

# RM1MS-2025-1- PACS

Os PACs são “PACOTES” com estudos mais abrangentes, existe um PAC para cada ETAPA e ainda um PAC de anexos com todas as principais fórmulas estudadas.

## **PAC 1: Tensão**

- [1.1 Introdução](#)
- [1.2 Hipóteses Simplificadoras](#)
- [1.3 Equilíbrio de um Corpo Deformável](#)
- [1.4 Conceito de Tensão](#)
- [1.5 Tensão Normal](#)
- [1.6 Tensão de Cisalhamento](#)
- [1.7 Tensão Admissível](#)
- [1.8 Tensão de Esmagamento](#)
- [1.9 Projeto de Ligações Simples](#)
  - [1.9.1 Exemplos/Exercícios Sobre O Item 1.9](#)
  - [1.9.2 Lista De Exercícios](#)
  - [1.9.3 Exercício Adicional](#)
- [1.10 Tensões em um Plano Oblíquo em Peça sob Esforço Axial](#)
  - [1.10.1 Exemplos](#)
- [1.11 Lista de exercícios 2 - final do capítulo 8 \(livro\) \(16 questões \)](#)

## **PAC 2: Deformação**

- [2.1 Conceito de Deformação](#)
- [2.2 Explicações mais detalhadas:](#)
  - [2.2.1 Relação Tensão-Deformação Elástica: Lei de Hooke](#)
    - [Item 1. Conceitos Fundamentais](#)
    - [Item 2. EXEMPLO de Cálculo](#)
    - [Item 3. Aplicação Prática](#)
    - [Item 4. Limitações da Lei de Hooke](#)

## **PAC 3 - Propriedades Mecânicas**

- [3.1 Ensaio de Tração e Compressão](#)
- [3.2 Diagrama Tensão-Deformação](#)
- [3.3 Lei de Hooke \(mais detalhes\)](#)
- [3.4 Comportamento de Materiais Dúcteis e Frágeis](#)
- [3.5 Energia de Deformação](#)
- [3.6 Coeficiente de Poisson](#)
- [3.7 Diagrama Tensão-Deformação e Lei de Hooke para o Cisalhamento](#)
- [3.8 Relação entre as Constantes Elásticas do Material de um material isotrópico homogêneo.](#)
- [3.9 lei de Hooke generalizada para carregamento multiaxial de um material isotrópico homogêneo.](#)

#### **PAC 4 - Barras Submetidas à Carga Axial**

##### 4.1 Princípio de Saint-Venant

##### 4.2 Deslocamento Relativo de Barras Submetidas a Carga Axial

##### 4.3 Rigidez e Flexibilidade

Rigidez é a resistência de um componente à deformação, enquanto flexibilidade é a facilidade com que se deforma.

##### 4.4 Princípio da Superposição dos Efeitos

##### 4.5 Sistemas Estaticamente Indeterminados

Sistemas onde não é possível encontrar as reações usando apenas equilíbrios, requerendo métodos adicionais como o das forças ou deformações.

##### 4.6 Método das Forças

##### 4.7 Efeitos Térmicos

##### 4.8 Concentração de Tensões (Saint Venant)

#### **PAC 5 - EXERCÍCIOS GERAIS DA ETAPA 1**

##### 1. Questões teóricas:

##### 2. Questões procedurais:

#### **PAC 6 - Torção**

##### 1. Torque

##### 2. Ângulo de Cisalhamento

##### 3. Ângulo de Torção

##### 4. Tensão de Cisalhamento da Torção

##### 5. Seções Transversais Circulares Maciças

##### 6. Seções Transversais Tubulares

##### 7. Resumo dos Conceitos

#### **PAC 7 - EXERCÍCIOS GERAIS DE TORÇÃO**

##### 1. QUESTIONAMENTOS FEITOS EM SALA (mini PBL)

##### 2. EXERCÍCIOS

#### **PAC 8 - FLEXÃO**

##### 1. Conceitos Fundamentais

##### 2. Tipos de Carregamentos e Vinculações

##### 3. Equações de Flexão

##### 4. Distribuição de Tensões

##### 5. Teoria de Flexão Simples

##### 6. Momentos Fletores Máximos em Peças

###### 1. Conceito de Momento Fletor

###### 2. Fórmulas para o Cálculo dos Momentos Fletores Máximos

(a) Viga Simplesmente Apoiada com Carregamento Concentrado no Centro

(b) Viga Simplesmente Apoiada com Carregamento Uniformemente Distribuído

(c) Viga Engastada e Livre (em Balanço) com Carregamento Concentrado na Extremidade

(d) Viga Engastada e Livre (em Balanço) com Carregamento Uniformemente

Distribuído

3. Importância dos Momentos Fletores Máximos

4. Relação entre Momento Fletor e Flexão

7. Cálculo de Deflexão

1. Equação Diferencial da Deflexão

2. Fórmulas de Deflexão Máxima (Flecha Máxima) para Casos Comuns de Vigas

(a) Viga Simplesmente Apoiada com Carregamento Concentrado no Centro

(b) Viga Simplesmente Apoiada com Carregamento Uniformemente Distribuído

(c) Viga Engastada e Livre (em Balanço) com Carregamento Concentrado na Extremidade

(d) Viga Engastada e Livre (em Balanço) com Carregamento Uniformemente Distribuído

3. Aplicação das Fórmulas de Deflexão

4. Relação Flecha/Vão

1. Valores Recomendados por Normas

8. Tipos de flexão

9. Aplicações e Importância dos estudos de flexão

10. Tipos de vigas que serão estudados aqui, separadas por CASOS.

10.1 CASO 1 - Flexão simples em viga isostática, de vão 'L', com dois apoios simples, sem balanço, com seção transversal retangular e de carregamento uniformemente distribuído por todo vão de carga 'q'

10.1.1 QUESTÕES sobre o caso 1

10.2 CASO 2 - Flexão simples em viga isostática, de vão 'L', com um engaste com seção transversal retangular e de carregamento pontual no extremo livre do balanço, no sentido da gravidade, com valor F

11. EXERCÍCIOS : Questões Teóricas sobre Flexão (necessita REVISÃO)

11.1 Gabarito Resumido

12. MODELOS DE EXERCÍCIOS: FLEXÃO (necessita de revisão)

**PAC 9 - Flambagem Elástica**

1. Conceitos Fundamentais de Flambagem Elástica

2. Fatores que Influenciam a Flambagem Elástica

3. Fórmula da Tensão Crítica de Flambagem

4. Importância da Análise de Flambagem

5. Aplicações e Limitações

PAC 10 - Vasos De Paredes Finas

1. Vasos Cilíndricos de Paredes Finas

2. Vasos Esféricos de Paredes Finas

3. Comparação entre Vasos Cilíndricos e Esféricos

4. Aplicações Práticas

PAC 11 - Introdução ao Estado Plano de Tensões

1. Conceitos de Estado Plano de Tensões

[2.Transformação de Tensões](#)

[3.Círculo de Mohr](#)

**[PAC 12 - EXERCÍCIOS GERAIS DA ETAPA 3](#)**

[1.EXERCÍCIOS GERAIS \(Casos\)](#)

[2.QUESTÕES DIRECIONADAS](#)

**[PAC 13 - ANEXO - FOLHA DE FÓRMULAS](#)**

[1. Fórmulas manuscritas](#)

[2. Fórmulas digitadas](#)

**[PAC 20 : Distribuição Detalhada Do Conteúdo Para Cada Aula - Resumo](#)**

---

Os PACs são “PACOTES” com estudos mais abrangentes, existe um PAC para cada ETAPA e ainda um PAC de anexos com todas as principais fórmulas estudadas.

---

## PAC 1: Tensão

### 1.1 Introdução

A tensão é uma medida da força interna por unidade de área em um material. É fundamental entender como os materiais se comportam sob diferentes condições de carga.

Tensão = (Força) / (Área de atuação)

### 1.2 Hipóteses Simplificadoras

Assume-se a homogeneidade, isotropia e comportamento elástico do material para simplificar os cálculos de tensão, permitindo aplicar a teoria da elasticidade de forma mais direta.

### 1.3 Equilíbrio de um Corpo Deformável

Todo corpo sob carga deve satisfazer as condições de equilíbrio estático, onde a soma das



forças e momentos deve ser zero para que o corpo esteja em equilíbrio.

#### **1.4 Conceito de Tensão**

Tensão é a força interna dividida pela área sobre a qual essa força atua, geralmente expressa em pascal (Pa).

#### **1.5 Tensão Normal**

É a componente da tensão que atua perpendicularmente à superfície considerada. É responsável por fenômenos como tração e compressão.

#### **1.6 Tensão de Cisalhamento**

Tensão de cisalhamento é a componente da tensão que atua tangencialmente à superfície, causando deformações por deslizamento entre camadas adjacentes do material.

#### **1.7 Tensão Admissível**

É a máxima tensão que um material pode suportar sem falhar, considerando um fator de segurança. Usada para dar uma margem de segurança ao produto ou peça. Em suma: As tensões admissíveis são as máximas tensões que um material pode receber com segurança (normalmente são apresentadas as tensões admissíveis de tração, compressão e cisalhamento)

#### **1.8 Tensão de Esmagamento**

Tensão que ocorre quando uma carga é aplicada sobre uma área tão concentrada que causa deformação ou ruptura localizada.

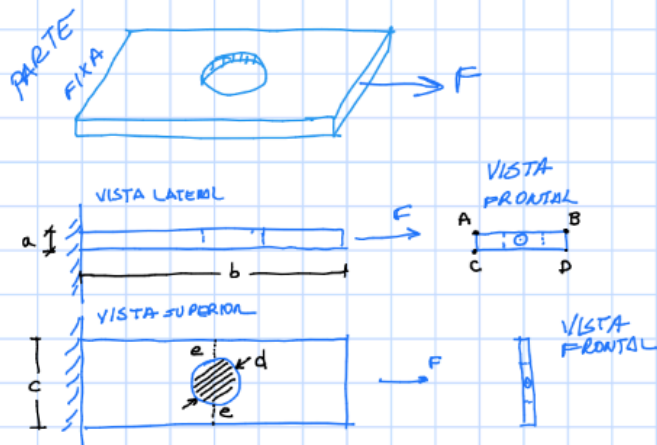
#### **1.9 Projeto de Ligações Simples**

Foco no projeto e dimensionamento de conexões entre elementos estruturais que suportem cargas sem exceder a tensão admissível, utilizando parafusos, rebites ou soldas.

##### **1.9.1 Exemplos/Exercícios Sobre O Item 1.9**

##### **EXEMPLO 1**

## EXEMPLO 1



A tração que esta peça recebe atua no meio da seção transversal a qual, tal força é perpendicular (ou seja, é normal a seção transversal de atuação)

A simbologia "⊙" indica o local que atuação da força e o sentido desta, que, no caso da vista frontal, esta saindo do plano de escrita.

- i) Calcule a tensão média em uma seção que atua junto ao engaste.

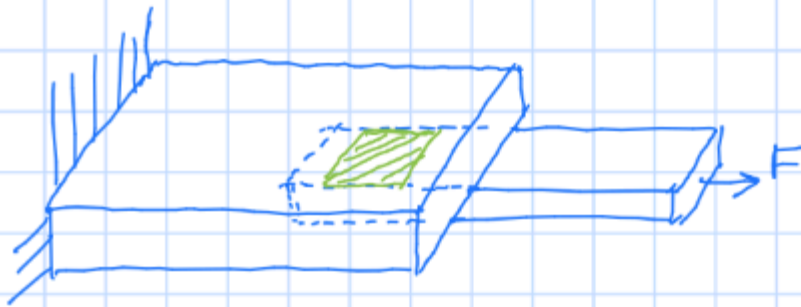
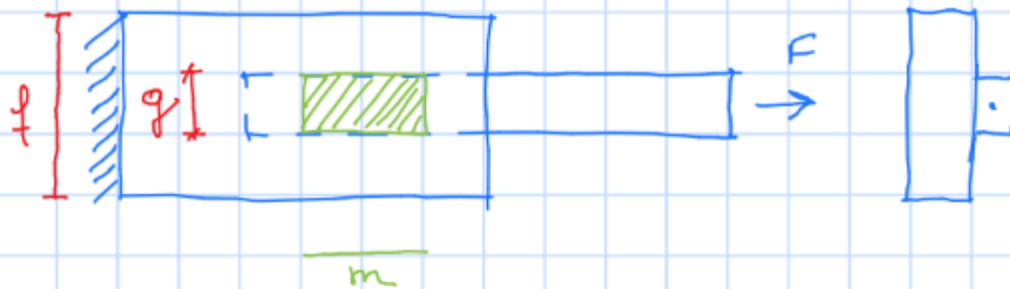
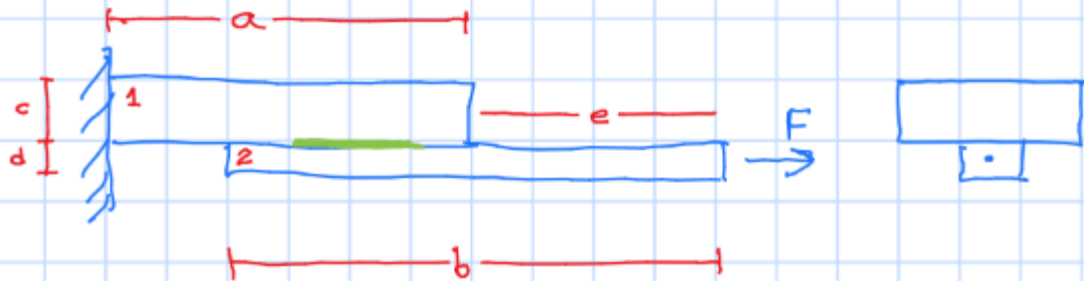
$$\sigma = \frac{F}{a \cdot b}$$

- ii) Calcule o maior valor de tensão média de tração que atua na peça.

