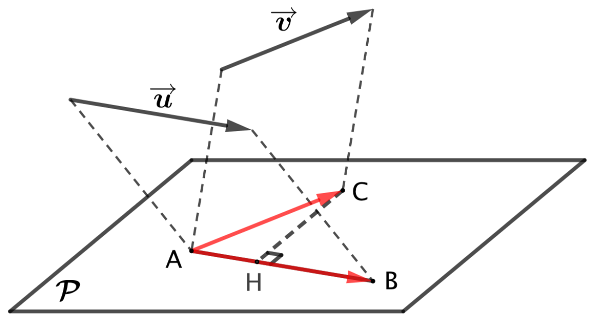
Chapitre 11
Produit scalaire dans l'espace

I. Produit scalaire de deux vecteurs

1. Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. A, B et C sont trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$. P est un plan contenant A, B et C.



Définition 1

On appelle **produit scalaire de l'espace** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit $\vec{u}.\vec{v}$ égal au produit scalaire $\vec{AB}.\vec{AC}$ dans le plan P.

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \bullet \|\vec{v}\| \bullet \cos\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)$$

Remarques

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, si $\vec{v} = \vec{0}$ ou si $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont orthogonaux** alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** et **de même sens** alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \bullet \|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** et **de sens contraires** alors $\vec{u}.\vec{v} = - \|\vec{u}\| \bullet \|\vec{v}\|$
- Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), alors $\vec{AB}.\vec{AC} = \vec{AB}.\vec{AH}$

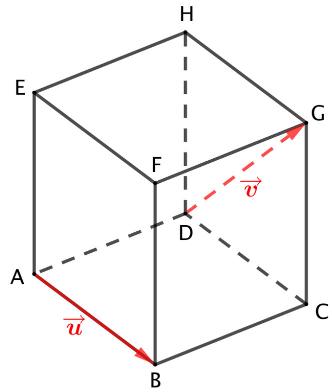
Exemple

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/vp3ICG3rRQk**

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a.

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{AB}.\vec{DG} = \vec{AB}.\vec{AF} = \vec{AB}.\vec{AB} = AB \times AB = a^2$

En remarquant que B est le projeté orthogonal de F sur la droite (AB).



2. Propriétés

Les propriétés dans le plan sont conservées dans l'espace.

Propriété 1

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et un réel k.

- $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.\left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $\left(k\vec{u}\right).\vec{v} = \vec{u}.\left(k\vec{v}\right) = k\vec{u}.\vec{v}$
- $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\vec{u}\ et\ \vec{v}\ sont\ orthogonaux\right) \vee \left(\vec{u} = \vec{0}\right) \vee \left(\vec{v} = \vec{0}\right)$

Démonstration

Il existe un plan P tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admettent des représentants dans P. Dans le plan, les règles de géométrie plane sur les produits scalaires s'appliquent.

Remarque

Pour la dernière propriété, si $\vec{u} \neq \vec{0}$, si $\vec{v} \neq \vec{0}$ et si on arrive à montrer que $\vec{u}.\vec{v} = 0$ alors $\vec{u}\ et\ \vec{v}\ sont\ orthogonaux.$

3. Expression analytique du produit scalaire

Propriété 2

Soit $\vec{u}(x\ y\ z)$ et $\vec{v}(x'\ y'\ z')$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

En particulier, $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Remarque

Soient $A\left(x_A\ y_A\ z_A\right)$ et $B\left(x_B\ y_B\ z_B\right)$ deux points de l'espace. $\vec{AB}\left(x_B - x_A\ y_B - y_A\ z_B - z_A\right)$ et donc

$$\|\vec{AB}\| = AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}$$

Démonstration

$\vec{u}.\vec{v} = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right).\left(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}\right)$

$\vec{u}.\vec{v} = xx'\vec{i}.\vec{i} + xy'\vec{i}.\vec{j} + xz'\vec{i}.\vec{k} + yx'\vec{j}.\vec{i} + yy'\vec{j}.\vec{j} + yz'\vec{j}.\vec{k} + zx'\vec{k}.\vec{i} + zy'\vec{k}.\vec{j} + zz'\vec{k}.\vec{k}$

