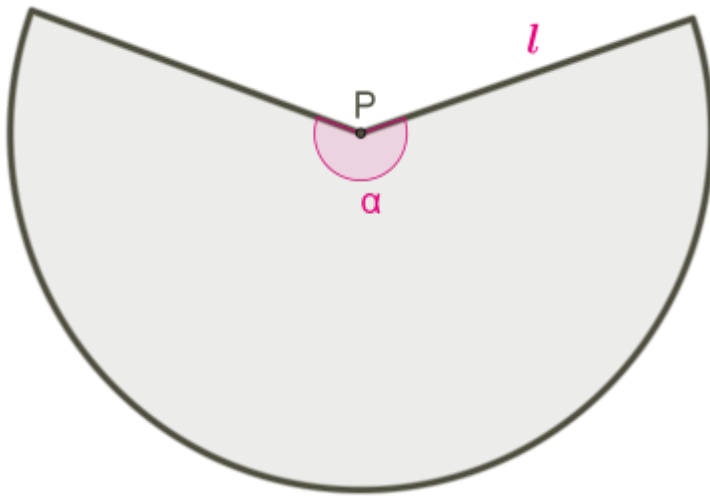
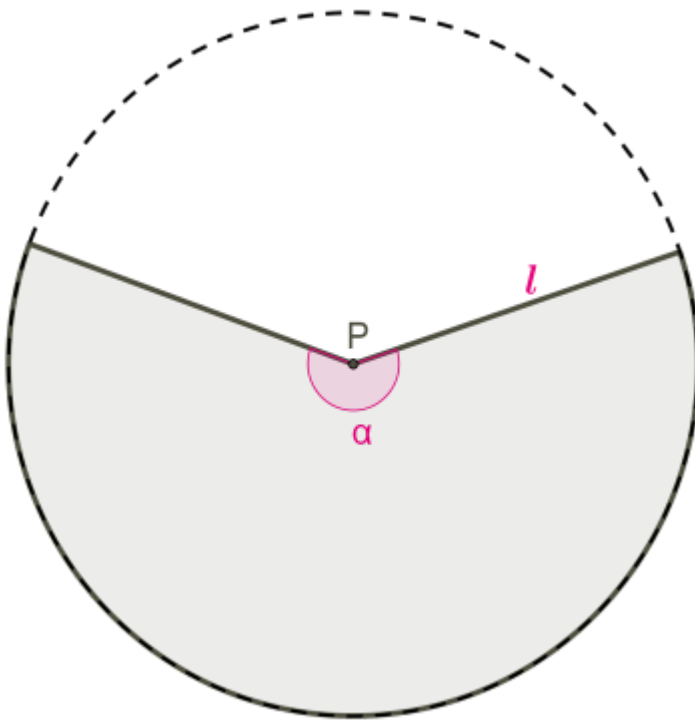


На розгортці конуса не можна позначити висоту і радіус конуса.



Радіус сектора — це твірна конуса.



Таким чином, бічна поверхня конуса є частиною повного кола з радіусом l :
 $S_{\text{біч.}} = \pi l^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$

Довжина дуги також є частиною довжини повного кола з радіусом l , але у той же час довжина дуги - це довжина кола основи конуса з радіусом R .
 Порівняємо вирази довжини дуги і виразимо α через R :

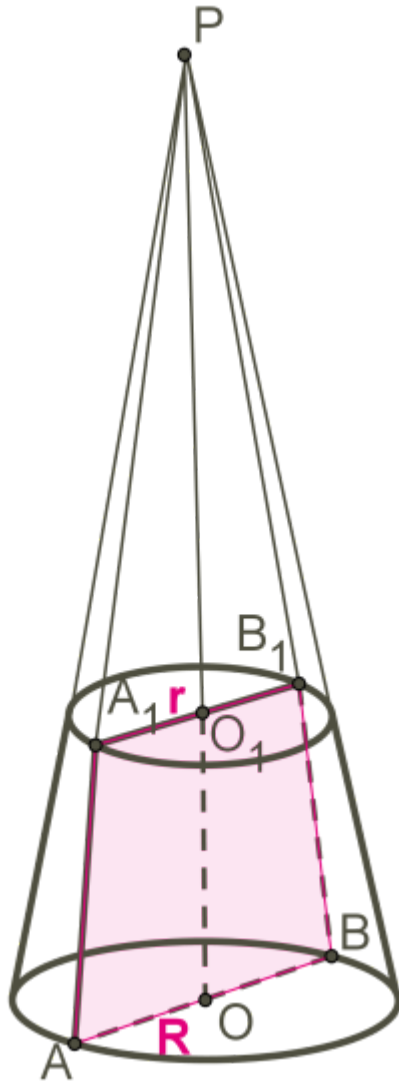
$$2\pi l \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2\pi R \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi R \cdot 360^\circ}{2\pi l} = R \cdot \frac{360^\circ}{l}$$