$$\sigma = \frac{F}{a(b-d)}$$

## EXEMPLO 2

## EXEMPLO 2



DETERMINE

i) A tensão média que ocorre no apoio

$$\sigma = \frac{F}{f \cdot c}$$

ii) Calcular a tensão média que ocorre nas peças 1 e 2

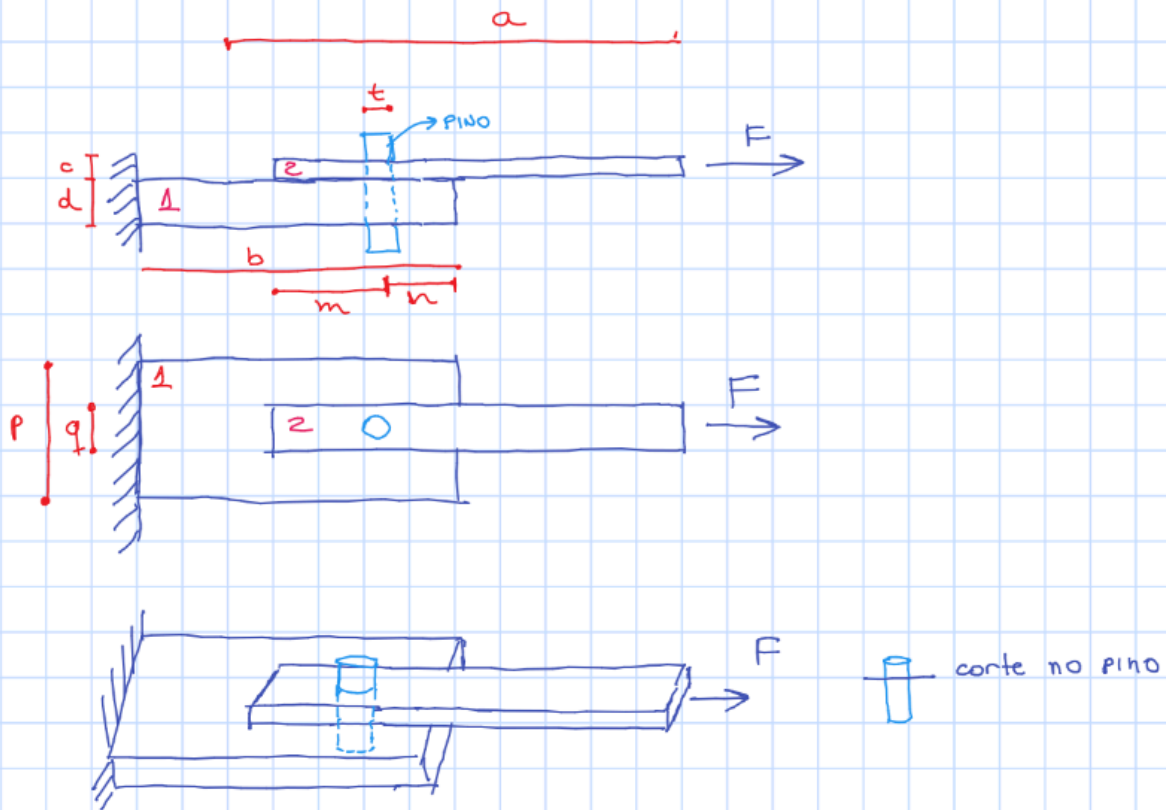
$$\sigma_1 = \frac{F}{f \cdot c} \quad \sigma_2 = \frac{F}{g \cdot d}$$

iii) Calcular a tensão na área de colagem.

$$\tau = \frac{F}{m \cdot g}$$

EXEMPLO 3

### EXEMPLO 3



DETERMINE

i) Determine a tensão no apoio.

$$\sigma = \frac{F}{d \cdot p}$$

ii) Determine a tensão máxima que ocorre em cada barra (peças 1 e 2)

$$\sigma_1 = \frac{F}{d \cdot (p-t)} \quad \sigma_2 = \frac{F}{c \cdot (q-t)}$$

iii) Determine a tensão de aselhamento no pino

$$\tau = \frac{F}{A_{\text{secaj}}^{\text{PINO}}} = \frac{F}{\pi r^2} = \frac{F}{\pi \left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

iv) Determine as tensões de esmagamento nas peças 1 e 2 provocadas pelo pino

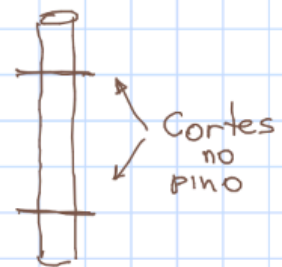
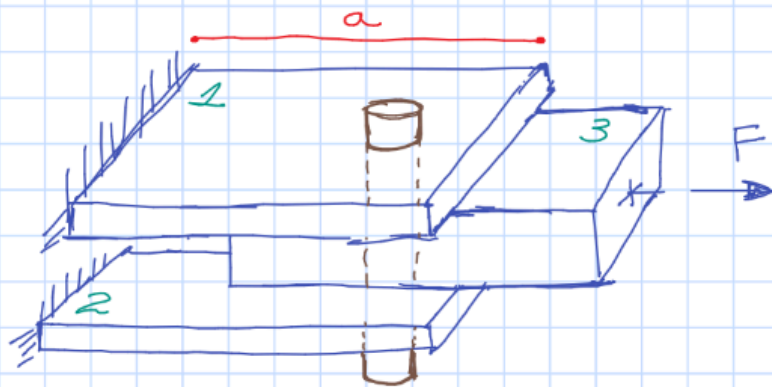
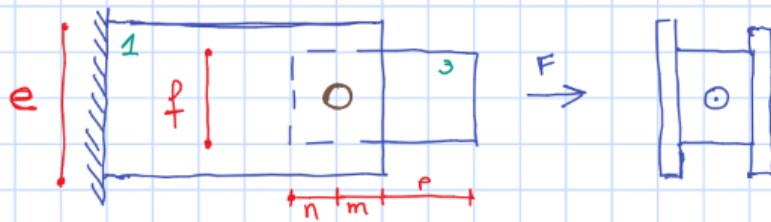
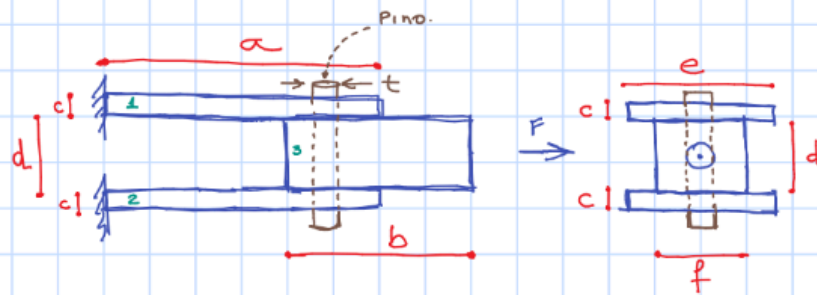
$$\sigma_1 = \frac{F}{t \cdot d} \quad \sigma_2 = \frac{F}{t \cdot c}$$

v) Determine as tensões de rasgamento nas peças 1 e 2 provocadas pelo pino

$$\tau_1 = \frac{F}{2 \cdot n \cdot d} \quad \tau_2 = \frac{F}{2 \cdot m \cdot c}$$

EXEMPLO 4

# EXEMPLO 4



Cortes  
no  
PINO

tensão nas barras

$$\sigma_1 = \frac{F}{A} = \frac{F}{2 \cdot c \cdot e} = \sigma_2$$

$$\sigma_3 = \frac{F}{A} = \frac{F}{d \cdot f}$$

tensão máxima nas barras

$$\sigma_1 = \frac{F}{A} = \frac{F}{2c(e-t)} = \sigma_2$$

$$\sigma_3 = \frac{F}{A} = \frac{F}{d(f-t)}$$

cisalhamento do pino

$$\tau = \frac{F/2}{\pi \left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

Rasgamento nos peças 1 e 3

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{F}{4 \cdot m \cdot c}$$

$$\bar{\sigma}_3 = \frac{F}{2 \cdot n \cdot d}$$

#### 1.9.2 Lista De Exercícios





## QUESTÕES DO LIVRO

cap. 8

( PRIMEIRA LISTA  
DE EXERCÍCIOS )

pag 317 8.1; 8.2; 8.3

pag 316 Problema Resolvido 8.2

para esta situação após os cálculos solicitados nos itens a, b e c, verifique se as tensões de esmagamento da peça e rasgamento da peça (provocadas pelo pino) estão dentro das faixas admissíveis.

pag 318 8.9

pag 319 8.13

pag 320 8.16 8.17 8.18

pag 321 8.20

Questões do livro - Capítulo 8 - Parte 1 (10 questões )

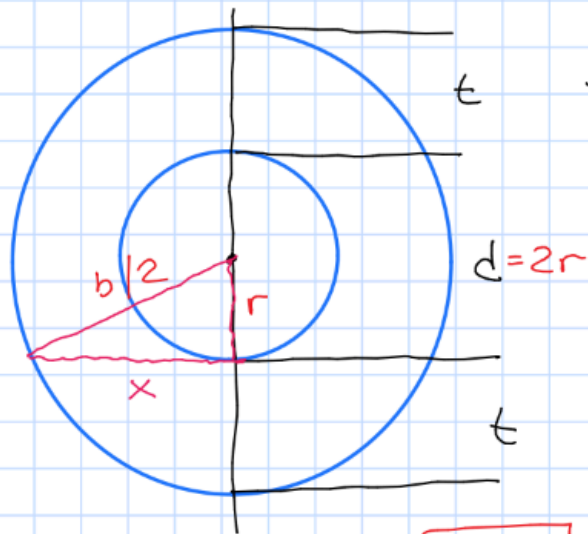
Pág. 317 - 8.1 , 8.2 , 8.3

Pág. 316 - Problema Resolvido 8.2

...

OBS. p/

pag 316.

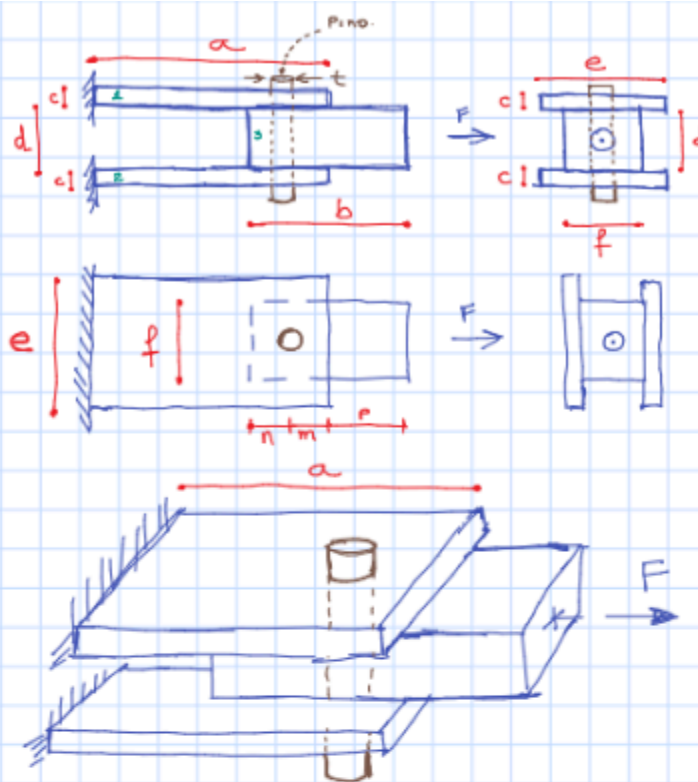


$$b = 2t + d = 2t + 2r$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + r^2 \rightarrow x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - r^2}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{2t+2r}{2}\right)^2 - r^2} = \sqrt{2(t+r)^2 - r^2}$$

### 1.9.3 Exercício Adicional



Material do pino  $\tau_{\text{max. admissível}} = 20 \text{ MPa}$   
 $\sigma_{\text{max. admissível}} = 60 \text{ MPa}$

Material das chapas  $\tau_{\text{max. admissível}} = 8 \text{ MPa}$   
 $\sigma_{\text{max. admissível}} = 22 \text{ MPa}$

Determine as dimensões da peça de forma que as tensões admissíveis não sejam superadas pelo esforço de tração de 2000 kgf.

OBS: Se, como tensão admissível axial (normal) estiver listada uma só tensão, ela pode ser

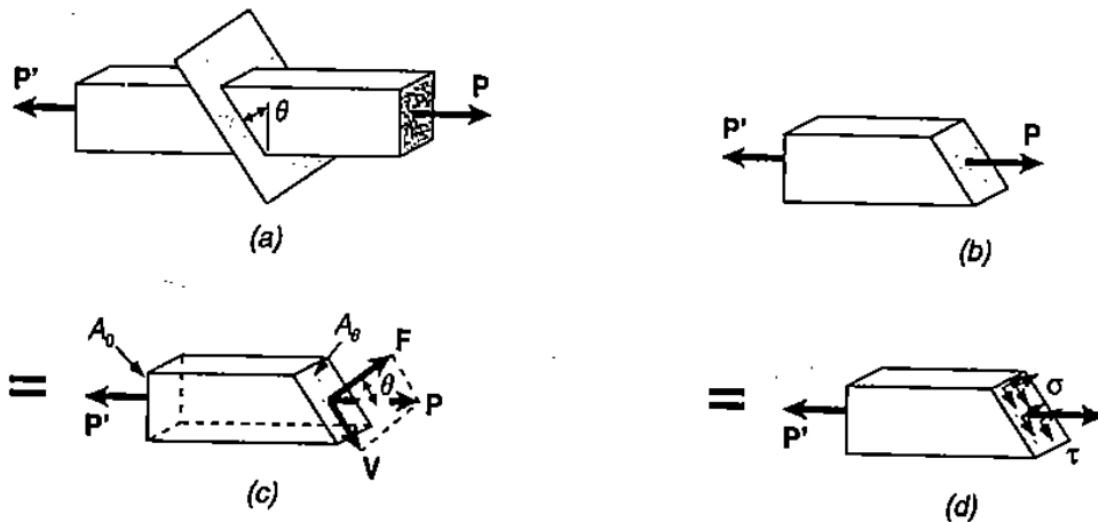
usada tanto como admissível para tração e compressão.

### 1.10 Tensões em um Plano Oblíquo em Peça sob Esforço Axial

Quando uma peça estrutural está submetida a esforços axiais ao longo de seu eixo longitudinal, as tensões desenvolvidas não são uniformemente distribuídas se analisarmos planos que não são perpendiculares ao eixo de aplicação da carga. As tensões em planos oblíquos são uma combinação complexa de tensões normais e de cisalhamento, que variam de acordo com o ângulo do plano em relação ao eixo longitudinal.

#### Análise das Tensões

Considerando uma barra cilíndrica sob tração ou compressão axial, as tensões em um plano oblíquo  $\theta$  (theta) ao eixo da barra podem ser descritas da seguinte maneira:



1. **Tensão Normal ( $\sigma_\theta$ ):** A componente normal da tensão no plano inclinado é dada por:

$$\sigma_\theta = \sigma \cos^2(\theta) \quad \text{ou} \quad \sigma_\theta = \sigma \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\theta)$$

onde  $\sigma$  é a tensão axial e  $\theta$  é o ângulo do plano em relação ao eixo longitudinal.