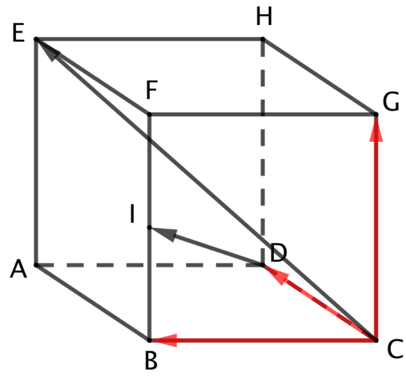
$\vec{u}.\vec{v} = xx'\|\vec{i}\|^2 + yy'\|\vec{j}\|^2 + zz'\|\vec{k}\|^2 = xx' + yy' + zz'$

Les autres produits scalaires sont nuls car il s'agit de vecteurs orthogonaux.

Exemple

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/N1IA15sKH-E**

ABCDEFGH est un cube. Le point I est le milieu du segment $[FB]$. On considère le repère de l'espace $\left(C, \vec{CB}, \vec{CD}, \vec{CG}\right)$.



$\vec{CE}(1\ 1\ 1)$ $\quad\quad$ $\vec{DI}(1\ \ -1\ 0,5)$

$\vec{CE}.\vec{DI} = 1\times1 + 1\times(-1) + 1\times0,5 = 0,5$

Les vecteurs $\vec{CE}$ et $\vec{DI}$ ne sont pas orthogonaux.

4. Formules de polarisation

Propriété 3

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

Démonstration

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \left(\vec{u} + \vec{v}\right)\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

Propriété 4 (formules de polarisation)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$ $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Démonstration

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow 2\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\left(-\vec{v}\right) + \|-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

On en déduit que

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\vec{u}.\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Méthode

Déterminer un angle (non orienté) dans un triangle dont on connaît les longueurs des côtés

Soit A, B, C trois points de l'espace tels que $AB = 7\ cm$, $AC = 4\ cm$ et $BC = 10\ cm$. Que vaut l'angle $\widehat{ABC}$?

Solution

$\vec{AB}.\vec{BC} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{AB}+\vec{BC}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{BC}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{AC}\|^2 - AB^2 - BC^2 -\right) = \frac{1}{2}\left(4^2 - 7^2 - 10^2\right) =- \frac{133}{2}$

Par ailleurs,

$\vec{BA}.\vec{BC} = AB\times BC\times \cos cos \left(\vec{BA},\vec{BC}\right) = 70 \cos cos \left(\vec{BA},\vec{BC}\right)$

Or,

$$\vec{BA}.\vec{BC} =- \vec{AB}.\vec{BC} \Leftrightarrow 70 \cos cos \left(\vec{BA},\vec{BC}\right) = \frac{133}{2} \Leftrightarrow \cos cos \left(\vec{BA},\vec{BC}\right) = \frac{133}{140} = \frac{19}{20}$$

On en déduit donc que

$$\left(\vec{BA},\vec{BC}\right) = \pm\left(\frac{19}{20}\right) \approx \pm 0,318 + 2k\pi\, rad,\ k\in Z \approx \pm 18° + 360k°,\ k\in Z$$

On en déduit que $A\hat{B}C \approx 18°$

II. Vecteur normal à un plan

1. Définition et propriétés

Définition 2

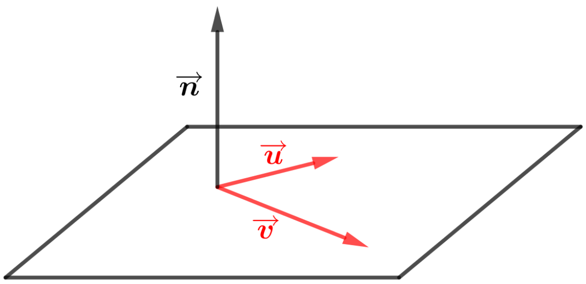
Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est **normal** à un plan P lorsqu'il est **orthogonal** à tout vecteur admettant un représentant dans P.