Отримуємо ще одну формулу бічної поверхні конуса, не використовуються кут розгортки бічної поверхні:

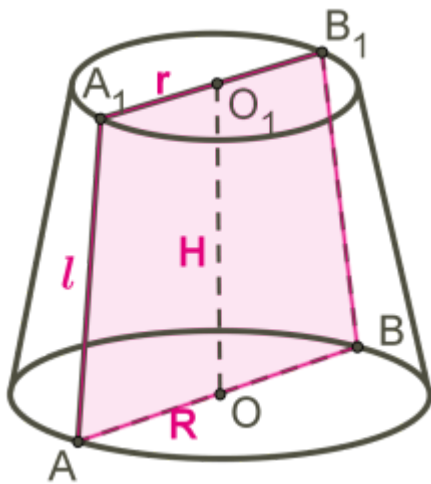
$$S_{\text{біч.}} = \pi l \cdot R \cdot \frac{360^\circ}{360^\circ} \cdot l = \pi R l$$

Зрізаний конус

Якщо провести переріз конуса площиною, перпендикулярною осі конуса, тоді ця площина розбиває конус на дві частини, одна з яких — конус, а іншу частину називають зрізаним конусом.



Також, зрізаний конус можна розглядати, як тіло обертання, яке утворилося в результаті обертання прямокутної трапеції навколо бічної сторони (яка перпендикулярна до основи трапеції) або у результаті обертання рівнобедреної трапеції навколо висоти, проведеної через серединні точки основ трапеції.



OO_1 — вісь конуса і висота конуса.

AA_1 — твірна конуса.

Кола з центрами O і O_1 — основи зрізаного конуса.

AO і A_1O_1 — радіуси основ конуса.

Осьовий переріз конуса — це переріз конуса площиною, яка проходить через вісь OO_1 конуса.

Осьовий переріз конуса — це рівнобедрена трапеція.

AA_1B_1B — осьовий переріз конуса.

Бічна поверхня визначається, як різниця бічної поверхні даного конуса і відтятого конуса:

$$S_{\text{біч.}} = \pi R \cdot PA - \pi r \cdot PA_1 = \pi R \cdot (PA_1 + AA_1) - \pi r \cdot PA_1 = \pi R \cdot PA_1 + \pi R \cdot AA_1 - \pi r \cdot PA_1 = \pi R \cdot l + (\pi R - \pi r) \cdot PA_1$$

Оскільки $\triangle PAO \sim \triangle PA_1O_1$, тоді сторони їх пропорційні:

$$\frac{PA}{PA_1} = \frac{R}{r} \Rightarrow PA = \frac{R}{r} \cdot PA_1 \Rightarrow PA_1 = \frac{r}{R} \cdot PA \Rightarrow PA_1 = \frac{r}{R} \cdot (l + PA_1) \Rightarrow PA_1 \cdot (R - r) = r \cdot l \Rightarrow PA_1 = \frac{r \cdot l}{R - r}$$

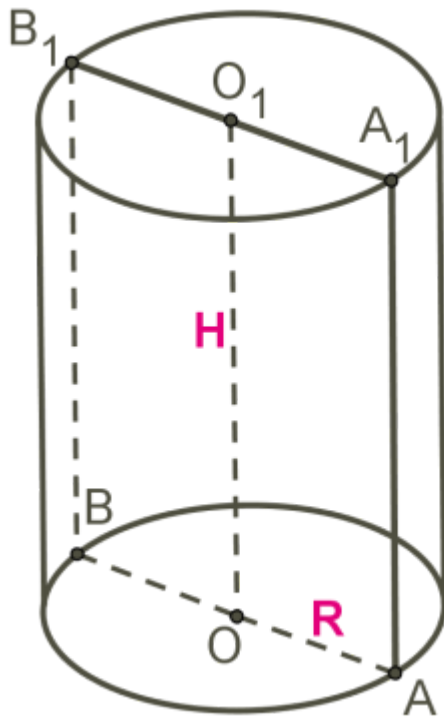
Таким чином, отримуємо формулу бічної поверхні зрізаного конуса, яка містить радіуси основ і твірну зрізаного конуса:

$$S_{\text{біч.}} = \pi R l + \pi \cdot \frac{r \cdot l}{R - r} \cdot (R - r) = \pi R l + \pi \cdot r l = \pi l \cdot (R + r)$$

Циліндр

Тіла обертання — об'ємні тіла, що виникають при обертанні плоскої фігури, обмеженої кривою, навколо осі, що лежить в тій же площині.