2. **Tensão de Cisalhamento ( $\tau_\theta$ ):** A tensão de cisalhamento no mesmo plano pode ser calculada como:

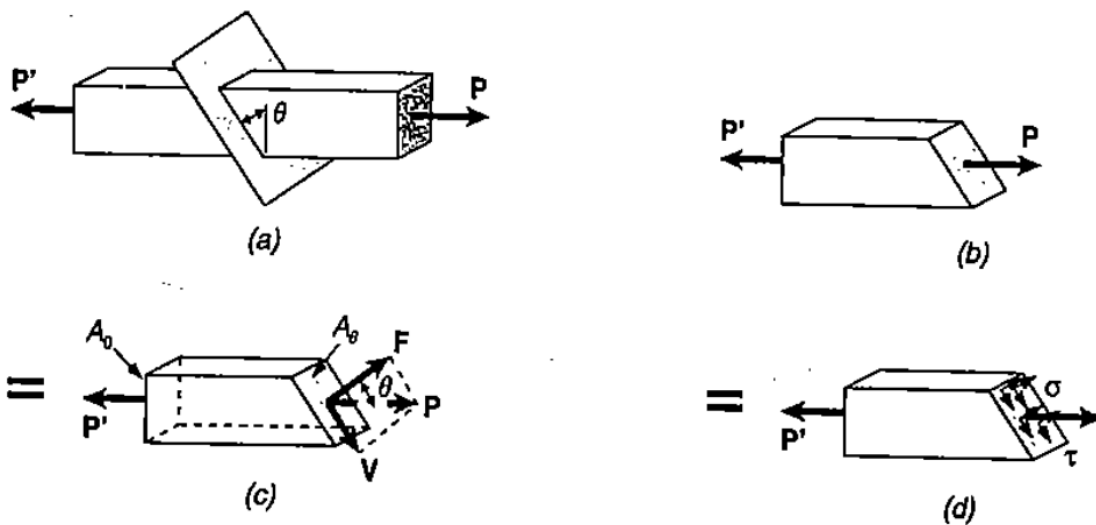
$$\tau_\theta = \sigma \sin(\theta) \cos(\theta) \quad \text{ou} \quad \tau_\theta = \sigma \cdot \sin(2\theta)/2$$

Observação: Isso mostra como a tensão de cisalhamento alcança seu valor máximo em um ângulo de 45° em relação ao eixo longitudinal e este valor máximo, é numericamente igual (em módulo) a metade da tensão normal que atua na seção  $A_0$ .

### Implicações Práticas

Este conhecimento é importante para o design de componentes como eixos, colunas ou vigas, onde os planos oblíquos podem estar mais suscetíveis a falhas. Engenheiros devem considerar estes efeitos ao projetar peças para garantir que as tensões de cisalhamento e as tensões normais não excedam os limites seguros, prevenindo falhas por fratura.

### Figuras Explicativas:

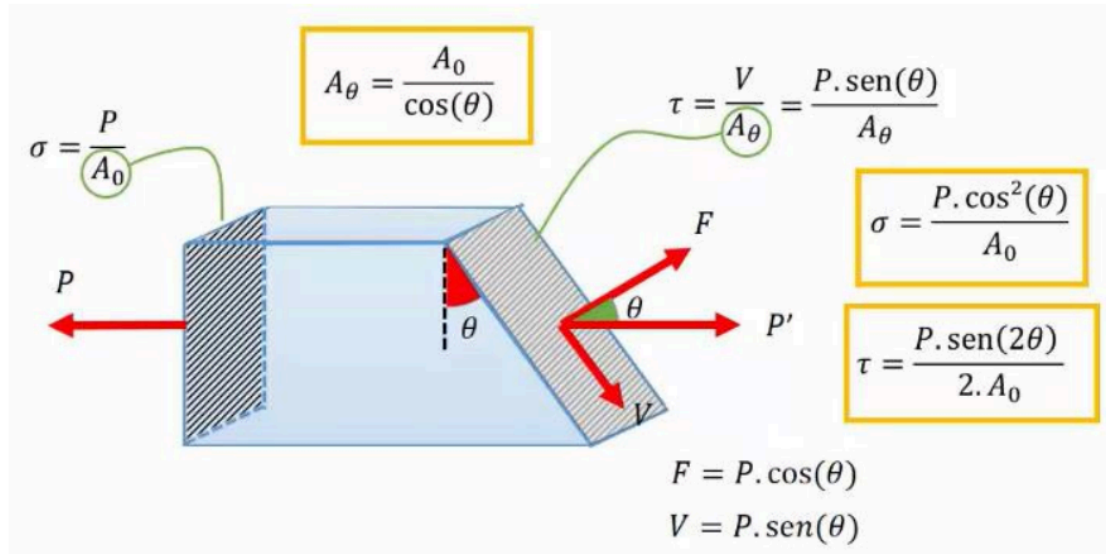


$$\sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta$$

$$\tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta$$

Fonte: Beer| Johnston.

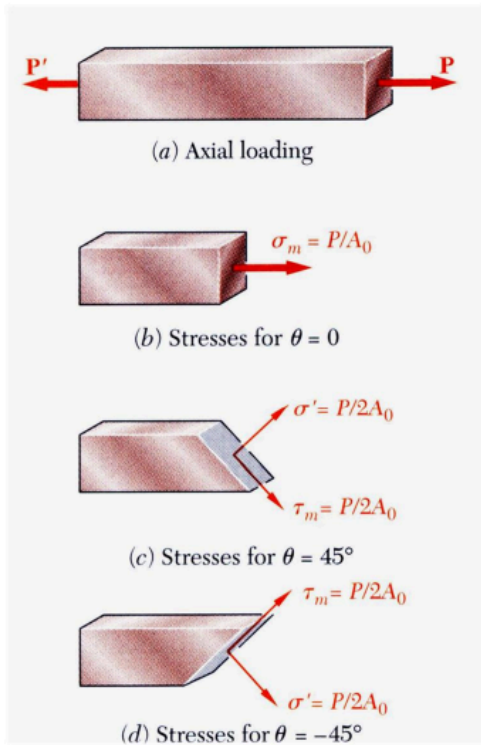
## TENSÕES NORMAL E DE CISALHAMENTO NO PLANO OBLÍQUO



Fonte:

<https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5231544/course/section/5962089/Aula%20%20-%20Estruturas%20simples.pdf>

## TENSÕES MÁXIMAS



- As tensões normal e tangencial num plano oblíquo a um eixo são expressas por:

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta \quad \tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta$$

- A tensão normal máxima ocorre para  $\theta = 0^\circ$ :

$$\sigma_m = \frac{P}{A_0} \quad \tau' = 0$$

- A tensão tangencial máxima ocorre para  $\theta = \pm 45^\circ$ :

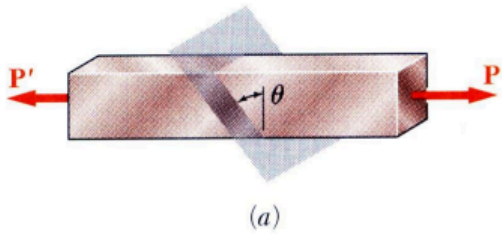
$$\tau_m = \frac{P}{A_0} \sin 45 \cos 45 = \frac{P}{2A_0} = \sigma'$$

- A tensão tangencial é nula  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$

Fonte:

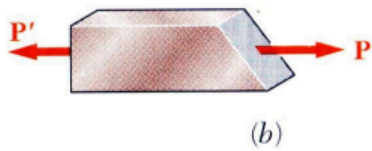
<https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5231544/course/section/5962089/Aula%20%20-%20Estruturas%20simples.pdf>

## TENSÕES NUM PLANO OBLÍQUO AO EIXO: CASOS PARTICULARES



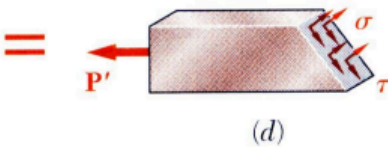
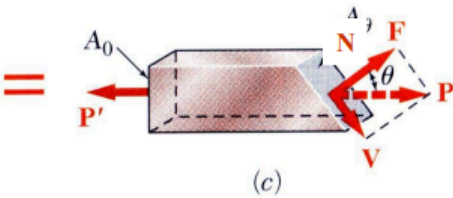
$$\theta = 0$$

$$\sigma_m = \frac{P}{A_0} \quad \tau = 0$$



$$\theta = 45^\circ$$

$$\tau \rightarrow \text{máximo}$$



$$\theta = 90^\circ$$

$$\sigma = 0 \quad \tau = 0$$

Fonte:

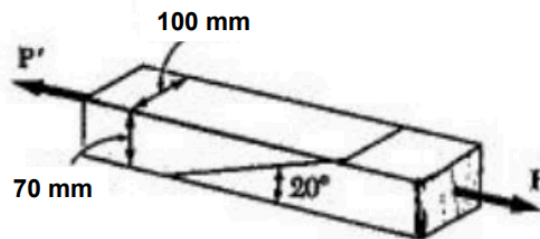
<https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5231544/course/section/5962089/Aula%20%20-%20Estruturas%20simples.pdf>



### 1.10.1 Exemplos

#### (Exemplo 1)

Duas peças de madeira de seção transversal retangular uniforme de 100 x 70 mm estão unidas, como indicado na figura abaixo. Sabendo-se que a tensão de cisalhamento é de 500 kPa, determine a  $P_{\text{máx.}}$  que pode ser aplicada.

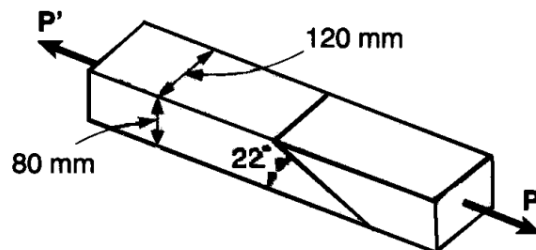


Fonte:

<https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5231544/course/section/5962089/Aula%20%20-%20Estruturas%20simples.pdf>

#### (Exemplo 2)

Duas peças de madeira de seção transversal retangular uniforme de 80 x 120 mm são unidas por meio de emenda chanfrada e simplesmente colada, como indicado na figura abaixo. Sabendo-se que  $P = 12$  kN, determine as tensões normal e de cisalhamento na emenda.



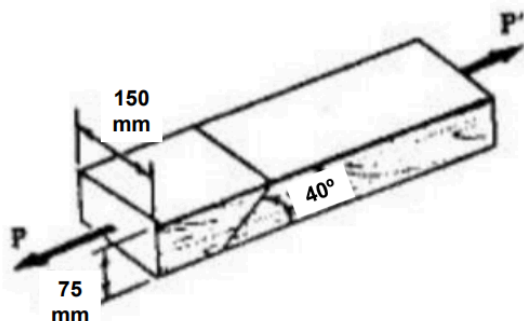
Fonte:

<https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5231544/course/section/5962089/Aula%20%20-%20Estruturas%20simples.pdf>

### (Exemplo 3)

Duas peças de madeira de seção transversal retangular uniforme estão unidas por meio de emenda chanfrada e simplesmente colada, como indicado na figura abaixo. Sabendo-se que a tensão de cisalhamento é igual a 620 kPa, determine:

- a)  $P$  máx.
- b) tensão normal.



Fonte:

<https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5231544/course/section/5962089/Aula%20-%20-%20Estruturas%20simples.pdf>

### (Exemplo 4)

Para o exemplo 2 determine a máxima tensão de cisalhamento interno que está acontecendo no interior da peça em consequência do esforço axial que a peça recebe. Determine também onde esta tensão está atuando.

### (Exemplo 5)

Para o exemplo 1 determine a máxima tensão de cisalhamento interno que está acontecendo no interior da peça em consequência do esforço axial que a peça pode receber em função da colagem feita. Determine também onde esta tensão está atuando.

### (Exemplo 6)

Considere um pilar, de seção transversal quadrada de lado 30cm que recebe carga de compressão centrada,  $P$ , esta carga desenvolve uma compressão uniforme nas seções transversais do pilar de 18MPa. Determine a carga  $P$  (em tf) e a tensão de cisalhamento máximo que este carregamento provoca no material comprimido.

### 1.11 Lista de exercícios 2 - final do capítulo 8 (livro) (16 questões )

- Págs.: 332 a 333 - 8.25 a 8.31
- Págs.: 334 a 335 - 8.39 a 8.40
- Págs.: 340 a 343 - 8.49, 8.52, 8.54, 8.56, 8.57, 8.58, 8.60



- 
- TOTAL DE QUESTÕES MARCADAS NO LIVRO ATÉ ESTE PONTO SÃO 26 QUESTÕES
- PARA O ESTUDO COMPLETO DEVE SER OBSERVADO TAMBÉM AS OS EXEMPLOS DE SALA E OS EXEMPLOS/EXERCÍCIOS DESTE MATERIAL.

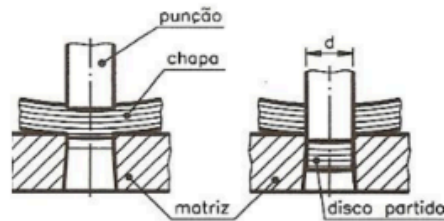
### **OBSERVAÇÕES GERAIS SOBRE A UNIDADE : IMPORTANTE.**

**Observação 1 : A questão 8.16**, pedida na lista 1, é sobre corte direto, o enunciado está “duvidoso”. O assunto da questão é o corte direto comum no processo de fabricação denominado “estampagem”.

veja sobre o assunto:

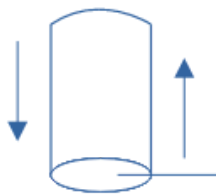
## Corte de chapas

O corte é a operação de cisalhamento de um material na qual uma ferramenta ou punção de corte é forçada contra uma matriz por intermédio da pressão exercida por uma prensa.

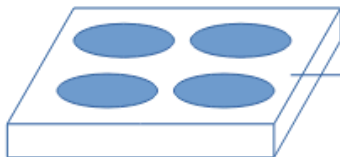


<https://professormarciogomes.wordpress.com/wp-content/uploads/2008/11/aulas-8-e-9-estampagem.pdf>

### Princípio da máquina de corte direto de formato circular



Um cilindro vazado, com contorno cortante, é pressionado contra o volume (ou superfície) a ser cortada



Peça que foi cortada



Resultado dos cortes

### Exemplo sobre a observação 1:

Considere uma chapa de espessura 6,0mm, constituída de alumínio cuja tensão de cisalhamento para corte (plastificação, escoamento, ruptura) seja 76MPa. Esta peça será “estampada” usando um molde cortante circular de diâmetro 7,0cm. Determine a força necessária para efetuar o corte. Apresente o resultado em kN e tf, usando no mínimo 3 algarismos significativos.

Resolução:

Tensão = Força/Área

Força = Tensão x Área , A área é a superfície lateral externa no cilindro cortado.

Área =  $2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = d \cdot \pi \cdot h = 7,0\text{cm} \times 3,14 \times 6,0\text{mm} = 70\text{mm} \times 3,14 \times 6,0\text{mm} = 1318,8 \text{ mm}^2$

Força =  $76\text{MPa} \times 1318,8\text{mm}^2 = 100228,8\text{N} = 100,3\text{kN} = \text{aprox } 10,2 \text{ tf}$

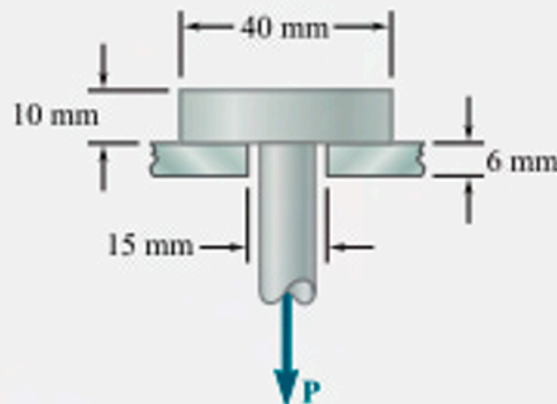
RESPOSTA :

100,3 kN ou 10,2 tf

Quanto a **questão 8.16**, para que possamos analisar o corte em ambos os materiais é necessário termos as dimensões, as formas e as resistências para peças nos dois materiais , e ainda analisarmos a situação de um deles se romper antes do outro

“Uma carga  $P$  é aplicada a uma barra de aço suportada por uma chapa de alumínio na qual foi feito um furo de 15 mm como mostra a figura. Sabendo que a tensão de cisalhamento não deve exceder 124 MPa na barra de aço e 70 MPa na chapa de alumínio, determine a máxima carga  $P$  que pode ser aplicada à barra.”