Théorème 1

Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est **normal** à un plan P s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P.

Démonstration

Elle est incluse dans la démonstration du corollaire qui suit.



Au XIX^{ème} siècle, le vecteur normal $\vec{n}$, appelé produit vectoriel, est noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$.
Le produit vectoriel a été inventé par un mathématicien allemand, *Hermann Günther Grassmann* $(1809 - 1877)$.

Corollaire 1

Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes et non confondues de ce plan.

Démonstration (exigible BAC)

- Si une droite est orthogonale à toute droite d'un plan P alors elle est en particulier orthogonale à deux droites sécantes de P.
- Démontrons la réciproque. Soit une droite (d) de vecteur directeur $\vec{n}$ orthogonale à deux droites (d_1) et (d_2) de P sécantes et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires et orthogonaux au vecteur $\vec{n}$. Soit une **droite quelconque** (Δ) de P de vecteur directeur $\vec{w}$. Démontrons que (Δ) est orthogonale à (d). $\vec{w}$ peut se décomposer en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui constituent une base de P (car non colinéaires). Il existe donc deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On en déduit que
$$\vec{w}.\vec{n} = x\vec{u}.\vec{n} + y\vec{v}.\vec{n} = 0$$
Donc $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\vec{w}$ et donc (d) est orthogonale à (Δ).

Méthode 1

Déterminer si un vecteur est normal à un plan

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/aAnz_cP72Q4**

ABCDEFGH est un cube. Démontrer que le vecteur $\vec{CF}$ est normal au plan (ABG).

Solution

On considère le repère $\left(B, \vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BF}\right)$.

$A(1\ 0\ 0)$ $B(0\ 0\ 0)$ $C(0\ 1\ 0)$

$F(0\ 0\ 1)$ $G(0\ 1\ 1)$

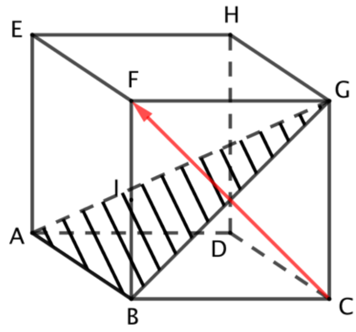
On obtient ainsi

$\vec{CF}(0\ \ -1\ 1)$ $\vec{BG}(0\ 1\ 1)$ $\vec{AB}(-1\ 0\ 0)$

$\vec{CF}.\vec{BG} = 0\times0 - 1\times1 + 1\times1 = 0$

$\vec{CF}.\vec{AB} = 0\times(-1) - 1\times0 + 1\times0 = 0$

Donc $\vec{CF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABG), il est donc normal au plan (ABG).



Méthode 2

Déterminer un vecteur normal à un plan

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/IDBEI6thBPU**

Dans un repère orthonormé, soit $A(1\ 2\ \ -2)$, $B(-1\ 3\ 1)$ et $C(2\ 0\ \ -2)$. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

Solution

$\vec{AB}(-2\ 1\ 3)$ $\vec{AC}(1\ \ -2\ 0)$

Soit un vecteur $\vec{n}(a\ b\ c)$ orthogonal au plan (ABC). Il vérifie le système suivant.

$\begin{cases} \vec{n}.\vec{AB} = 0 \\ \vec{n}.\vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b + 3c = 0 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\times2b + b + 3c = 0 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3b + 3c = 0 \\ a = \end{cases}$

Les vecteurs normaux au plan (ABC) sont donc de la forme $(2b\ b\ b) = b(2\ 1\ 1)$ où $b\in R$

On peut par exemple choisir $b = 1$. Le vecteur $\vec{n}(2\ 1\ 1)$ est donc normal au plan (ABC).

