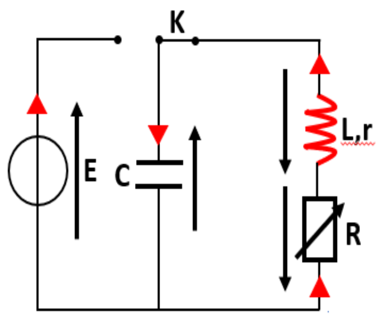
الدرس رقـــــــم 8 الجزء الثالث: الكهرباء	التذبذبات الحرة في دارة RLC متوالية Les oscillations libres dans un circuit RLC série	السنة الثانية بكالوريا الأستاذ: أســـامة سطيع

I. تفريغ المكثف في الوشيعة

1. الدراسة التجريبية للدارة المتوالية RLC

1.1 نشاط 1



ننجز التركيب التجريبي الممثل جانبه، بعد شحن المكثف نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع 2 فنحصل على دارة $\boldsymbol{CLR}$ متوالية، نعاين التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف. نعيد تجربة عدة مرات برفع قيمة R

1. ما الذي يحدث عندما نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع 2؟

تفريغ المكثف في الو شيعة

2. كيف يتغير وسع وإشارة التوتر $u_C(t)$؟

يتناقص وسع التوتر بدلالة الزمن نقول ان التذبذبات مخمدة.

3. ماذا نسمي تذبذبات الدارة RLC

بما ان هذه التذبذبات تتم دون تزويد الدارة RLC بعد اللحظة $t = 0$ بأي طاقة نقول إن التذبذبات حرة

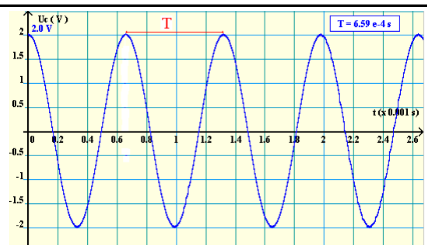
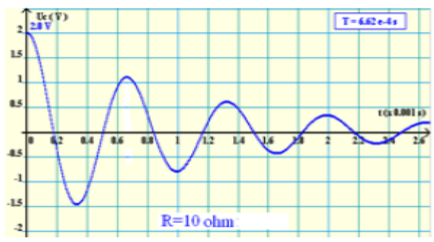
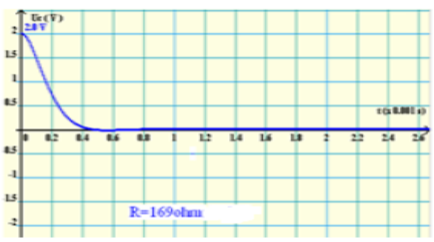
4. ما تأثير المقاومة $\boldsymbol{R}$ على وسع التذبذبات؟

عندما تزداد قيمة المقاومة R يزداد خمود التذبذبات حيث نلاحظ ان وسع التذبذبات ينقص كثيرا

2.1 خلاصة

يؤدي تفريغ مكثف مشحون، في وشيعة دارة RLC متوالية، إلى ظهور تذبذبات حرة ومخمدة. نقول إن الدارة RLC المتوالية تكون متذبذبا كهربائيا حرا ومخمدا

2. أنظمة التذبذبات الحرة

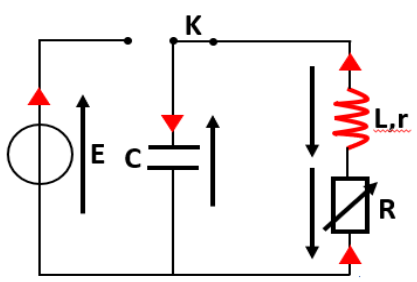
نظام دوري	نظام شبه دوري	نظام لا دوري
$R_t = 0$ تذبذبات حرة وغير مخمدة	R_t صغيرة يتناقص وسع $u_C(t)$ مع الزمن	R_t كبيرة تزول التذبذبات لوجود خمود مهم
		

ملحوظة:

شبه الدور T المدة الزمنية الفاصلة بين قيمتين قصوتين متتاليتين للتوتر u_C

لا يتعلق شبه الدور T بالمقاومة R ولكن يتعلق بمعامل التحريض L وسعة المكثف C

3. الدراسة النظرية للدارة المتوالية RLC



نعتبر التركيب التجريبي جانبه، المكون من ومكثف سعته C ووشيعة معامل تحريضها L ومقاومتها الداخلية r وموصل أومي مقاومته R نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع 2 بعد شحن المكثف عند اللحظة $t = 0$

حسب قانون إضافية التوترات لدينا: $u_R + u_L + u_C = 0$

وحسب قانون أوم: $u_R = R.i$ ولدينا $u_L = L\frac{di}{dt} + ri$

وبالتالي: $L\frac{di}{dt} + (r + R)i + u_C = 0$

نعلم ان $i = c\frac{du_C}{dt}$ نضع $R_t = R + r$

اذن المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_C بين مربطي المكثف في دارة RLC هي:

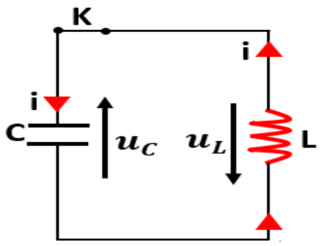
$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R_t}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0 \Leftrightarrow LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + R_tC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

ملحوظة:

المقدار $\frac{R_t}{L}$ هو المسؤول عن ظاهرة خمود التذبذبات

II. التذبذبات غير المخمدة في الدارة المثالية LC

1. تعريف الدارة المثالية LC



دارة مثالية LC هي تجميع على التوالي لمكثف مشحون كليا سعته C مع وشيعة معامل تحريضها L ومقاومتها الداخلية مهملة $(r = 0)$

2. الدراسة النظرية لدارة مثالية LC

1.2 المعادلة التفاضلية

ننجز التركيب التجريبي جانبه، نغلق قاطع التيار K عند اللحظة $t = 0$

حسب قانون إضافية التوترات لدينا: $u_C + u_L = 0$

ولدينا $u_L = L\frac{di}{dt}$ ونعلم ان $i = C\frac{du_C}{dt}$ أي ان $u_L = LC\frac{d^2u_C}{dt^2}$

اذن: $LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$

وبالتالي فالمعادلة التفاضلية لدارة LC مثالية التي يحققها التوتر u_C بين مربطي المكثف هي: $LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$

بما ان $u_C = \frac{q}{C}$ فإن المعادلة التفاضلية **لدارة LC مثالية التي تحققها الشحنة q هي:** $LC\frac{d^2q}{dt^2} + q = 0$

2.2 حل المعادلة التفاضلية

يكتب حل المعادلة التفاضلية على الشكل التالي: $u_C(t) = U_m Cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

بحيث

U_m وسع الذبذبات ووحدته الفولط (V)

φ الطور البدئي $(t = 0)$ بالراديان (rad)

T_0 الدور الخاص للذبذبات وحدته الثانية (s)

$\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi$ الطور عند اللحظة **t** بالراديان (rad)

✔ تحديد T_0 الدور الخاص باستعمال المعادلة التفاضلية

لدينا $u_C(t) = U_m Cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

نشتق الحل فنجد: $\frac{du_C}{dt} = -U_m.\frac{2\pi}{T_0}Sin(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$ وكذلك $\frac{d^2u_C}{dt^2} = -U_m.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 Cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

نعوض الاشتقاق في المعادلة التفاضلية فنجد: $LC(-U_m.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 Cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)) + U_m Cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi) = 0$

$$U_m Cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\left(-LC.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + 1\right) = 0$$

اذن $-LC.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + 1 = 0$ وبالتالي

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

✔ تحديد U_m و φ باستعمال الشروط البدئية

باعتماد على الشروط البدئية للتوتر $u_C(t = 0) = E$ (المكثف مشحون بدئيا) وشدة التيار $i(t = 0) = 0$ لدينا:

- **شدة التيار i: لدينا** $i = C\frac{du_C}{dt}$ أي ان $i(t) = -CU_m.\frac{2\pi}{T_0}Sin(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$ وبالتالي $i(t = 0) = -CU_m.\frac{2\pi}{T_0}Sin(\varphi) = 0$