**8.16** Uma carga  $P$  é aplicada a uma barra de aço suportada por uma chapa de alumínio na qual foi feito um furo de 15 mm como mostra a figura. Sabendo que a tensão de cisalhamento não deve exceder 124 MPa na barra de aço e 70 MPa na chapa de alumínio, determine a máxima carga  $P$  que pode ser aplicada à barra.



**Figura P8.16**

Para os dados ficarem completos é necessário que saibamos a geometria do corpo que aparece da imagem com comprimento 40mm e largura 10mm, como o furo é circular, vamos considerar que corpo de aço com seção 10mm x 40mm também seja circular de diâmetro 40mm. Assim os cortes possíveis serão ambos circulares, no alumínio seria um corte de

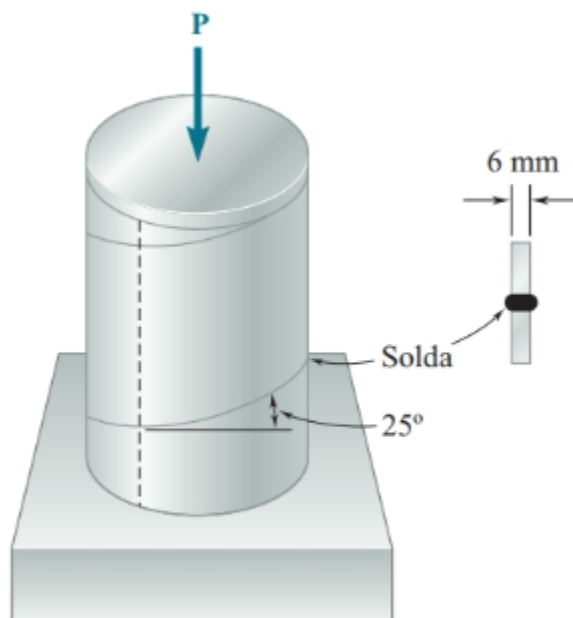
diâmetro 40mm provocados pelo aço e no aço um corte de 15mm provocado pelo furo no alumínio.

Considerando que os dois materiais possam romper por cisalhamento:

- o alumínio será “estampado em uma área  $d \cdot \pi \cdot h$ ” =  $40\text{mm} \cdot 3,14 \cdot 6\text{mm} = 7473,6\text{mm}^2$  necessitando, para isso, de uma Força =  $\text{Sigma} \times \text{Area} = 70\text{MPa} \times 7473,6\text{mm}^2 = 523152\text{N} = \text{aprox } 53,3 \text{ tf}$
- e o aço estampado em um área  $15\text{mm} \cdot 3,14 \cdot 10\text{mm} = 4710,0\text{mm}^2$  necessitando, para isso, de uma Força =  $\text{Sigma} \times \text{Área} = 124\text{MPa} \times 4710,0\text{mm}^2 = 584040\text{N} = \text{aprox } 59,6 \text{ tf}$

Desta forma, se o objetivo é estampar o alumínio, usando a pela de aço a força necessária para isso é aprox 53,3 tf. Se o objetivo for que a estrutura não se rompa, o que aconteceria por cisalhamento do alumínio, a carga máxima deve ser um valor inferior a 53,3 tf.

**Observação 2 : A questão 8.31**, pedida na lista 2, é sobre Um tubo de aço de 300 mm de diâmetro externo é fabricado a partir de uma chapa de aço com espessura de 6 mm soldada ao longo de uma hélice, que forma um ângulo de  $25^\circ$  com um plano perpendicular ao eixo do tubo. Sabendo que é aplicada ao tubo uma força  $P$  axial de 250 kN, e pede que se determine as tensões normal e de cisalhamento nas direções, respectivamente, normal e tangencial à solda.



**Figura P8.31 e P8.32**

**Resolução:**

$$r_e = 300/2 = 150\text{mm}$$

$$r_i = 150 - 6 = 144\text{mm}$$

$$\text{Força} = P = 250\text{kN} = 250000\text{N}$$

$$\text{Área Útil} = A = \pi(r_e^2 - r_i^2) = 3,14(150^2 - 144^2) = 3,14(22500 - 20736) = 3,14 \cdot 1764 = 5538,93\text{mm}^2$$

$$\text{Theta} = 25 \text{ graus}$$

$$\sin(\text{Theta}) = 0,422$$

$$\cos(\text{Theta}) = 0,906$$

$$\text{Sigma\_zero} = P/A = 250000\text{N}/(5538,93\text{mm}^2) = 45,14\text{MPa}$$

$$\text{Sigma\_Theta} = \text{Sigma\_zero} \cdot \cos(\text{Theta}) \cdot \cos(\text{Theta}) = 45,14 \cdot 0,906^2 = 37,05\text{MPa}$$

$$\text{Tau\_Theta} = \text{Sigma\_zero} \cdot \cos(\text{Theta}) \cdot \sin(\text{Theta}) = 45,14 \cdot 0,906 \cdot 0,422 = 17,25\text{MPa}$$

A tensão normal será 37,05MPa e tensão cisalhante será 17,25MPa

## PAC 2: Deformação

### DEFORMAÇÃO (CAPÍTULO 9)

#### 2.1 Conceito de Deformação

Deformação é a alteração na forma ou tamanho de um corpo devido à aplicação de forças externas. É medida como a variação relativa das dimensões do corpo.

#### 2.2 Explicações mais detalhadas:

##### 2.2.1 Relação Tensão-Deformação Elástica: Lei de Hooke

###### Item 1. Conceitos Fundamentais

A Lei de Hooke é fundamental para entender a mecânica dos materiais, descrevendo como materiais elásticos respondem à aplicação de forças. Segundo essa lei, para pequenas deformações, a tensão ( $\sigma$ : sigma) e a deformação ( $\epsilon$ : epsilon) são diretamente proporcionais:

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

Onde:

- $\sigma$ : a tensão aplicada ao material (em Pa),
- $\epsilon$ : é a deformação experimentada pelo material (adimensional,  $\Delta L/L$ ),
- $E$ : é o módulo de elasticidade ou módulo de Young do material (em Pa), que pode ser pensado como uma quantificação da rigidez de um material.

Observação: Para peças semelhantes de materiais diferentes que recebem a mesma força, aquela de material com maior “E” será menos deformável, da mesma forma que a maior deformação será da peça com menor “E”.

## Item 2. EXEMPLO de Cálculo

**Exemplo 1 - Aço:** O módulo de elasticidade do aço é tipicamente cerca de 200 GPa. Vamos calcular a deformação que ocorre em uma barra de aço quando aplicamos uma tensão de 100 MPa.

(

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{100 \times 10^6 \text{ Pa}}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} = 0.0005 \text{ (ou } 0.05\%)$$

ou 0,5 por mil ou ainda 0,5 mm/m

Isso significa que para cada metro de comprimento da barra de aço, ela se estenderá 0.5 mm sob a tensão aplicada.

**Exemplo 2 - Alumínio:** O módulo de elasticidade do alumínio é cerca de 70 GPa. Consideremos uma barra de alumínio submetida a uma tensão de 50 MPa.

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{50 \times 10^6 \text{ Pa}}{70 \times 10^9 \text{ Pa}} = 0.000714 \text{ (ou } 0.0714\%)$$

ou 0,714 por mil ou ainda 0,714 mm/m

Para cada metro de comprimento da barra, ela se estenderá aproximadamente 0.714 mm sob essa tensão.

## Item 3. Aplicação Prática

A lei de Hooke não apenas ajuda a entender como os materiais respondem a cargas, mas também é crucial para o design de estruturas e máquinas, garantindo que as deformações permaneçam dentro de limites seguros para evitar falhas inesperadas.

## Item 4. Limitações da Lei de Hooke

É importante notar que **a lei de Hooke é válida apenas dentro do limite elástico do material**. Se a tensão exceder o limite elástico, o material pode sofrer deformações permanentes ou



plásticas, e a relação linear entre tensão e deformação deixa de ser válida.

## PAC 3 - Propriedades Mecânicas

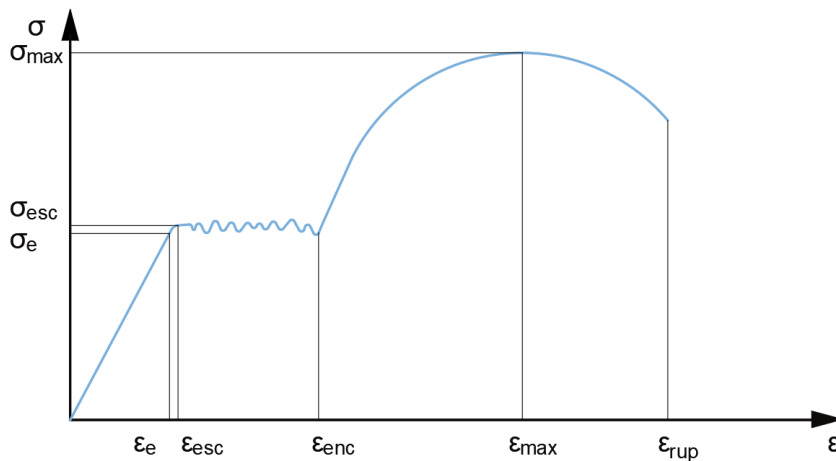
### PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS MATERIAIS (CAPÍTULO 9)

#### 3.1 Ensaio de Tração e Compressão

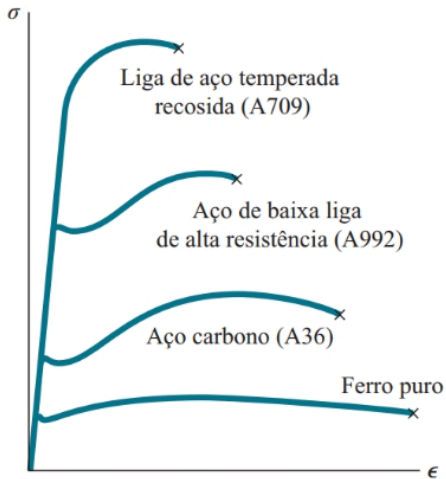
Testes que determinam como os materiais reagem sob cargas de tração e compressão, fundamentais para entender o comportamento mecânico dos materiais.

#### 3.2 Diagrama Tensão-Deformação

Gráfico que mostra a relação entre tensão aplicada e deformação resultante, útil para analisar propriedades como elasticidade e plasticidade dos materiais.



FONTE: <https://spotcursos.com.br/blogs/mecanica-das-estruturas/posts/diagramas-tensao-x-deformacao>



**Figura 9.10** Diagramas tensão-deformação para o ferro e diferentes tipos de aço.

FONTE: Beer, Ferdinand, P. et al. Estática e Mecânica dos Materiais. Disponível em: Minha Biblioteca, Grupo A, 2013.

### 3.3 Lei de Hooke (mais detalhes)

Relaciona diretamente tensão e deformação dentro do regime elástico através da constante de proporcionalidade conhecida como módulo de elasticidade.

### 3.4 Comportamento de Materiais Dúcteis e Frágeis

Dúcteis sofrem grandes deformações antes de romper, enquanto frágeis rompem com pouca deformação. Este comportamento impacta a seleção de materiais em projetos de engenharia.

### 3.5 Energia de Deformação

Energia absorvida pelo material durante a deformação, fundamental para análise de resistência e estabilidade.

### 3.6 Coeficiente de Poisson

Relação entre a contração transversal e a extensão longitudinal de um material tracionado ou comprimido. Esta relação é denominada “deformação específica lateral”. Um parâmetro importante para determinado material é o seu coeficiente de Poisson ( $\nu$ ).

$$\nu = - \frac{\text{deformação específica lateral}}{\text{deformação específica axial}} \quad (9.24)$$

ou

$$\nu = - \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = - \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \quad (9.25)$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \epsilon_y = \epsilon_z = - \frac{\nu \sigma_x}{E} \quad (9.26)$$

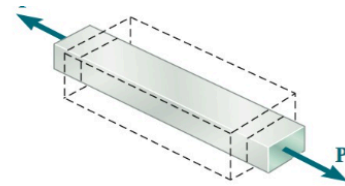


Figura 9.34

A figura 9.34 representa uma peça prismática que foi tracionada aumentando suas medidas no sentido do esforço e reduzindo em sentido perpendicular ao esforço.

O fato de 'v' depender de 'E' e 'G', simultaneamente, se deve ao fato da mudança de dimensões perpendiculares ao esforço axial ser uma consequência da interação entre as tensões normais e tangenciais.

Para Materiais que possam ser considerados isotrópicos pode-se escrever que:

FONTE: Beer, Ferdinand, P. et al. Estática e Mecânica dos Materiais. Disponível em: Minha Biblioteca, Grupo A, 2013.

### 3.7 Diagrama Tensão-Deformação e Lei de Hooke para o Cisalhamento

Análise similar à lei de Hooke, aplicada para entender a relação entre tensão de cisalhamento e deformação angular.

### 3.8 Relação entre as Constantes Elásticas do Material de um material isotrópico homogêneo.

Explora a dependência entre diferentes propriedades elásticas, como módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e módulo de cisalhamento.

$$\frac{E}{2G} = 1 + \nu$$

Exemplo: Se E = 69GPa e G=25 teríamos que v=0.38

### 3.9 lei de Hooke generalizada para carregamento multiaxial de um material isotrópico homogêneo.

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\end{aligned}$$

Não inclui os efeitos do cisalhamento

FONTE:Beer, Ferdinand, P. et al. Estática e Mecânica dos Materiais. Disponível em: Minha Biblioteca, Grupo A, 2013 p383

**Exemplo1 :** se uma placa de lados 90 cm e espessura 3mm tem  $E = 69\text{GPa}$  e  $G = 25\text{GPa}$  (onde  $\nu=0,38$ ) e recebe tensões axiais ao longo dos comprimentos( eixos x e y) em uma área (90cm x 6mm) e uma tensão de compressão na face 90cm x 90cm (na direção do eixo z) com valores  $\sigma_x = 195\text{MPa}$   $\sigma_y = 140\text{MPa}$  e  $\sigma_z = -5\text{MPa}$ .