Циліндр — це тіло обертання, отримане при обертанні прямокутника навколо його сторони.



Прямокутник AOO_1A_1 обертається навколо сторони OO_1 .

OO_1 — **вісь симетрії** циліндра і **висота** циліндра.

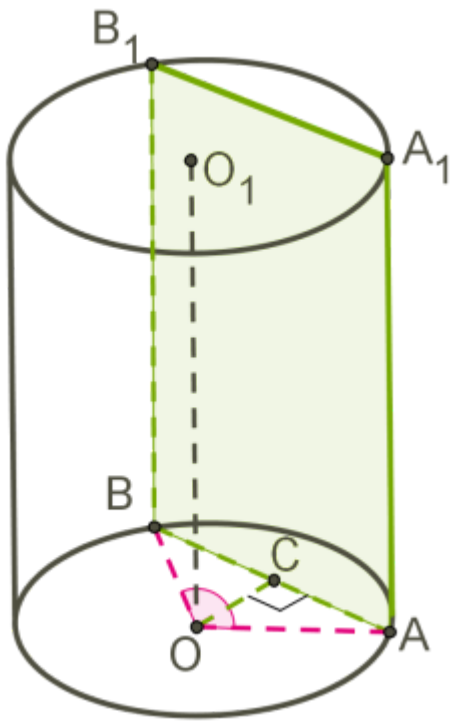
AA_1 — **твірна** циліндра, довжина якої дорівнює довжині висоти циліндра.

AO — **радіус** циліндра.

Отримана циліндрична поверхня називається **бічною поверхнею циліндра**, а круги — **основами** циліндра.

Осьовий переріз циліндра — це перетин циліндра площиною, яка проходить через вісь циліндра. Цей переріз є прямокутником.

При перерізі циліндра площиною, паралельною осі циліндра (тобто перпендикулярною основі), також виходить прямокутник.



На малюнку зображений циліндр, перетнутий площиною, яка паралельна осі циліндра OO_1 .

ABB_1A_1 — прямокутник.

$OA=OB=R$ — радіуси.

OC — відстань від осі циліндра до площини перерізу.

Дуга AB дорівнює центральному куту AOB .

При перерізі циліндра площиною, паралельною основі, в перерізі отримуємо коло, що дорівнює основам циліндра.

Якщо уявити, що бічна циліндрична поверхня розрізана по твірній AA_1 і розгорнута, отримаємо прямокутник.



Сторона AA_1 дорівнює висоті H , а іншу сторону утворює розгорнуте коло основи довжиною $2\pi R$.

Оскільки розгортка — прямокутник, тоді бічна поверхня визначається за формулою:

$$S_{\text{біч.}} = 2\pi R \cdot H$$

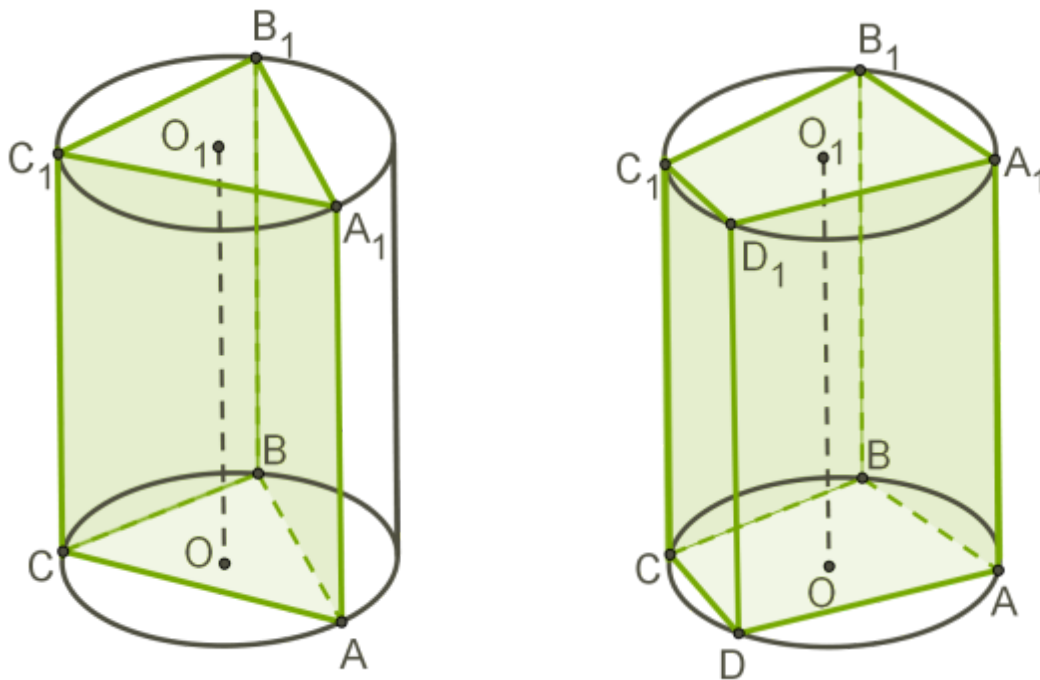
Основи циліндра — два кола із загальною площею $2 \cdot \pi R^2$.