  ومنه فإن $Sin(\varphi) = 0$ اذن $\varphi = 0$ او $\varphi = \pi$

- **التوتر u_C: لدينا** $u_C(t = 0) = U_m Cos(\varphi) = E$ اي ان $Cos(\varphi) = \frac{E}{U_m} > 0$ وبالتالي

  $\varphi = 0$ و $U_m = E$

تعبير التوتر بين مربطي المكثف في دارة LC مثالية هو: $u_C(t) = ECos(\frac{1}{\sqrt{LC}}t)$

بما ان $q = C.u_C$ فان تعبير الشحنة في دارة LC مثالية هو: $q(t) = CECos(\frac{1}{\sqrt{LC}}t)$

بما أن $i = \frac{dq}{dt}$ فان تعبير شدة التيار المار في دارة LC مثالية هو: $i(t) = - E\sqrt{\frac{C}{L}}Sin(\frac{1}{\sqrt{LC}}t)$

III. انتقال الطاقة بين المكثف والوشيعة

1. الدراسة الطاقية للدارة المثالية LC

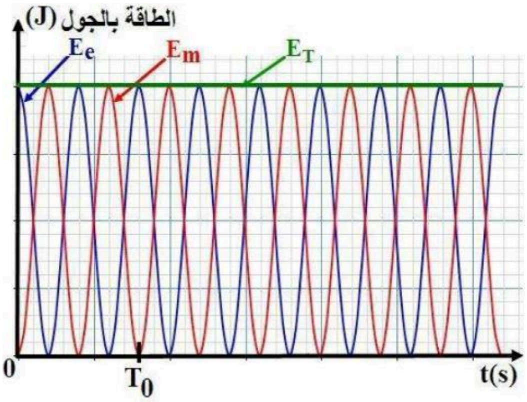
1.1 الطاقة الكلية للدارة المثالية LC

الطاقة الكهربائية المخزونة في المكثف: $E_e = \frac{1}{2}C.u_C^2$

الطاقة المغناطيسية المخزونة في الوشيعة: $E_m = \frac{1}{2}L.i^2$

الطاقة الكلية المخزونة في الدارة LC: $E_T = E_e + E_m = \frac{1}{2}C.u_C^2 + \frac{1}{2}L.i^2$

2.1 انحفاظ الطاقة الكلية للدارة المثالية LC



لدينا الطاقة الكلية للدارة هي: $E_T = E_e + E_m$ اي ان $E_T = \frac{1}{2}C.u_C^2 + \frac{1}{2}L.i^2$

نشتق الطاقة الكلية: $\frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2}C.2.\frac{du_C}{dt}.u_C + \frac{1}{2}L.2.\frac{di}{dt}.i$

أي ان $\frac{dE_T}{dt} = C\frac{du_C}{dt}.u_C + L\frac{di}{dt}.i = C\frac{du_C}{dt}.u_C + LC\frac{d^2u_C}{dt^2}.C\frac{du_C}{dt}$

ومنه فان $\frac{dE_T}{dt} = C\frac{du_C}{dt}(u_C + LC\frac{d^2u_C}{dt^2})$

لدينا المعادلة التفاضلية $LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$

اذن $\frac{dE_T}{dt} = 0$

وبالتالي الطاقة الكلية في الدارة المثالية **LC** تنحفظ

ملحوظة:

عندما تنقص الطاقة الكهربائية E_e المخزونة في المكثف، تزداد الطاقة المخزونة في الوشيعة والعكس بالعكس، إذن تبادل طاقي بين الوشيعة والمكثف، وهذا ما يفسر انحفاظ الطاقة الكلية.