$E := 69 \text{ GPa}$	$Lx := 90 \text{ cm}$	$\sigma_x := 195 \text{ MPa}$
$G := 25 \text{ GPa}$	$Ly := 90 \text{ cm}$	$\sigma_y := 140 \text{ MPa}$
$\nu := \frac{E}{2 \cdot G} - 1 = 0,38$	$Lz := 3 \text{ mm}$	$\sigma_z := -5 \text{ MPa}$

i)O cálculo das forças atuantes seria:

$A_{xz} := Lx \cdot Lz = 0,0027 \text{ m}^2$	
$A_{yz} := Ly \cdot Lz = 0,0027 \text{ m}^2$	
$A_{xy} := Lx \cdot Ly = 0,81 \text{ m}^2$	
$F_x := \sigma_x \cdot A_{yz} = 5,265 \cdot 10^5 \text{ N}$	$\frac{F_x}{1000 \text{ kgf}} = 53,688$
$F_y := \sigma_y \cdot A_{xz} = 5,265 \cdot 10^5 \text{ N}$	$\frac{F_y}{1000 \text{ kgf}} = 53,688$
$F_z := \sigma_z \cdot A_{xy} = -4,05 \cdot 10^6 \text{ N}$	$\frac{F_z}{1000 \text{ kgf}} = -412,99$

ii) O cálculo das deformações específicas axiais seria:

$$\frac{\sigma_X}{E} = 0,0028261 \quad \frac{\sigma_Y}{E} = 0,002029 \quad \frac{\sigma_Z}{E} = -7,2464 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_X := + \frac{\sigma_X}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_Y}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_Z}{E} = 0,0021$$

$$\varepsilon_Y := - \nu \cdot \frac{\sigma_X}{E} + \frac{\sigma_Y}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_Z}{E} = 0,001$$

$$\varepsilon_Z := - \nu \cdot \frac{\sigma_X}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_Y}{E} + \frac{\sigma_Z}{E} = -0,0019$$

iii) o cálculo das mudanças de dimensões seria:

$$L_{Xi} := L_X \quad L_{Yi} := L_Y \quad L_{Zi} := L_Z$$

$$L_f = L_i + \Delta L \quad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad \Delta L = L \cdot \varepsilon$$

$$L_f := L_i + L \cdot \varepsilon$$

$$L_{xf} := L_{xi} + L_{xi} \cdot \varepsilon_X = 0,90187 \text{ m}$$

$$L_{yf} := L_{yi} + L_{yi} \cdot \varepsilon_Y = 0,90088 \text{ m}$$

$$L_{zf} := L_{zi} + L_{zi} \cdot \varepsilon_Z = 0,0029942 \text{ m}$$

iv) o cálculo das mudanças de volume seria:

$$V_i = L_{xi} \cdot L_{yi} \cdot L_{zi} = 90\text{cm} \cdot 90\text{cm} \cdot 3\text{mm} = 900\text{mm} \cdot 900\text{mm} \cdot 3\text{mm} = 2430000\text{mm}^3$$

$$V_f = L_{xf} \cdot L_{yf} \cdot L_{zf} = 901,87\text{mm} \cdot 900,88\text{mm} \cdot 2,9942\text{mm} = 2432717,57\text{mm}^3$$

$$\Delta V = 2432717,57\text{mm}^3 - 2430000\text{mm}^3 = +2717,6\text{mm}^3 \text{ (aumento de volume)}$$

**Exercício 1 :**

AGORA SUA VEZ, ABORDE A MESMA SITUAÇÃO ACIMA FAZENDO UMAS DAS TENSÕES IGUAL A ZERO E REFAÇA OS CÁLCULOS, AO FINAL CONCLUA SE A PEÇA AUMENTOU, DIMINUIU OU MANTEVE O VOLUME. (cod23)

### Exemplo 2 :

Uma placa de aço está sendo usada como parte de uma estrutura de suporte em uma construção. A placa está submetida a um estado de tensões triaxiais, ou seja, tensões atuando em três direções ortogonais. A placa tem as seguintes dimensões:

- Comprimento ( $L_x$ ): 1.5 metros (1500 mm)
- Largura ( $L_y$ ): 0.8 metros (800 mm)
- Espessura ( $L_z$ ): 0.02 metros (20 mm)

O aço usado tem as seguintes propriedades:

- Módulo de Young ( $E$ ):  $210 \text{ GPa} = 210 \times 10^3 \text{ MPa}$
- Coeficiente de Poisson ( $\nu$ ): 0.3

As tensões atuantes sobre a placa são as seguintes:

- Tensão normal na direção  $x$  ( $\sigma_x$ ): 120 MPa (tração)
- Tensão normal na direção  $y$  ( $\sigma_y$ ): 80 MPa (tração)
- Tensão normal na direção  $z$  ( $\sigma_z$ ): -50 MPa (compressão)

### Objetivos:

i) Calcular as deformações específicas (alongamento ou encurtamento por unidade de comprimento) nas direções  $x, y$  e  $z$ .

RESOLUÇÃO:

Usaremos a **Lei de Hooke Generalizada** para um estado triaxial de tensões para determinar as deformações específicas em cada direção.

As equações para as deformações são:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Substituímos os valores fornecidos:

1. Cálculo de  $\epsilon_x$  (deformação na direção  $x$ ):

$$\epsilon_x = \frac{1}{210 \times 10^3} [120 - 0.3 \times (80 - 50)]$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{210 \times 10^3} [120 - 0.3 \times 130]$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{210 \times 10^3} [120 - 39]$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{210 \times 10^3} \times 81 = 0.0003857$$

2. Cálculo de  $\epsilon_y$  (deformação na direção  $y$ ):

$$\epsilon_y = \frac{1}{210 \times 10^3} [80 - 0.3 \times (120 - 50)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{210 \times 10^3} [80 - 0.3 \times 170]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{210 \times 10^3} [80 - 51]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{210 \times 10^3} \times 29 = 0.0001381$$



3. Cálculo de  $\epsilon_z$  (deformação na direção  $z$ ):

$$\epsilon_z = \frac{1}{210 \times 10^3} [-50 - 0.3 \times (120 + 80)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{210 \times 10^3} [-50 - 0.3 \times 200]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{210 \times 10^3} [-50 - 60]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{210 \times 10^3} \times (-110) = -0.0005238$$

### Resumo das Deformações Específicas:

- Deformação na direção  $x$  ( $\epsilon_x$ ): 0.0003857 (ou 0.03857%)
- Deformação na direção  $y$  ( $\epsilon_y$ ): 0.0001381 (ou 0.01381%)
- Deformação na direção  $z$  ( $\epsilon_z$ ): -0.0005238 (ou -0.05238%)

#### OBS:

- A placa vai **se alongar** em ambas as direções  $x$  e  $y$ , mas o alongamento na direção  $x$  será maior.
- Na direção  $z$ , a placa vai **encurtar** devido à compressão.

ii) Determinar as forças em cada face, apresente o resultado em kN.

#### RESOLUÇÃO

Sabemos que as tensões atuantes em cada direção são:

- $\sigma_x = 120 \text{ MPa}$
- $\sigma_y = 80 \text{ MPa}$
- $\sigma_z = -50 \text{ MPa}$  (compressão)

As tensões ( $\sigma$ ) são definidas como a força dividida pela área. Para determinar as forças em cada face, usamos a fórmula:

$$F = \sigma \cdot A$$

Onde:

- $F$  é a força,
- $\sigma$  é a tensão,
- $A$  é a área da face onde a força atua.

**Força na Direção  $x$  (Face  $y \times z$ ):**

A área da face perpendicular ao eixo  $x$  é a área da face  $y \times z$ :

$$A_{yz} = L_y \times L_z = 800 \text{ mm} \times 20 \text{ mm} = 16000 \text{ mm}^2 = 0.016 \text{ m}^2$$

A força na direção  $x$  é:

$$F_x = \sigma_x \times A_{yz} = 120 \times 10^6 \text{ Pa} \times 0.016 \text{ m}^2 = 1.92 \times 10^6 \text{ N} = 1920 \text{ kN}$$

**Força na Direção  $y$  (Face  $x \times z$ ):**

A área da face perpendicular ao eixo  $y$  é a área da face  $x \times z$ :

$$A_{xz} = L_x \times L_z = 1500 \text{ mm} \times 20 \text{ mm} = 30000 \text{ mm}^2 = 0.03 \text{ m}^2$$

A força na direção  $y$  é:

$$F_y = \sigma_y \times A_{xz} = 80 \times 10^6 \text{ Pa} \times 0.03 \text{ m}^2 = 2.4 \times 10^6 \text{ N} = 2400 \text{ kN}$$

**Força na Direção  $z$  (Face  $x \times y$ ):**

A área da face perpendicular ao eixo  $z$  é a área da face  $x \times y$ :

$$A_{xy} = L_x \times L_y = 1500 \text{ mm} \times 800 \text{ mm} = 1200000 \text{ mm}^2 = 1.2 \text{ m}^2$$

A força na direção  $z$  (compressão) é:

$$F_z = \sigma_z \times A_{xy} = -50 \times 10^6 \text{ Pa} \times 1.2 \text{ m}^2 = -60 \times 10^6 \text{ N} = -60000 \text{ kN}$$

Resumo:

- Força na direção  $x$  ( $F_x$ ): 1920 kN
- Força na direção  $y$  ( $F_y$ ): 2400 kN
- Força na direção  $z$  ( $F_z$ ): -60000 kN (compressão)

iii) Determinar a variação do volume da peça.

## RESOLUÇÃO

O volume da peça é dado pela fórmula:

$$V = L_x \times L_y \times L_z$$

**Volume Inicial (Antes da Deformação):**

Substituímos as dimensões iniciais da peça:

$$V_{inicial} = 1500 \text{ mm} \times 800 \text{ mm} \times 20 \text{ mm} = 24000000 \text{ mm}^3 = 0.024 \text{ m}^3$$

**Volume Final (Após a Deformação):**

Após a deformação, as novas dimensões da peça são dadas por:

$$L'_x = L_x + \Delta L_x$$

$$L'_y = L_y + \Delta L_y$$

$$L'_z = L_z + \Delta L_z$$

Usamos as deformações calculadas anteriormente para determinar as variações de comprimento:

- $\Delta L_x = 0.0003857 \times 1500 = 0.5786 \text{ mm}$
- $\Delta L_y = 0.0001381 \times 800 = 0.1105 \text{ mm}$
- $\Delta L_z = -0.0005238 \times 20 = -0.01048 \text{ mm}$

Agora, calculamos as novas dimensões:

- $L'_x = 1500 + 0.5786 = 1500.5786 \text{ mm}$
- $L'_y = 800 + 0.1105 = 800.1105 \text{ mm}$
- $L'_z = 20 - 0.01048 = 19.98952 \text{ mm}$

Agora, o volume final é:

$$V_{final} = 1500.5786 \times 800.1105 \times 19.98952 = 24002615.14 \text{ mm}^3 = 0.0240026 \text{ m}^3$$

**Variação do Volume:**

A variação de volume é a diferença entre o volume final e o volume inicial:

$$\Delta V = V_{final} - V_{inicial} = 0.0240026 - 0.024 = 0.0000026 \text{ m}^3 = 2.6 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Portanto, a peça sofreu um aumento de volume após a aplicação das tensões triaxiais.

### **Exercício 2 :**

AGORA SUA VEZ, ABORDE A MESMA SITUAÇÃO ACIMA FAZENDO A TENSÃO NO EIXO “Z” IGUAL A ZERO E REFAÇA OS CÁLCULOS, AO FINAL CONCLUA SE A PEÇA AUMENTOU, DIMINUIU OU MANTEVE O VOLUME.(cod24)

OBSERVAÇÃO: Faça as questões (cod19) e (cod20)

## **PAC 4 - Barras Submetidas à Carga Axial**

### **4.1 Princípio de Saint-Venant**

Princípio que estipula que a distribuição de tensão localizada se dissipa com a distância da aplicação da carga.

#### 4.2 Deslocamento Relativo de Barras Submetidas a Carga Axial

Calcula o deslocamento longitudinal em uma barra devido a uma carga axial.

#### 4.3 Rigidez e Flexibilidade

Rigidez é a resistência de um componente à deformação, enquanto flexibilidade é a facilidade com que se deforma.

#### 4.4 Princípio da Superposição dos Efeitos

Permite a soma dos efeitos de diferentes cargas aplicadas independentemente para análise da resposta total do sistema.

#### 4.5 Sistemas Estaticamente Indeterminados

Sistemas onde não é possível encontrar as reações usando apenas equilíbrios, requerendo métodos adicionais como o das forças ou deformações.

#### 4.6 Método das Forças

Método para resolver estruturas indeterminadas, considerando o equilíbrio de forças internas para determinar as reações e momentos.

#### 4.7 Efeitos Térmicos

Estuda o impacto das variações de temperatura na distribuição de tensões e deformações.

#### 4.8 Concentração de Tensões (Saint Venant)

Fenômeno onde as tensões se elevam em pontos onde há mudanças abruptas na geometria ou nas condições de carga.

### PAC 5 - EXERCÍCIOS GERAIS DA ETAPA 1

5.0 EXERCÍCIOS GERAIS DA ETAPA 1 - CAPÍTULOS 8 e 9 - Tópicos Principais
<div>1. Questões teóricas:</div> <div>Conceitos que devem ser perfeitamente entendidos (cod1)</div>



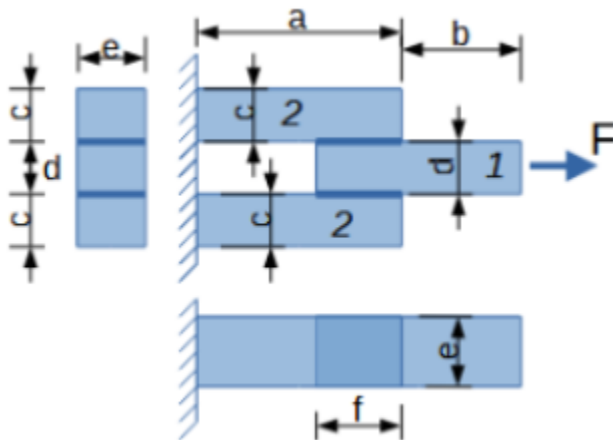
Tensões admissíveis			
	Compressão	Tração	Cisalhamento
Madeira	12,0	14,0	8,6
Metal	145,0	145,0	90,0
Cola	8,4	8,4	6,2

De acordo com as informações anteriores,

- Determine a tensão de esmagamento que o pino provoca na peça 1, compare com a tensão adequada na tabela de tensões admissíveis e julgue se a peça 1 suportará este esforço.
- Determine a tensão de tração que atua na cola e , compare com a tensão adequada na tabela de tensões admissíveis e julgue se a cola suportará este esforço.
- Determine a tensão de tração na região de menor área da peça 1, compare com a tensão adequada na tabela de tensões admissíveis e julgue se a peça 1 suportará este esforço.