Повна поверхня циліндра визначається за формулою:

$$S_{\text{повн.}} = 2\pi R H + 2\pi R^2 = 2\pi R \cdot (H + R)$$

Комбінації циліндра і призми

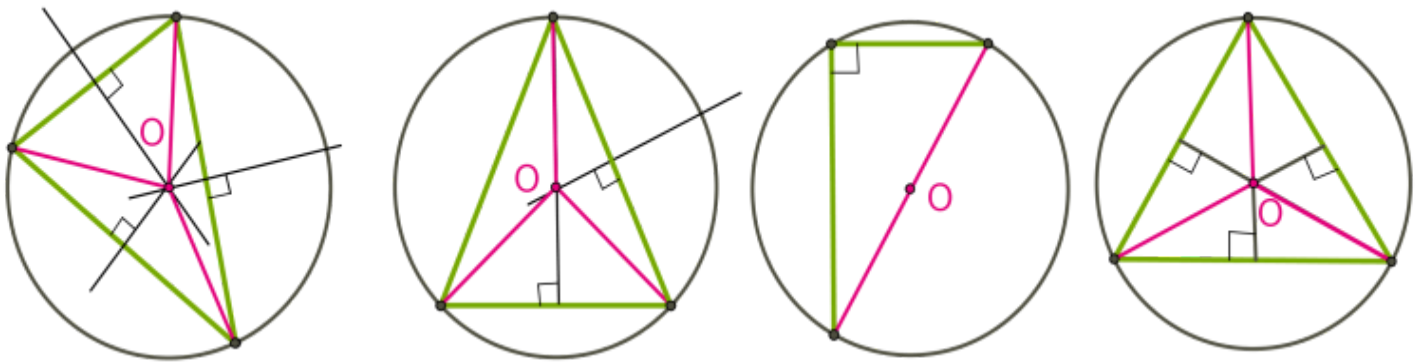
Циліндр називається описаним навколо призми, якщо багатокутники основ призми вписані в кола основ циліндра, а твірні циліндра є бічними ребрами призми.



Циліндр можна описати лише навколо такої прямої призми, навколо основи якої можна описати коло..

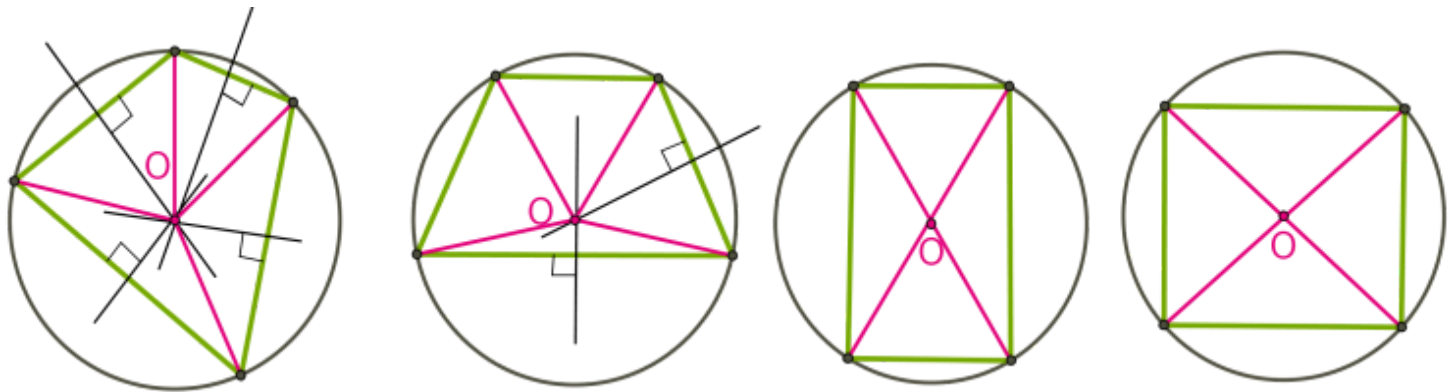
Наприклад, циліндр завжди можна описати навколо прямої трикутної призми, навколо правильної призми.