2. Équation cartésienne d'un plan

Théorème 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Un plan P de vecteur normal $\vec{n}(a\ b\ c)$ non nul admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où $d\in R$. Réciproquement, soient a, b, c, d des réels, si $(a; b; c)\neq(0; 0; 0)$, alors l'ensemble des points $M(x\ y\ z)$ vérifiant l'égalité $ax + by + cz + d = 0$ est un **plan**.

Si de plus, $A\left(x_A\ y_A\ z_A\right) \in P$ alors $d = -ax_A - by_A - cz_A = -\vec{n}\bullet\vec{OA}$

Démonstration (exigible BAC)

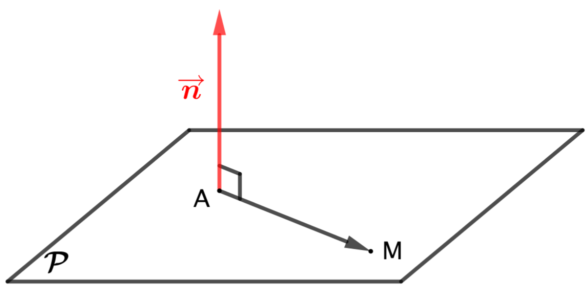
- Soit un plan P de vecteur normal $\vec{n}(a\ b\ c)$ non nul. Soit un point $A\left(x_A\ y_A\ z_A\right) \in P$ et posons $d = -ax_A - by_A - cz_A$

$M(x\ y\ z) \in P \Leftrightarrow \vec{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{AM}.\vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow a\left(x - x_A\right) + b\left(y - y_A\right) + c\left(z - z_A\right) = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$



- Réciproquement, on note E l'ensemble des points $M(x\ y\ z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$

$(a; b; c) \neq (0; 0; 0) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

Le point $A\left(-\frac{ad}{a^2+b^2+c^2}; -\frac{bd}{a^2+b^2+c^2}; -\frac{cd}{a^2+b^2+c^2}\right)$ *vérifie l'équation* $ax + by + cz + d = 0$. *En effet,*

$a\times\left(-\frac{ad}{a^2+b^2+c^2}\right)+b\times\left(-\frac{bd}{a^2+b^2+c^2}\right)+c\times\left(-\frac{cd}{a^2+b^2+c^2}\right)+d=-\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}d+d=0$

Donc $A\in E$

Soit le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. Pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E$, on a

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=\left(x+\frac{ad}{a^2+b^2+c^2}\right)\times a+\left(y+\frac{bd}{a^2+b^2+c^2}\right)\times b+\left(z+\frac{cd}{a^2+b^2+c^2}\right)\times c$

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=ax+by+cz+\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}d=ax+by+cz+d=0$

E est donc l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$, soit le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exemple

Le plan d'équation cartésienne $x-y+5z+1=0$ admet comme vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$

Méthode

Déterminer une équation cartésienne de plan

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/s4xqI6IPQBY**

Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point $A\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$

Solution

Une équation cartésienne du plan P est de la forme $3x-3y+z+d=0$

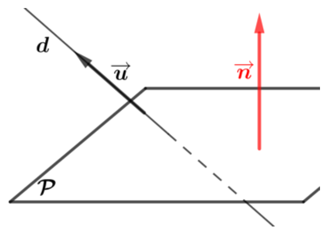
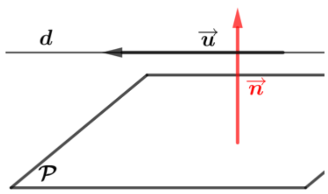
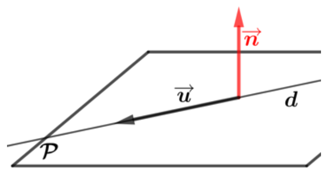
Le point A appartient à P donc ses coordonnées vérifient l'équation

$3\times(-1)-3\times2+1+d=0\Leftrightarrow d=8$

Une équation cartésienne de P est donc $3x-3y+z+8=0$

III. Positions relatives de plans et de droites

1. Positions relatives d'une droite et d'un plan

	d **et** P **sécants**	d **et** P **parallèles**	
Positions relatives d'une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ et d'un plan P de vecteur normal $\vec{n}$		d et P strictement parallèles 	$d\subset P$ 
Vecteurs	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ orthogonaux	
Produit scalaire	$\vec{u}.\vec{n}\neq0$	$\vec{u}.\vec{n}=0$	

Méthode

Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/BYBMauyizhE**

Dans un repère orthonormé, le plan P a pour équation $2x-y+3z-2=0$. Soit $A\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que la droite (AB) et le plan P sont sécants.