## Questão 2 (cod3)

Figura



Considere os seguintes valores:

$a = 40$  ;  $b = 30$  ;  $b_1 = b_2 = b$  ;  $b_3 = 18$  ;  $c = d = 8$  ;  $e = 15$  ;  $f = f_1 = 12$  ;  $f_2 = 10$  ;  $g = 1,4$  ;  $m = 7$

O valor de  $F$  é  $3,5 \cdot 10^4$  e use  $1 \text{ kg} = 9,81 \text{ N}$ . As unidades métricas estão em centímetros.

Os valores de resistências admissíveis (em MPa) são



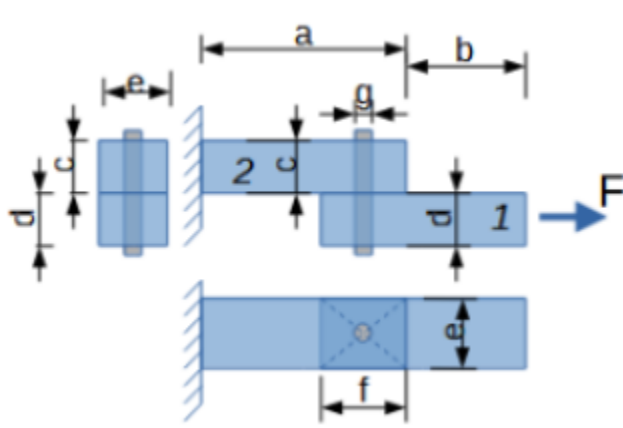
Tensões admissíveis			
	Compressão	Tração	Cisalhamento
Madeira	12,0	14,0	8,6
Metal	145,0	145,0	90,0
Cola	8,4	8,4	6,2

De acordo com as informações anteriores,

- Determine a tensão de cisalhamento na cola e na peça 1 próxima a cola, compare-as com as tensões adequadas na tabela de tensões admissíveis e julgue se a peça 1 e a cola suportarão este esforço.
- A tensão cisalhamento máxima que atua na peça 1 e compare com a tensão adequada na tabela de tensões admissíveis e julgue se a peça 1 suportará este esforço.

### Questão 3 (cod4)

Figura



Considere os seguintes valores:

$a = 40$  ;  $b = 30$  ;  $b_1=b_2 = b$  ;  $b_3 = 18$  ;  $c = d = 8$  ;  $e = 15$  ;  $f = f_1 = 12$  ;  $f_2 = 10$  ;  $g = 1,4$  ;  $m=7$

O valor de  $F$  é  $3,5 \text{ tf}$  e use  $1\text{kg} = 9,81\text{N}$ . As unidades métricas estão em centímetros.

Os valores de resistências admissíveis (em MPa) são

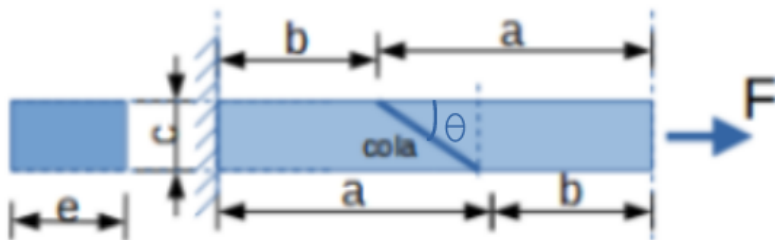
Tensões admissíveis			
	Compressão	Tração	Cisalhamento
Madeira	12,0	14,0	8,6
Metal	145,0	145,0	90,0
Cola	8,4	8,4	6,2

De acordo com as informações anteriores,

Determine a tensão de rasgamento máximo que pino provoca em cada peça, compare-as com as tensões adequadas na tabela de tensões admissíveis e julgue se as peças suportarão este esforço.

#### Questão 4 (cod5)

Figura



Considere os seguintes valores:  $c = 8$  ;  $e = 15$  e  $\theta = 35$  graus

O valor de  $F$  é  $3,5 \text{ tf}$  e use  $1 \text{ kg} = 9,81 \text{ N}$ . As unidades métricas estão em centímetros.

Os valores de resistências admissíveis (em MPa) são

Tensões admissíveis			
	Compressão	Tração	Cisalhamento
Madeira	12,0	14,0	8,6
Metal	145,0	145,0	90,0
Cola	8,4	8,4	6,2

De acordo com as informações anteriores, determine a tensão de cisalhamento que acontece na cola , o ângulo entre a cola e a face da peça é  $\theta$ , depois compare-a com a tensão adequada na tabela de tensões admissíveis e julgue se a cola e a peça suportará este esforço.

**Questão 5 (cod6)**

“Poli(metacrilato de metila) ou (PMMA), ou Acrílico”. Este material tem módulo de elasticidade 3,28GPa, peso específico de 1190 kgf/m<sup>3</sup>, alongamento de ruptura 2,88 %.

Considere a ideia de fazer um pilar em “acrílico” de altura 2,40m e seção transversal circular de lado 12cm.

Determine a tensão média e a deformação específica para uma força de compressão no pilar de 11tf.

Observe as unidades corretas ao apresentar os resultados.

$$\sigma = \frac{F}{A} ; \sigma = E \cdot \varepsilon ; \varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

RESPOSTA:

Tensão: \_\_\_\_\_MPa

Deformação específica: \_\_\_\_\_mm/m

Compare os valores encontrados com os estipulados para o material e julgue se ele suportará este esforço e esta deformação específica:

---

---

---

---

---

**Questão 6 (cod7)**

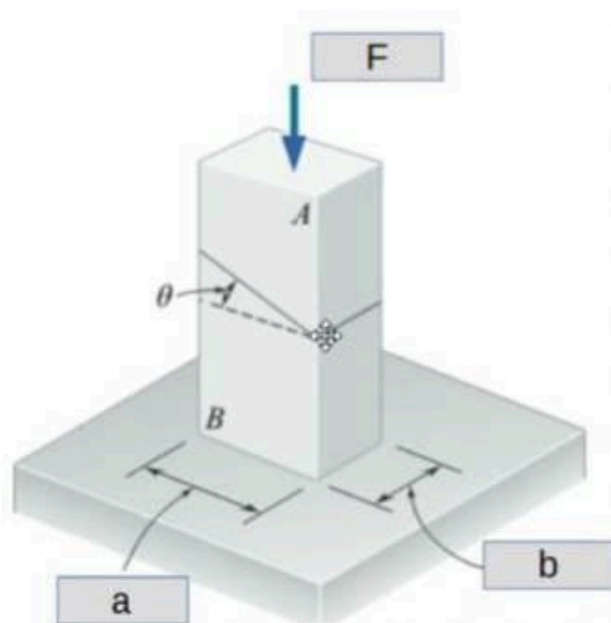
Figura

A figura representa esquematicamente um monólito em concreto, sem armaduras, com seção transversal retangular de medidas a=50cm e b=30cm e ainda com uma junta inclinada, definindo um o plano obliquo onde theta=55°

Sabendo que uma força vertical de compressão F=169tf ,atua sobre o monólito, determine a tensão normal que atua na junta.

Neste tipo de questão devem ser colocadas as justificativas, as indicações dos cálculos e/ou os cálculos propriamente ditos.

A pontuação deste tipo de questão advém 30% da marcação do item correto e 70% das indicações das justificativas, respostas e/ou cálculos corretos



$$\tau_t = \sigma_0 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$$

$$\sigma_n = \sigma_0 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\theta)$$

- A) inferior a 5MPa
- B) igual, ou superior, a 5MPa e inferior a 10MPa
- C) igual, ou superior, a 10MPa e inferior a 15MPa
- D) igual, ou superior, a 15MPa e inferior a 25MPa
- E) superior a 25MPa

#### RESPOSTA

Item: A)

#### Questão 7 (cod8)

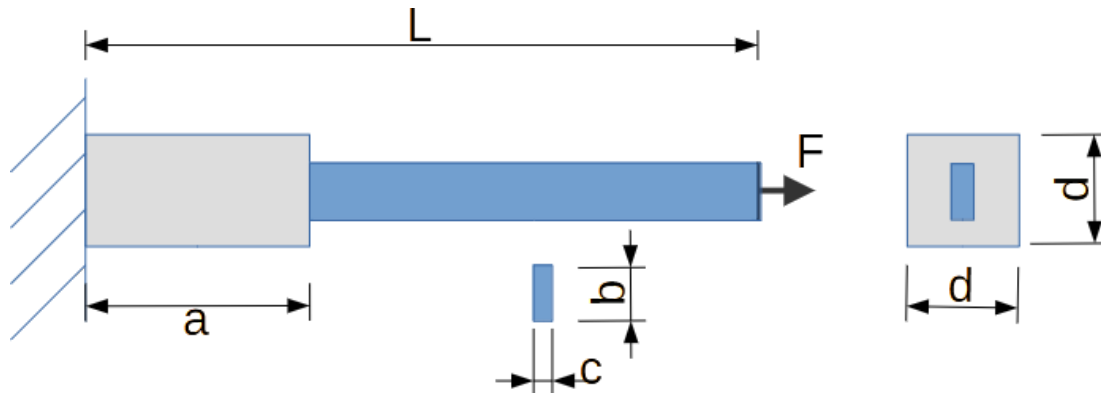
Uma peça de comprimento L é composta pelos materiais A e B.

As medidas são L=90,0cm, a=20,0cm, b=3,0cm, c=1,2cm, d=14,0cm. O material “A” tem comprimento “a” e o material B tem comprimento “L-a”

As características dos materiais: O Módulo de Young do material A é 70GPa. O Módulo de Young do material B é 210GPa.

A peça está sendo tracionada por uma força F=60tf

$$\sigma = \frac{F}{A} ; \sigma = E \cdot \varepsilon ; \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} ; \tau = G \cdot \gamma ; \frac{E}{2G} = 1 + \nu \quad \nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$



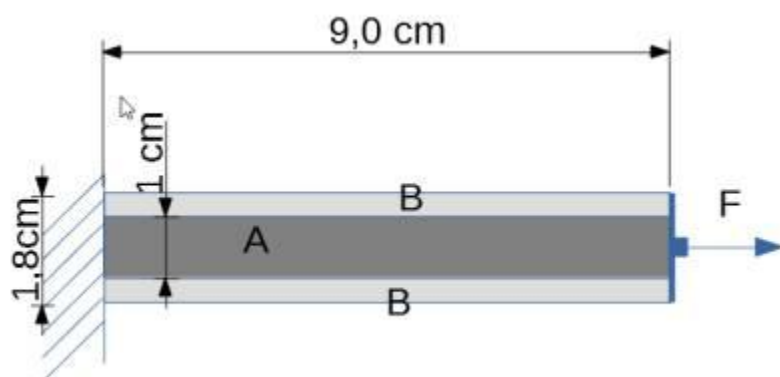
- i) Determine a deformação em milímetros do ponto onde atua a força F.
- ii) Determine a tensão em cada material.

Apresente os resultados usando 3 algarismos significativos.

### Questão 8 (cod9)

Figura

$$\sigma = \frac{F}{A} ; \sigma = E \cdot \varepsilon ; \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} ; \tau = G \cdot \gamma ; \frac{E}{2G} = 1 + \nu$$



Considere uma peça e seu núcleo, ambos maciços cilíndricos. O núcleo é feito de um material A que possui módulo de Young 68GPa, o material B tem módulo de elasticidade longitudinal 120GPa.

i)Qual seria o valor da força F e as tensões nos materiais, para provocar na peça completa uma deformação de 1,2 por 1000?

ii)Se peça da figura for tracionada por uma força de 15tf, qual seria a força, a tensão, a deformação específica e a deformação total de cada material?

RESPOSTAS:

**RESPOSTA**

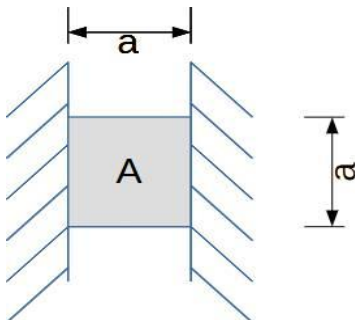
PADRÃO RESPOSTA.

ESPERA-SE QUE O ALUNO APLICAÇÃO CORRETA DAS EQUAÇÕES

$$\sigma = \frac{F}{A}; \sigma = E \cdot \epsilon \quad \epsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

### Questão 9 (cod10) (v1 v2)

Figura



Fórmulas:

$$\sigma := \frac{F}{A} \quad \sigma := E \cdot \epsilon \quad \epsilon := \frac{\Delta L}{L} \quad \Delta L := L_f - L_i$$

$$\Delta L := \alpha \cdot L_o \cdot \Delta T \quad \epsilon := \alpha \cdot \Delta T \quad \sigma := E \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad \Delta T := T_f - T_i$$

**caso 1 )** Considere um cubo de lado 12 cm de um dado material A, está ~~aderido~~ suportado entre duas superfícies rígidas, de forma a não se mover nem se deformar (de forma que, se o bloco reduzir de tamanho, ele escorrega pela parede por ação de seu peso próprio).

Módulo de Young do material do cubo igual a 69 GPa, coeficiente de dilatação linear  $22 \times 10^{-6} 1/^{\circ}\text{C}$  e o cubo está inicialmente em uma temperatura de 0 graus celsius.

(i)Determine a tensão que atuará no cubo quando a temperatura subir para 45 graus celsius. Ao apresentar o valor numérico use a unidade MPa e 3 algarismos significativos. Informe se a

tensão normal será de tração, compressão ou nula.(ii)Na nova condição de temperatura informe a força que atua nas faces presas do cubo.

### Resolução caso 1 )

$$L := 12 \text{ cm} \quad T_i := 0 \cdot ^\circ\text{C} \quad T_f := 45 \cdot ^\circ\text{C} \quad \alpha := 22 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{^\circ\text{C}} \quad E := 69 \text{ GPa}$$

$$\Delta T := T_f - T_i = 45 \quad A := L \cdot L = 0,0144 \text{ m}^2$$

$$\sigma := E \cdot \alpha \cdot \Delta T = 6,831 \cdot 10^7 \text{ Pa} \quad \frac{\sigma}{\text{MPa}} = 68,31 \quad \text{COFINAMENTO COM AUMENTO DE TEMPERATURA : COMPRESSÃO.}$$

$$F := \sigma \cdot A = 9,8366 \cdot 10^5 \text{ N} \quad \frac{F}{1000 \text{ kgf}} = 100,31$$

**caso 2)** Considere um cubo de lado 12 cm de um dado material A, está suportado entre duas superfícies rígidas, de forma a não se mover nem se deformar

Módulo de Young do material do cubo igual a 69 GPa, coeficiente de dilatação linear  $22 \times 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$  e o cubo está inicialmente em uma temperatura de 22 graus celsius.

(a)Determine a tensão que atuará no cubo quando a temperatura subir para 45 graus celsius. Ao apresentar o valor numérico use a unidade MPa e 3 algarismos significativos. Informe se a tensão normal será de tração, compressão ou nula.(b)Na nova condição de temperatura informe a força que atua nas faces presas do cubo.