Малюнок складається залежно від змісту завдання, часто досить малюнка основи комбінацій цих тіл, оскільки висота призми дорівнює висоті циліндра.



Коло основи циліндра описано навколо багатокутника основи призми.
Радіус циліндра — це радіус кола, описаного навколо багатокутника основи призми

Центр кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника.



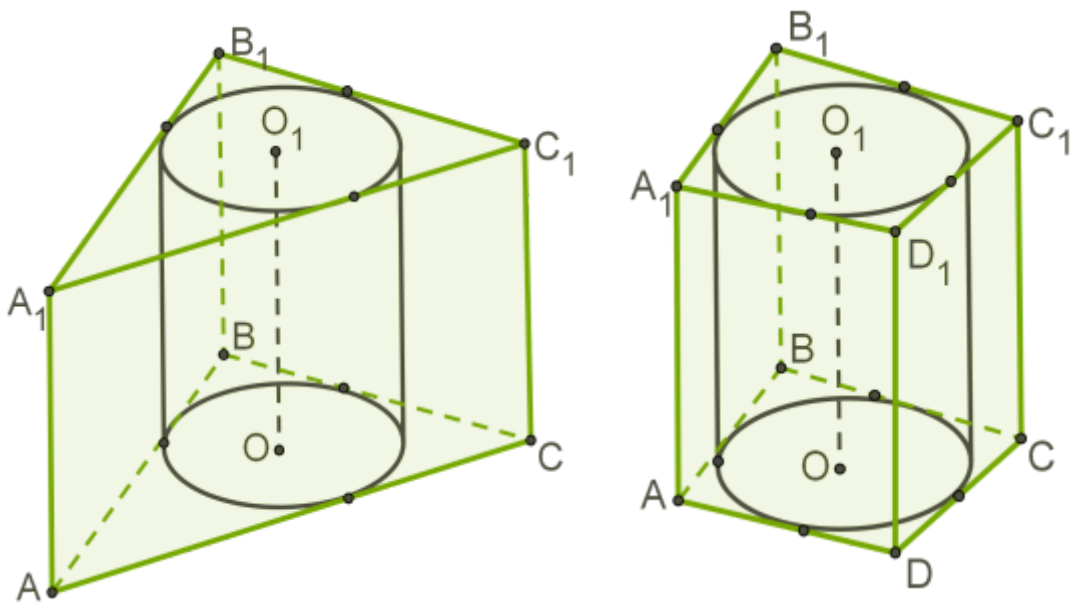
Центр кола, описаного навколо чотирикутника, є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін чотирикутника. Навколо чотирикутника можна описати коло, якщо суми протилежних кутів дорівнюють 180° .

Формули обчислення радіуса R описаного кола

a, b, c — сторони, h — висота, d — діагональ.

Правильний трикутник	$R = \frac{2}{3}h$ $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$
Прямокутний трикутник	$R = \frac{1}{2}$ гіпотенузи
Довільний трикутник	$R = \frac{abc}{4S}$ $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$
Квадрат	$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
Прямокутник	$R = \frac{d}{2}$
Правильний шестикутник	$R = a$

Циліндр вписаний у призму, якщо кола основ циліндра вписані у багатокутники основ призми.