2. Déterminer leur point d'intersection.

Solution

1. Un vecteur normal au plan P est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$. La droite (AB) et le plan P sont sécants si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux. Or, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=-2\times2+3\times3=5\neq0$

On conclut que la droite (AB) et le plan P ne sont pas parallèles et donc sécants.

2. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases}x=1-2t\\y=2\\z=-3+3t\end{cases},t\in R$

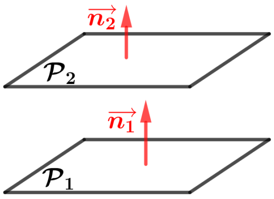
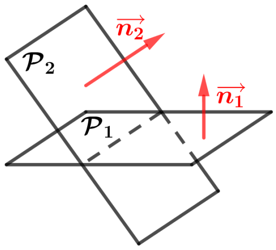
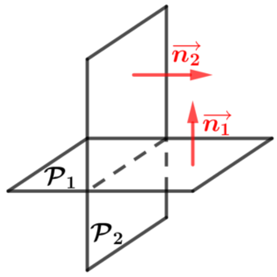
Le point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ intersection de la droite (AB) et le plan P vérifie donc le système

$\begin{cases}x=1-2t\\y=2\\z=-3+3t\\2x-y+3z-2=0\end{cases},t\in R$

On en déduit que $2(1-2t)-2+3(-3+3t)-2=0\Leftrightarrow5t-11=0\Leftrightarrow t=\frac{11}{5}$

Donc $\begin{cases}x=1-2t=1-2\times\frac{11}{5}=-\frac{17}{5}\\y=2\\z=-3+3t=-3+3\times\frac{11}{5}=\frac{18}{5}\end{cases}$ Ainsi la droite (AB) et le plan P sont sécants en $M\left(-\frac{17}{5};2;\frac{18}{5}\right)$

2. Positions relatives de deux plans

Positions relatives d’un plan P_1 de vecteur normal $\vec{n}_1$ et d’un plan P_2 de vecteur normal $\vec{n}_2$	**P_1 et P_2 parallèles**	**P_1 et P_2 sécants**	
			P_1 et P_2 perpendiculaires
			
Vecteurs	$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ colinéaires	$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ non colinéaires	$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ orthogonaux $\vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 0$

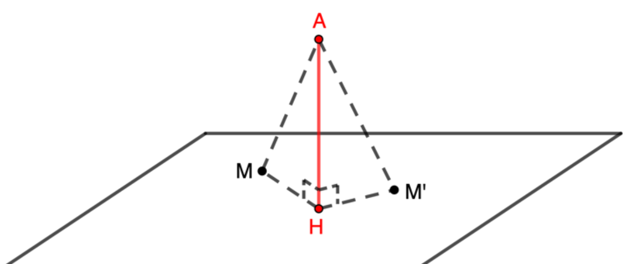
Méthode
Déterminer l'intersection de deux plans
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/4dkZ0OQQwaQ**
Dans un repère orthonormé, les plans P et P' ont pour équations respectives
$-x+2y+z-5=0$ et $2x-y+3z-1=0$
1. Démontrer que les plans P et P' sont sécants.
2. Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection d.
Solution
1. Les plans P et P' sont sécants si leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires. Un vecteur normal de P est $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et un vecteur normal de P' est $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$. Les coordonnées des deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc leurs vecteurs ne sont pas colinéaires.
2. Le point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de d, intersection de P et de P', vérifie donc le système
$(S)\begin{cases}-x+2y+z-5=0\\2x-y+3z-1=0\end{cases}$
On choisit par exemple x comme paramètre et on pose $x=t$. On obtient le système suivant
$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\-t+2y+z-5=0\\2t-y+3z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\z=t-2y+5\\2t-y+3(t-2y+5)-\end{cases}$
$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\z=t-2\left(\frac{5t+14}{7}\right)+5\\y=\frac{5t+14}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=2+\frac{5}{7}t\\z=1-\frac{3}{7}t\end{cases}$
Ce dernier système est une représentation paramétrique de d.