### Resolução caso 2 )

$$L := 12 \text{ cm} \quad T_i := 22 \cdot ^\circ\text{C} \quad T_f := 45 \cdot ^\circ\text{C} \quad \alpha := 22 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{^\circ\text{C}} \quad E := 69 \text{ GPa}$$

$$\Delta T := T_f - T_i = 23 \quad A := L \cdot L = 0,0144 \text{ m}^2$$

$$\sigma := E \cdot \alpha \cdot \Delta T = 3,4914 \cdot 10^7 \text{ Pa} \quad \frac{\sigma}{\text{MPa}} = 34,914 \quad \text{COFINAMENTO COM AUMENTO DE TEMPERATURA : COMPRESSÃO.}$$

$$F := \sigma \cdot A = 5,0276 \cdot 10^5 \text{ N} \quad \frac{F}{1000 \text{ kgf}} = 51,267$$

**caso 3)** Considere que um cubo, de lado 12 cm, feito de um dado material A, está suportado entre duas superfícies rígidas, recebendo uma força de compressão de 20tf.

Módulo de Young do material do cubo igual a 69 GPa, coeficiente de dilatação linear  $22 \times 10^{-6} \text{ } 1/^{\circ}\text{C}$  e o cubo está inicialmente em uma temperatura de 22 graus celsius.

(i)Determine a tensão que atuará no cubo quando a temperatura subir para 45 graus celsius. Ao apresentar o valor numérico use a unidade MPa e 3 algarismos significativos. (ii)Informe se a tensão normal será de tração, compressão ou nula.

Resolução caso 3

A diferença com o caso 2 é que a força inicial sobre o bloco não é zero, estando ele inicialmente comprimido. Assim, aplicando uma superposição de efeitos superpondo os casos 2 e 3 a peça do caso 3 restará, na temperatura de 45 graus comprimida por  $34,914 \text{ MPa} + 20 \text{ MPa} = 54,914 \text{ MPa}$

**caso 4)** Considere que um cubo, de lado 12 cm, feito de um dado material A, está **aderido** entre duas superfícies rígidas, recebendo uma força de compressão de 15tf.

Módulo de Young do material do cubo igual a 69 GPa, coeficiente de dilatação linear  $22 \times 10^{-6} \text{ } 1/^{\circ}\text{C}$  e o cubo está inicialmente em uma temperatura de 22 graus celsius.

(i)Determine a tensão que atuará no cubo e na região de aderência quando a temperatura cair para  $-3$  graus celsius. Ao apresentar o valor numérico use a unidade MPa e 3 algarismos significativos. (ii)Informe se a tensão normal no cubo será de tração, compressão ou nula.

Resolução caso 4, item (i).

$$L := 12 \text{ cm} \quad Ti := 22 \cdot ^{\circ}\text{C} \quad Tf := (-3) \cdot ^{\circ}\text{C} \quad \alpha := 22 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{^{\circ}\text{C}} \quad E := 69 \text{ GPa}$$

$$\Delta T := Tf - Ti = -25 \quad A := L \cdot L = 0,0144 \text{ m}^2$$

$$\sigma := E \cdot \alpha \cdot \Delta T = -3,795 \cdot 10^7 \text{ Pa} \quad \frac{\sigma}{\text{MPa}} = -37,95$$

$$F := \sigma \cdot A = -5,4648 \cdot 10^5 \text{ N} \quad \frac{F}{1000 \text{ kgf}} = -55,725$$

Se tensão sobre o cubo inicialmente fosse zero, mas como existe uma força inicial de compressão não será nula, será necessário conhecer a tensão inicial sobre o cubo:



$$F_i := 15 \cdot t_f$$

$$\sigma_i := \frac{F_i}{A} = 1,0215 \cdot 10^7 \text{ Pa} \quad \frac{\sigma_i}{\text{MPa}} = 10,215$$

Desta forma o valor -37,95 deve ser considerado como uma variação de tensão, logo a tensão final será:

$\sigma_{\text{final}} = -37,95 \text{ MPa} + 10,215 \text{ MPa} = -27,735 \text{ MPa}$  (PEÇA SENDO RESFRIADA QUANDO PRESA ÀS SUPERFÍCIES: RECEBENDO TRAÇÃO)

Como o cubo está aderido às paredes, a tensão interna no cubo e a tensão interna na ligação será -27,735MPa. (PEÇA SENDO RESFRIADA QUANDO PRESA ÀS SUPERFÍCIES: RECEBENDO TRAÇÃO)

Resolução caso 4, item (ii).

A tensão no cubo será nula quando o resfriamento diminuir e equilibrar as tensões de compressão com as tensões de tração. Isso acontecerá, quando ele estiver comprimido por F (15tf) e for esfriado de 22 graus celsius para aproximadamente 8,5 graus celsius.

**OBSERVAÇÃO:** Veja a diferença ao se escrever “quando a temperatura cair para -3 graus celsius”, para quando se escreve “quando a temperatura cair de -3 graus celsius”

#### RESPOSTA

Aplicações corretas das equações:  $\Delta L = L_0 \alpha \Delta T$ ,  $\sigma = \frac{F}{A}$ ;  $\sigma = E \cdot \epsilon$  e  $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$

#### Questão 10 (cod11)

Uma tubulação em aço, que quando desligada fica na temperatura de 24 °C, tem seu percurso em forma de U, retido entre duas paredes paralelas e o solo. O único trecho sem contato com as paredes tem comprimento L= 3,31m e diâmetro externo d=5,0cm. As extremidades do tubo não podem se deslocar da parede.

- Módulo de Young igual a 210 GPa

- Coeficiente de dilatação linear  $11 \times 10^{-6} 1/^{\circ}\text{C}$

i)Determine a tensão de compressão que atuará no tubo considerando o duto em atividade, transferindo um fluido aquecido com  $87^{\circ}\text{C}$ . Ao apresentar o valor numérico, use a unidade MPa e 3 algarismos significativos.

ii)Determine a tensão de compressão que atuará no tubo considerando o duto em atividade, transferindo um fluido aquecido com  $-57^{\circ}\text{C}$ . Ao apresentar o valor numérico, use a unidade MPa e 3 algarismos significativos.

### Questão 11 (cod12)

Em determinado projeto, um pilar de concreto é armado com  $4\phi 20,0\text{mm}$ , tem diâmetro 20cm, altura 4,0m e deve receber um esforço de compressão de 90 toneladas força.

Dados do concreto:

Módulo de Elasticidade: 27GPa

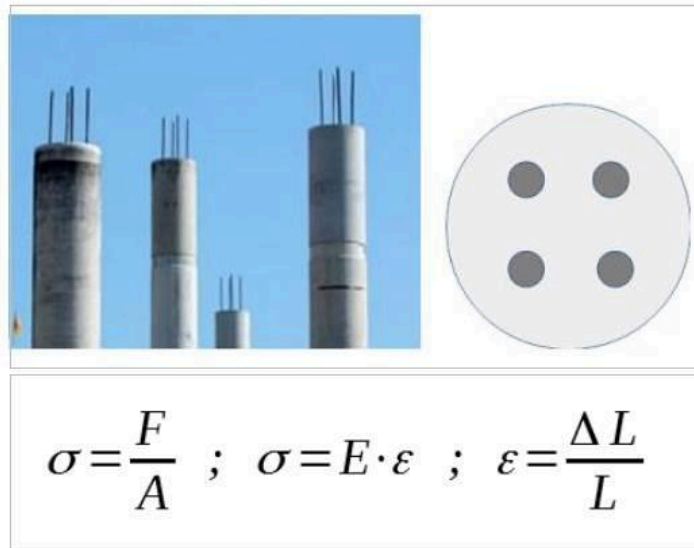
Tensão máxima admissível para o concreto : 21 MPa

Dados do aço:

Módulo de Elasticidade: 210GPa

Tensão máxima admissível para o aço : 435 MPa

Figura



i)Determinar a deformação específica (em mm/m) que o pilar deve sofrer por ação da força.

ii)Considerando que a deformação específica máxima do concreto seja  $2,4/1000$ , julgue se este pilar está seguro quando deformação.

iii)Determinar a tensão que atua em cada material.

Resposta:

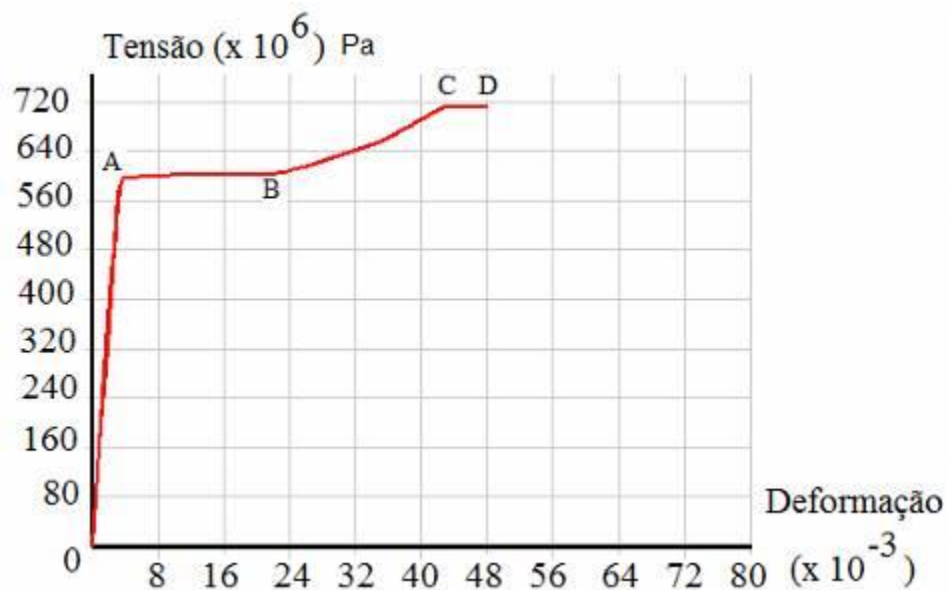
Deformação específica: \_\_\_\_\_ mm/m (ou 1/1000)

O pilar está seguro quanto a deformação por força axial pura?

(☐) Sim (☐) Não

### Questão 12 (cod13)

Figura



O diagrama acima representa uma relação entre a tensão e a deformação específica de um material, a tensão está no eixo vertical e a deformação no eixo horizontal.

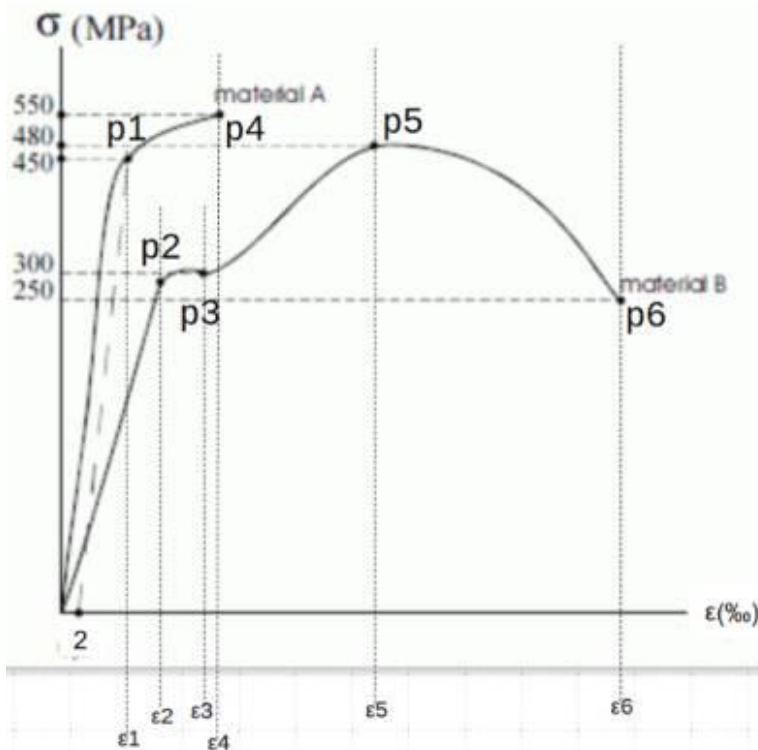
O módulo de elasticidade é definido como a razão entre dois intervalos. Um intervalo está entre as tensões e o outro o intervalo está entre as deformações correspondentes a estas tensões.

i) Determine o módulo de elasticidade longitudinal secante deste material entre a tensão inicial (0) e a tensão de 640MPa.

ii) Determine o valor aproximado para o módulo de elasticidade (inicial) deste material.

### Questão 13 (cod14)

Figura



P1	450 MPa	$\epsilon_1 = 5\text{‰}$
P2	280 MPa	$\epsilon_2 = 7\text{‰}$
P3	300 MPa	$\epsilon_3 = 12\text{‰}$
P4	550 MPa	$\epsilon_4 = 13\text{‰}$
P5	480 MPa	$\epsilon_5 = 23\text{‰}$
P6	250 MPa	$\epsilon_6 = 35\text{‰}$

A figura representa os diagramas tensão x deformação para dois materiais. O material é A detêm os pontos P1 e P4 e o material B detêm os demais pontos.

- Determine, na origem, o módulo de Young do material A.
- Determine, o módulo secante do material B entre a a origem e o ponto P3
- Determine, o módulo cordal do material A entre P1 e P4

As respostas devem ser apresentadas em GPa com 3 algarismos significativos.

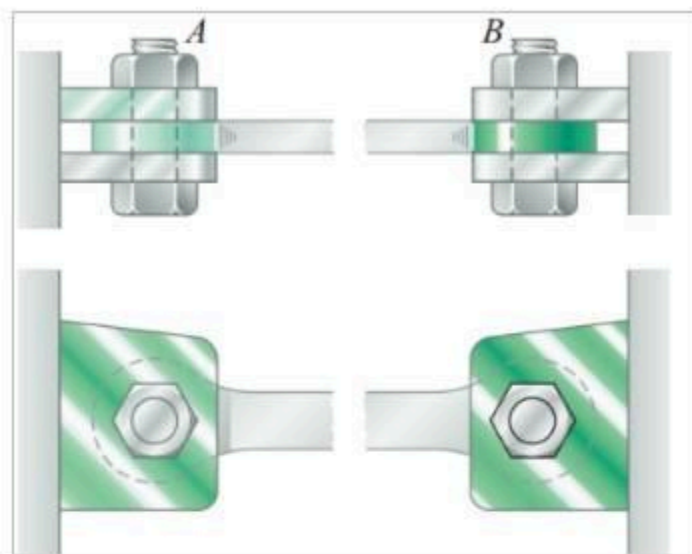
#### RESPOSTA

PADRÃO RESPOSTA.