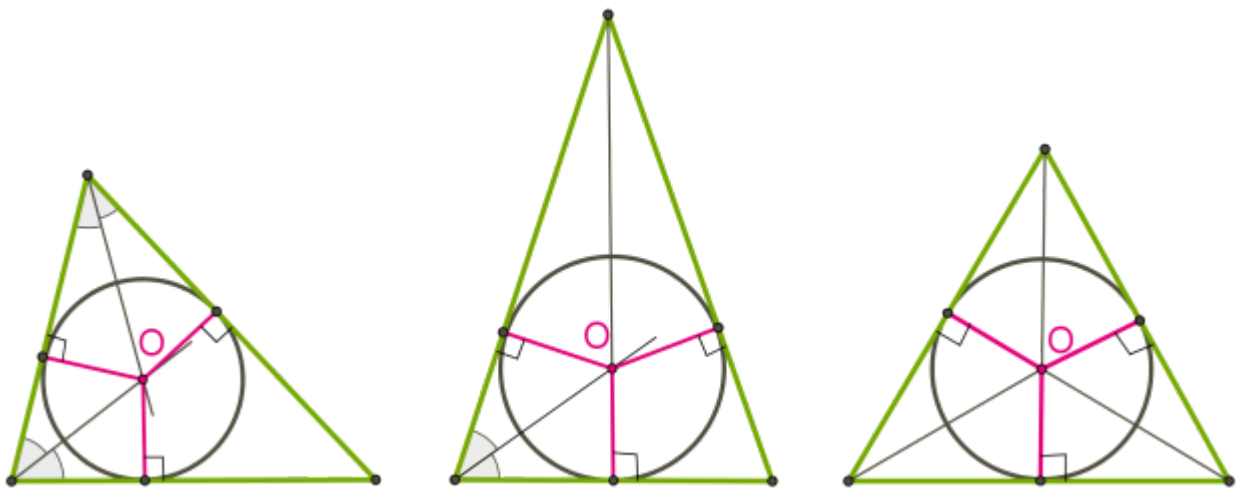
Циліндр можна вписати тільки у таку пряму призму, у багатокутник основи якої, можна вписати коло.

Наприклад, циліндр завжди можна вписати у пряму трикутну призму, у правильну призму.

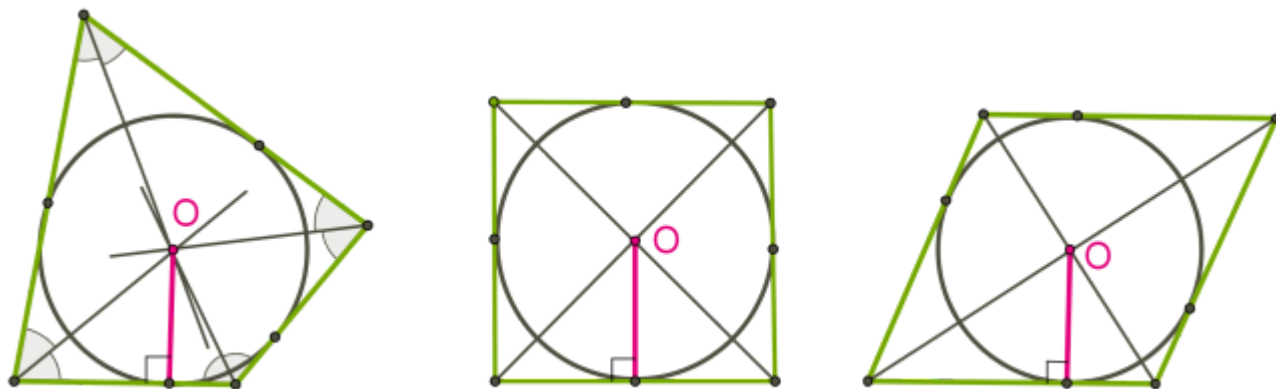
Малюнок створюється в залежності від змісту завдання, часто досить намалювати основу комбінацій цих тіл, оскільки висота циліндра дорівнює висоті призми.

Коло основи циліндра вписане у багатокутник основи призми.

Радіус циліндра — радіус кола, вписаного у багатокутник основи призми.



Центр вписаного у трикутник кола знаходиться у точці перетину бісектрис трикутника.



Центр кола, вписаного у чотирикутник, знаходиться у точці перетину бісектрис чотирикутника. В чотирикутник можна вписати коло, якщо суми довжин протилежних сторін рівні.

Формули обчислення радіуса r описаного кола

Де h — висота, S — площа, p — півпериметр, a — сторона.

Правильний трикутник	$r = \frac{1}{3}h$ $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
Довільний (і прямокутний) трикутник	$r = \frac{S}{p}$
Квадрат	$r = \frac{a}{2}$
Ромб	$r = \frac{S}{p}$ або $r = \frac{h}{2}$
Правильний шестикутник	$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$