Propriété 5
Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Méthode
Démontrer que deux plans sont perpendiculaires
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/okvo1SUtHUc**
Dans un repère orthonormé, les plans P et P' ont pour équations respectives
$2x+4y+4z-3=0$ et $2x-5y+4z-1=0$
Démontrer que les plans P et P' sont perpendiculaires.
Solution
Les plans P et P' sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre. Un vecteur normal de P est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$ et un vecteur normal de P' est $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$
$\vec{n}.\vec{n}'=2\times2+4\times(-5)+4\times4=0$
Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux donc les plans P et P' sont perpendiculaires.

IV. Distance à une droite, à un plan

Définition 3
La distance d’un point à un plan ou à droite est la plus courte distance entre ce point et un point quelconque de la droite ou du plan.



Propriété 6
Si un point A est sur un plan ou sur une droite, sa distance à ce plan ou à cette droite est nulle. Dans la cas contraire, la distance correspond à la distance AH entre le point A et le pied H de la perpendiculaire à la droite ou au plan.

Preuve
Soit un plan P. Soit H le pied de la perpendiculaire au plan P passant par un point A de l'espace qui n'est pas sur le plan P et M un point du plan P différent de H. D'après le théorème de Pythagore,

$$AM^2 = AH^2 + MH^2 \Longrightarrow AM^2 > AH^2 \Longrightarrow AM > AH$$

AH est donc bien la plus courte distance entre le point A et le plan P.
Le raisonnement est identique avec un point et une droite.

Méthode
Calculer la distance d'un point à une droite
On considère les points $A(1\ 4\ 2\ )$, $B(2\ 3\ 4\ )$ et $C(5\ 4\ 1\ )$. Calculer la distance de C à la droite (AB).
Solution
Déterminons d'abord si les points A, B, C sont alignés. Si tel est le cas, la distance est nulle.

$$\vec{AB} = (2\ 3\ 4\ ) - (1\ 4\ 2\ ) = (1\ \ -1\ 2\ )\ \vec{AC} = (5\ 4\ 1\ ) - (1\ 4\ 2\ ) = (4\ 0\ \ -1\ )$$

Remarquons que

$$|1\ 4\ \ -1\ 0\ | = 1\times 0 - 4\times(-1) = 4 \neq 0$$

Donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que les points A, B, C ne sont pas alignés donc la distance entre C et la droite (AB) n'est pas nulle.
Soit $H(x\ y\ z\ )$ le point d'intersection de la droite (AB) et de sa perpendiculaire passant par C. $H\in(AB)$ donc il existe $t\in R$ tel que

$$\{x = 1 + t\ y = 4 - t\ z = 2 + 2t$$

Remarquons aussi que

$$\vec{AB}.\vec{CH} = 0 \Leftrightarrow (1\ \ -1\ 2\ ).(1 + t - 5\ 4 - t - 4\ 2 + 2t - 1\ ) = 0 \Leftrightarrow (1\ \ -1\ 2\ ).(t - 4\ \ -t\ 2t + 1\ ) = 0 \Leftrightarrow t - 4 +$$

On en déduit que

$$t = \frac{1}{3}$$

Donc

$$H(1 + 1/3\ 4 - 1/3\ 2 + 2/3\ )\ et\ \vec{CH} = (1 + 1/3\ 4 - 1/3\ 2 + 2/3\ ) - (5\ 4\ 1\ ) = (-11/3\ \ -1/3\ 5/3\ )$$

