднімання векторів) $\vec{a} - \vec{b}$ - це операція знаходження вектора $\vec{c}$, всі елементи, якого дорівнюють попарній різниці відповідних елементів векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто кожен елемент вектора $\vec{c}$ дорівнює:

$$c_i = a_i - b_i$$

Формули додавання і віднімання векторів

Формули додавання і віднімання векторів для плоских задач

У випадку плоскої задачі суму та різницю векторів $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$ і $\vec{b} = \{b_x; b_y\}$ можна знайти скориставшись наступними формулами:

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x; a_y + b_y\}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \{a_x - b_x; a_y - b_y\}$$

Формули додавання і віднімання векторів для просторових задач

У випадку просторової задачі суму та різницю векторів $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ і $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ можна знайти скориставшись наступними формулами:

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z\}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \{a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z\}$$

Формули додавання і віднімання n -вимірних векторів

У випадку n -вимірного простору суму та різницю векторів $\vec{a} = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ і $\vec{b} = \{b_1; b_2; \dots; b_n\}$ можна знайти скориставшись наступними формулами:

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_1 + b_1; a_2 + b_2; \dots; a_n + b_n\}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \{a_1 - b_1; a_2 - b_2; \dots; a_n - b_n\}$$

Приклади задач на додавання і віднімання векторів

Приклади плоских задач на додавання і віднімання векторів

Приклад 1. Знайти суму векторів $\vec{a} = \{1; 2\}$ і $\vec{b} = \{4; 8\}$.

Розв'язок:

$$\vec{a} + \vec{b} = \{1 + 4; 2 + 8\} = \{5; 10\}$$

Приклад 2. Знайти різницю векторів $\vec{a} = \{1; 2\}$ і $\vec{b} = \{4; 8\}$.

Розв'язок:

$$\vec{a} - \vec{b} = \{1 - 4; 2 - 8\} = \{-3; -6\}$$

Приклади просторових задач на додавання і віднімання векторів

Приклад 3. Знайти суму векторів $\vec{a} = \{1; 2; 5\}$ і $\vec{b} = \{4; 8; 1\}$.

Розв'язок:

$$\vec{a} + \vec{b} = \{1 + 4; 2 + 8; 5 + 1\} = \{5; 10; 6\}$$

Приклад 4. Знайти різницю векторів $\vec{a} = \{1; 2; 5\}$ і $\vec{b} = \{4; 8; 1\}$.

Розв'язок:

$$\vec{a} - \vec{b} = \{1 - 4; 2 - 8; 5 - 1\} = \{-3; -6; 4\}$$

Приклади задач на додавання і віднімання векторів з розмірністю більшою 3

Приклад 5. Знайти суму векторів $\vec{a} = \{1; 2; 5; 9\}$ і $\vec{b} = \{4; 8; 1; -20\}$.

Розв'язок:

$$\vec{a} + \vec{b} = \{1 + 4; 2 + 8; 5 + 1; 9 + (-20)\} = \{5; 10; 6; -11\}$$

Приклад 6. Знайти різницю векторів $\vec{a} = \{1; 2; 5; -1; 5\}$ і $\vec{b} = \{4; 8; 1; -1; 2\}$.

Розв'язок:

$$\vec{a} - \vec{b} = \{1 - 4; 2 - 8; 5 - 1; -1 - (-1); 5 - 2\} = \{-3; -6; 4; 0; 3\}$$

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал §6, п.39-40.
2. Законспектувати означення, властивості, теореми.
3. Виконати усно: 39.1-39.3; письмово: 39.4, 39.7, 39.9, 39.11, 40.1, 40.3, 40.5.
4. Переглянути відеоматеріали за посиланням:

<https://svitppt.com.ua/geometriya/vektori-u-prostori0.html>

<https://naurok.com.ua/prezentaciya-vektori-dodavannya-vidnimannya-vektoriv-mnozheniya-vektora-na-chislo-vlastivosti-diy-nad-vektorami-109877.html>

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net, у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net.