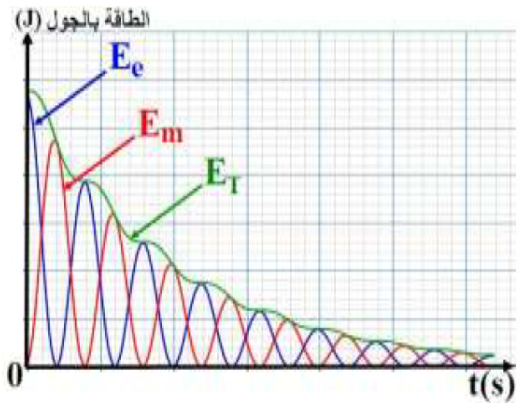
- عندما تكون $u_C = E$ تكون $i = 0$
- عندما تكون $u_C = 0$ تكون $i = I$

2. الدراسة الطاقية للدارة RLC

1.2 الطاقة الكلية للدارة المتوالية RLC

الطاقة الكلية المخزونة في الدارة RLC: $E_T = E_e + E_m = \frac{1}{2}C.u_C^2 + \frac{1}{2}L.i^2$

2.2 عدم انحفاظ الطاقة الكلية للدارة المتوالية RLC



لدينا الطاقة الكلية للدارة هي: $E_T = E_e + E_m$ اي ان $E_T = \frac{1}{2}C.u_C^2 + \frac{1}{2}L.i^2$

نشتق الطاقة الكلية: $\frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2}C.2.\frac{du_C}{dt}.u_C + \frac{1}{2}L.2.\frac{di}{dt}.i$

أي ان $\frac{dE_T}{dt} = C\frac{du_C}{dt}.u_C + L\frac{di}{dt}.i = C\frac{du_C}{dt}.u_C + LC\frac{d^2u_C}{dt^2}.C\frac{du_C}{dt}$

ومنه فان $\frac{dE_T}{dt} = C\frac{du_C}{dt}(u_C + LC\frac{d^2u_C}{dt^2})$

لدينا المعادلة التفاضلية $LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + R_tC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$

أي ان $LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = - R_tC\frac{du_C}{dt}$

اذن $\frac{dE_T}{dt} = - C\frac{du_C}{dt}. - R_tC\frac{du_C}{dt} = - R_t.i^2 < 0$

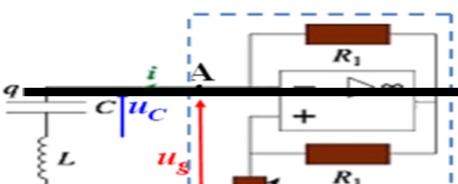
وبالتالي الطاقة الكلية في الدارة المتوالية **RLC** تتناقص مع مرور الزمن.

ملحوظة:

تتناقص الطاقة الكلية لدارة $\boldsymbol{CLR}$ متوالية تدريجيا بسبب مفعول جول (وجود مقاومة)

IV. صيانة التذبذبات في الدارة المتوالية RLC

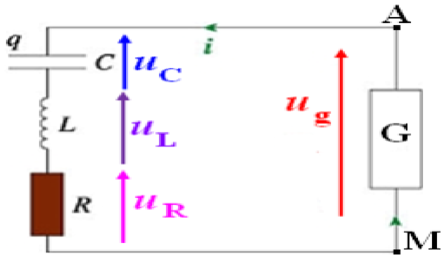
يمكن صيانة تذبذبات دارة $\boldsymbol{CLR}$ متوالية والحصول على توتر متذبذب ذي وسع ثابت، باستعمال جهاز يزود الدارة بطاقة تعوض الطاقة المبددة في الدارة بمفعول جول



جهاز الصيانة عبارة عن مولد يزود الدارة بتوتر u_g يتناسب اطرادا مع شدة التيار $i(t)$ $u_g = R_0 . i$ وهو يتصرف كمقاومة سالبة

وهكذا تكون المقاومة الكلية للدارة منعدمة عندما نأخذ $R_0 = R$

نعتبر التركيب التجريبي التالي حيث المولد G يمثل جهاز الصيانة



القدرة المبددة بمفعول جول في الدارة RLC هي $P_{th} = R . i^2$

القدرة التي يمنحها المولد G هي $P_g = u_g . i$

ليعوض المولد القدرة المبددة بمفعول جول يجب أن يكون

$P_{th} = P_g$ وبالتالي $u_g = R . i$

نطبق قانون إضافية التوترات فنجد

$$u_R + u_L + u_C = u_g$$

أي ان: $Ri + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = Ri$

وبالتالي:

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

وبالتالي نحصل على المعادلة التفاضلية لدارة CL مثالية أي أن التذبذبات جيبية ذات وسع ثابت دورها

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$