Ainsi, la distance du point C à la droite (AB) est CH

$$CH = \sqrt{\left(-\frac{11}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{121}{9} + \frac{1}{9} + \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{147}{9}} = \frac{\sqrt{49}\times\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

Remarque
La distance d d'un point P à une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par A est donnée par la formule

$$d = \frac{\|\vec{AP}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Où $\vec{AP}\wedge\vec{u}$ désigne le produit vectoriel de $\vec{AP}$ et de $\vec{u}$. Cette notion n'est **plus au programme** de terminale mais reste très pratique dans certains cas (un produit vectoriel nul indique que les vecteurs sont colinéaires, il permet aussi d'obtenir simplement un vecteur orthogonal à deux vecteurs donnés, des calcul d'aires…)

$$(x\ y\ z\ )\wedge\left(x'\ y'\ z'\ \right) = \left(yz' - y'z\ zx' - xz'\ xy' - x'y\right)$$

Dans le cas présent,

$$d = \frac{\|\vec{AC}\wedge\vec{AB}\|}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\|(4\ 0\ -1\ )\wedge(1\ -1\ 2\ )\|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{\|(-1\ -9\ -4\ )\|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{(-1)^2+(-9)^2+(-4)^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{49}\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

Remarques
- $(-1\ \ -9\ \ -4\ )$ est un vecteur orthogonal à $\vec{AC}$ et à $\vec{AB}$. En fait, ces trois vecteurs forment une base de l'espace.

- $\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}\| = \sqrt{98}$ est l'aire parallélogramme dont les côtés sont $[AB]$ et $[AC]$. C'est d'ailleurs cet argument qui peut servir à démontrer la formule énoncée plus haut.

Méthode

Calculer la distance d'un point à un plan

On considère les points $A(1\ 4\ 2)$, $B(2\ 3\ 4)$, $C(5\ 4\ 1)$ et $D(2\ 3\ 1)$. Calculer la distance du point D au plan (ABC).

Solution

Déterminons d'abord une équation catésienne du plan (ABC). Calculons pour cela les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n} = (a\ b\ c)$ au plan (ABC).

$$\overrightarrow{AB} = (2\ 3\ 4) - (1\ 4\ 2) = (1\ \ -1\ 2)\ \overrightarrow{AC} = (5\ 4\ 1) - (1\ 4\ 2) = (4\ 0\ \ -1)$$

Nécessairement, les conditions suivantes doivent être vérifiées

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AC}.\vec{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 4a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 8a = 0 \\ c = 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 9a \\ c = 4a \end{cases}$$

On peut choisir $a = 1$ par exemple. Ainsi,

$$\vec{n} = (1\ 9\ 4)$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc

$$x + 9y + 4z + d = 0$$

Or, $A \in (ABC)$, donc

$$1 + 9\times4 + 4\times2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -45$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc

$$x + 9y + 4z - 45 = 0$$

Soit $H(x\ y\ z)$ le pied de la perpendiculaire au plan (ABC) passant par D.

$$\overrightarrow{DH} = (x\ y\ z) - (2\ 3\ 1) = (x - 2\ y - 3\ z - 1)$$

$\overrightarrow{DH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires par définition donc il existe un réel k tel que

$$\overrightarrow{DH} = k\vec{n} \Leftrightarrow (x - 2\ y - 3\ z - 1) = k(1\ 9\ 4) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = k \\ y - 3 = 9k \\ z - 1 = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k + 2 \\ y = 9k + 3 \\ z = \end{cases}$$

Or, $H \in (ABC)$ donc

$$x + 9y + 4z - 45 = 0 \Leftrightarrow k + 2 + 9(9k + 3) + 4(4k + 1) - 45 = 0 \Leftrightarrow 98k - 12 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{12}{98} = \frac{6}{49}$$

On en déduit que

$$H = (x\ y\ z) = \left(\frac{6}{49} + 2\ \frac{54}{49} + 3\ \frac{24}{49} + 1\right) = (104/49\ 201/49\ 73/49)$$

$$\overrightarrow{DH} = \left(\frac{6}{49} + 2\ \frac{54}{49} + 3\ \frac{24}{49} + 1\right) - (2\ 3\ 1) = (6/49\ 54/49\ 24/49)$$

On en déduit que la distance du point D au plan (ABC) vaut DH

$$DH = \sqrt{\left(\frac{6}{49}\right)^2 + \left(\frac{54}{49}\right)^2 + \left(\frac{24}{49}\right)^2} = \frac{1}{49}\sqrt{36 + 2916 + 576} = \frac{1}{49}\sqrt{3528} = \frac{42\sqrt{2}}{49} = \frac{6\sqrt{2}}{7}$$

Remarque

La distance d d'un point $P\left(x_P\ y_P\ z_P\right)$ à un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ de vecteur normal $\vec{n}(a\ b\ c)$ et passant par A est donnée par la formule **(hors programme)**

$$d = \frac{|\vec{n}.\overrightarrow{AP}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

On peut retrouver une démonstration de cette formule sur Wikipédia qui reprend de manière théorique toutes les étapes du raisonnement ci-dessus.

En appliquant la formule ci-dessus, on retrouve le résultat

$$DH = \frac{|\vec{n}.\overrightarrow{AD}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(1\ 9\ 4).(2 - 1\ 3 - 4\ 1 - 2)|}{\sqrt{1^2 + 9^2 + 4^2}} = \frac{|1 - 9 - 4|}{\sqrt{1^2 + 9^2 + 4^2}} = \frac{|-12|}{\sqrt{98}} = \frac{12}{7\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{7}$$

Cette dernière formule évite de calculer les coordonnées du point H et même l'équation cartésienne du plan (ABC) (seules les données d'un point du plan et d'un vecteur normal suffisent).

V. Plan médiateur

Soient $A\left(x_A\ y_A\ z_A\right)$ et $B\left(x_B\ y_B\ z_B\right)$ deux points de l'espace. Le **plan médiateur** du segment $[AB]$ est le plan perpendiculaire à la droite (AB) qui passe par le milieu du segment $[AB]$. Une équation cartésienne du plan médiateur au segment $[AB]$ est

$$(x_A - x_B)x + (y_A - y_B)y + (z_A - z_B)z + d = 0$$

Où

$$d = (x_B - x_A)\left(\frac{x_A+x_B}{2}\right) + (y_B - y_A)\left(\frac{y_A+y_B}{2}\right) + (z_B - z_A)\left(\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

Pour le prouver, il suffit de remarquer que le vecteur $\vec{BA}$ de coordonnées $\left(x_A - x_B\; y_A - y_B\; z_A - z_B\right)$ est normal au plan médiateur de $[AB]$ et que le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}\;\; \frac{y_A+y_B}{2}\;\; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$

Exemple

Soient $A(3\;\; -1\; 5\,)$ et $B(-\,2\; 3\;\; -1\,)$ deux points de l'espace. On veut calculer une équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$.

Solution

$$\vec{BA} = \left(x_A - x_B\; y_A - y_B\; z_A - z_B\right) = (3 - (-\,2)\;\; -1 - 3\; 5 - (-\,1)\,) = (5\;\; -4\; 6\,)$$

Soit I le milieu du segment $[AB]$

$$I = \left(\frac{x_A+x_B}{2}\;\; \frac{y_A+y_B}{2}\;\; \frac{z_A+z_B}{2}\right) = (1/2\; 1\; 2\,)$$

Une équation cartésienne du plan médiateur est donc

$$5x - 4y + 6z + d = 0$$

Le point I appartient au plan médiateur donc

$$5\times\frac{1}{2} - 4\times 1 + 6\times 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -\,10,5$$

Finalement,

$$5x - 4y + 6z - 10,5 = 0$$

est une équation cartésienne de ce plan médiateur.