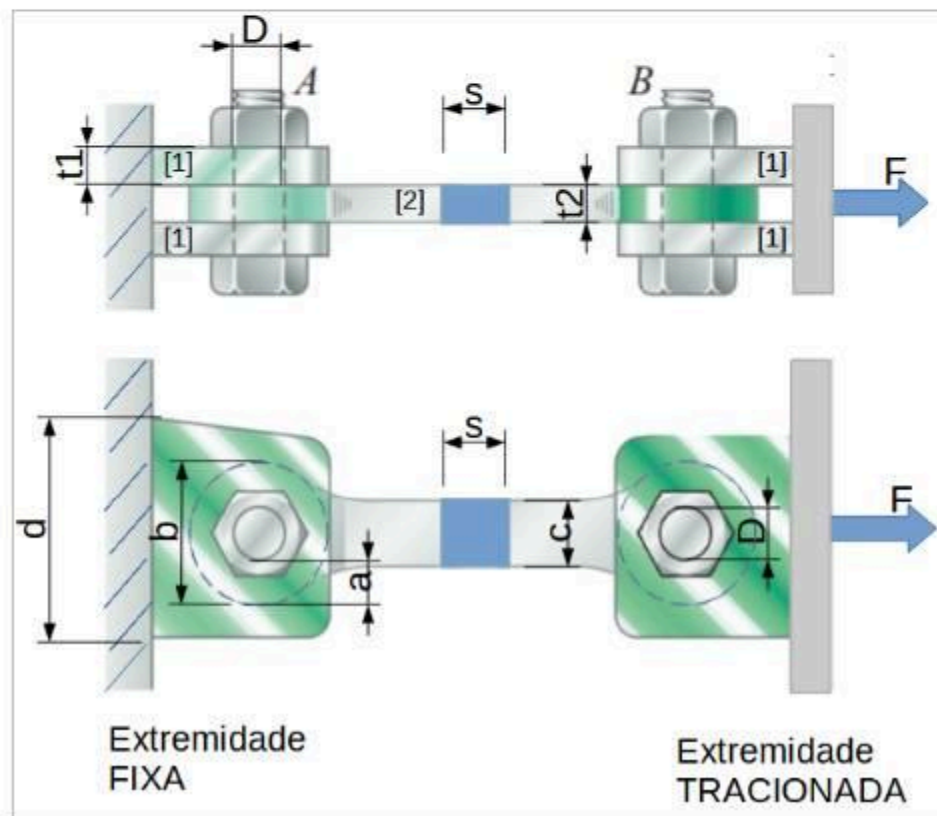
ESPERA-SE DO ALUNO A APLICAÇÃO DO CONCEITO DE TANGENTE PARA OBTER A INCLINAÇÃO DA RETA QUE LIGA A ORIGEM DO SISTEMA CARTESIANO AO PONTO P2.

**Questão 14 (cod15)**

Figura



I



A figura representa uma barra de ligação (entre os pontos A e B) feita me metal.

Ela (a barra) deve suportar uma força de tração de intensidade  $F = 120 \text{ kN}$  (força máxima de trabalho) quando é tracionada por suportes duplos em A e B.

Este metal tem módulo de elasticidade transversal  $30 \text{ GPa}$  e módulo de elasticidade longitudinal  $78 \text{ GPa}$ .

A barra será feita a partir de uma chapa de  $20 \text{ mm}$  de espessura ( $t_2=20\text{mm}$ ).

Para o metal utilizado, as tensões máximas admissíveis são: Tensão de tração e compressão de  $95 \text{ MPa}$ , Tensão de cisalhamento de  $50 \text{ MPa}$  e Tensão de esmagamento de  $150 \text{ MPa}$ .

A variável “s” representa a distância entre dois pontos que pertencem a barra e que possuem entre eles uma seção transversal retangular de área calculada por “ $c \times t_2$ ”

Para projetar a barra, é necessário determinar os valores:

- (a) do diâmetro “D” do parafuso com base no cisalhamento do parafuso.
- (b) do diâmetro “D” do parafuso com base esmagamento da chapa [2] pelo parafuso.
- (c) da dimensão “c” da barra (largura da barra [1]) com base na tração pura sofrida pela barra [2].
- (d) da dimensão “b” em cada extremidade da barra (um alargamento da barra [1]) com base na relação  $b=2a+D$  e o cálculo de “a” através de tração direta.

Então:

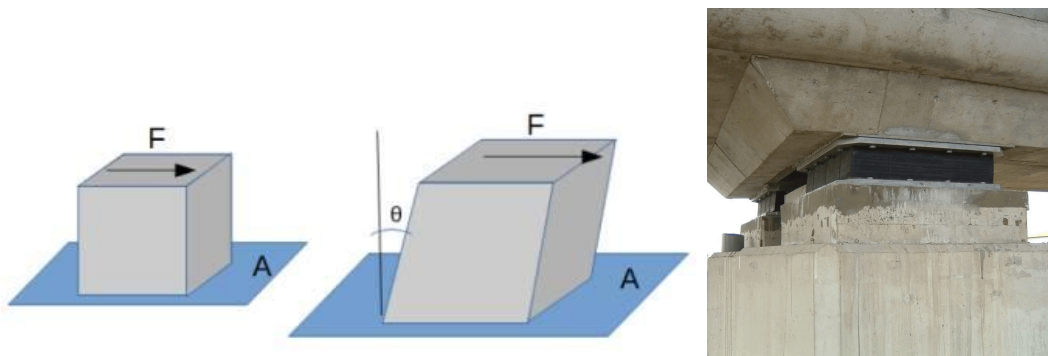
i)Determine o solicitado no item (c) e apresente a resposta em milímetros com, no 3 algarismos significativos.

ii)Determine o aumento sofrido pelo segmento “s1” quando a força F for 50% da força máxima de trabalho, considere que quando  $F=0$  tem-se  $s_1 = 4,50\text{cm}$

Apresente as respostas em mm com 3 algarismos significativos.

### Questão 15 (cod16)

Figura



<https://sigborrachas.com.br/apoio-de-neoprene-fretado/>

A figura representa esquematicamente uma peça cúbica, de aresta 12,0 cm, feita em resina, presa na superfície A que recebe, na face livre (paralela a base A), uma força F. A força F provoca uma deformação angular de  $\theta = 0,5$  graus.

Materiais/	E	v	G	tensão axial máxima	Tensão cisalhamento máxima
Aço	200 GPa	0,23	-	160,0 MPa	90,0 MPa
Resina	12 GPa	0,36	-	10,0 MPa	6,0 MPa
Alumínio	70 GPa	0,30		95,0 MPa	55,0 MPa

Determine o valor da força F e se o material que constitui a peça suportará a tensão que gera esta deformação.

**RESPOSTA(S):**

#### RESPOSTA

PADRÃO RESPOSTA.

ESPERA-SE QUE O ALUNO APLICAÇÃO CORRETA DAS EQUAÇÕES

$$\sigma = \frac{F}{A}; \sigma = E \cdot \epsilon \text{ e } \epsilon = \frac{\Delta L}{L} \text{ ONDE } \Delta L_1 = \Delta L_2.$$

#### Questão 16 (cod17)

Um cubo de aresta 6,0cm feito em metal maciço que tem  $E=10\text{GPa}$   $G=4\text{GPa}$  recebe, através de duas de suas faces opostas uma tensão compressiva de 108 MPa, considerando um caso ideal

i)Qual seriam as novas dimensões do cubo em um regime elástico linear?

**RESPOSTA(S):**

ii)Qual seria o valor (em toneladas força) do esforço que comprime o cubo?

**RESPOSTA(S):**

O

**Questão 17(cod18) (lei de hooke generalizada)**

Figura



<https://rwengenharia.eng.br/quais-sao-os-tipos-de-vasos-de-pressao/>

Placa maciças, de 0,8m x 0,8m x espessura 3mm, feitas de um material A revestem um vaso de pressão esférico de paredes finas, a pressão interna induz em cada ponto da placa tensões ortogonais de tração da ordem de 90 MPa. O material tem  $E=70\text{GPa}$  e  $G=28\text{GPa}$ . As placas são ligadas entre si por soldas.

i)Determine as forças que atuam nas bordas tracionando a chapa

**RESPOSTA(S):**

ii)Determine a espessura da chapa enquanto está sob o esforço citado no enunciado (considere o regime linear elástico)

**RESPOSTA(S):**

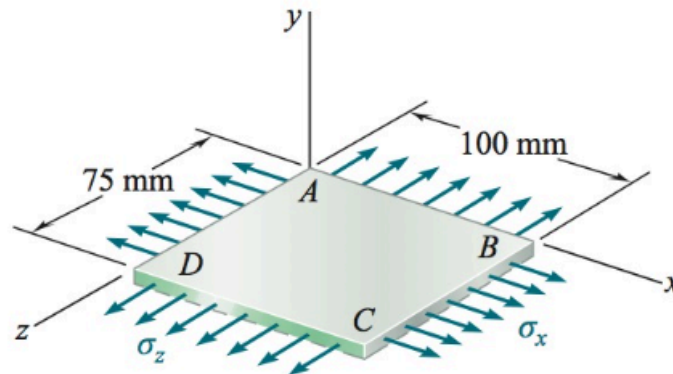
**OBS:** Se cada ponto do material estiver sujeito somente a tensões de tração ortogonais iguais, em regime linear elástico, esta peça não tem tendências a ter esforços consideráveis de cisalhamento. Por outro lado, se as tensões são ortogonais, em regime linear elástico, mas possuem valores diferentes surgirá tensões de cisalhamento da ordem (em módulo) da metade da diferença (também em módulo) entre estas tensões.

**OBS:** A situação descrita nesta questão, também se aplica aos “tecidos” que funcionam tracionados em estruturas com tendas de grande e pequenas dimensões.

**Questão 18(cod19) Lei de hooke generalizada (ver questão do livro)**



**9.58** Um tecido utilizado em estruturas infláveis está submetido a um carregamento biaxial que resulta em tensões normais  $\sigma_x = 120 \text{ MPa}$  e  $\sigma_z = 160 \text{ MPa}$ . Sabendo que as propriedades do tecido podem ser de aproximadamente  $E = 87 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0,34$ , determine a variação no comprimento (a) do lado  $AB$ , (b) do lado  $BC$  e (c) da diagonal  $AC$ .



**Figura P9.58**

FONTE: Beer, Ferdinand, P. et al. *Estática e Mecânica dos Materiais*. Disponível em: Minha Biblioteca, Grupo A, 2013. pag 392. Ver exemplo resolvido pag 389.

**RESPOSTA(S):**

#### Questão 19(cod20) Lei de hooke generalizada (pressão hidrostática)

i) Se um cubo de lados 20cm,  $E = 69 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0,38$  e recebe tensões axiais compressivas e iguais em todas as faces opostas qual deveria ser a intensidade das forças para o cubo se deformar 0,5 por mil em qualquer dos eixos?

**RESPOSTA(S):**

ii) Se um cubo de lados 20cm,  $E = 69 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0,38$  e recebe tensões axiais compressivas e iguais em duas faces opostas, qual deveria ser a intensidade da força para o cubo se deformar 0,5 por mil em qualquer dos eixos?

**RESPOSTA(S):**

**OBS:** Pressão atmosférica  $101,5 \text{ kPa} = 1 \text{ atm}$  e  $1 \text{ m.c.a.} = \text{aprox } 1 \text{ atm}$ , então a pressão relativa à atmosférica na profundidade de 5,0 m em água é 5 atm ou 5 m.c.a. ou 0,5 MPa, contudo a pressão absoluta é 6 atm ou aproximadamente 0,6 MPa.

**OBS:** A pressão da atmosfera (1atm) não é sentida (normalmente) pelas pessoas saudáveis, o termo “m.c.a.” significa “metro de coluna de água” e o termo “pressão hidrostática” significa “pressão igual em todas as direções”, os seres na superfície da terra estão na pressão hidrostática de 1 atm que é o mesmo de 1 m.c.a.

### Questão 20(cod21)

Exemplo 9.9. Um bloco retangular de um material com um módulo de elasticidade transversal  $G = 620 \text{ MPa}$  é colado a duas placas rígidas horizontais. A placa inferior é fixa, enquanto a placa superior está submetida a uma força horizontal  $P$  (Fig. 9.45). Sabendo que a placa superior se desloca 1 mm sob a ação da força, determine (a) a deformação de cisalhamento média no material e (b) a força  $P$  que atua na placa superior

### RESOLUÇÃO

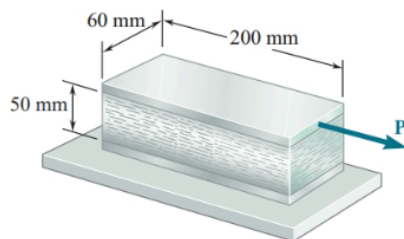


Figura 9.45

**a. Deformação de cisalhamento.** Seleccionamos eixos coordenados centrados no ponto médio  $C$  da borda  $AB$  e direcionados conforme mostrado (Fig. 9.46). De acordo com essa definição, a deformação de cisalhamento  $\gamma_{xy}$  é igual ao ângulo formado pela vertical e pela linha  $CF$  que une os pontos médios das bordas  $AB$  e  $DE$ . Notando que esse é um ângulo muito pequeno e lembrando que ele deverá ser expresso em radianos, escrevemos

$$\gamma_{xy} \approx \tan \gamma_{xy} = \frac{1 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} \quad \gamma_{xy} = 0,020 \text{ rad}$$

**b. Força atuante na placa superior.** Primeiro determinamos a tensão de cisalhamento  $\tau_{xy}$  no material. Usando a lei de Hooke para tensão e deformação de cisalhamento, temos

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = (620 \text{ MPa})(0,020 \text{ rad}) = 12,4 \text{ MPa}$$

A força exercida na placa superior é então

$$P = \tau_{xy} A = (12,4 \text{ MPa})(200 \text{ mm})(60 \text{ mm}) = 148,8 \times 10^3 \text{ N}$$

$$P = 148,8 \text{ kN} \quad \blacksquare$$

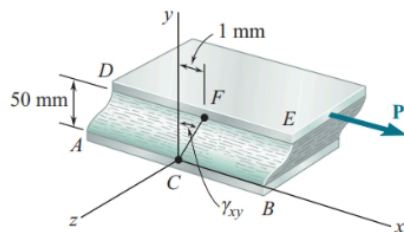


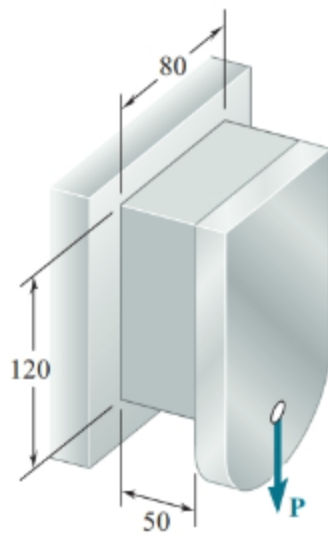
Figura 9.46

FONTE: Beer, Ferdinand, P. et al. Estática e Mecânica dos Materiais. Disponível em: Minha Biblioteca, Grupo A, 2013.pag 386

### RESPOSTA(S):

### Questão21(cod22)

9.61- O bloco plástico mostrado na figura é colado entre um suporte rígido e uma placa vertical, à qual é aplicada uma força  $P$  de 240 kN. Sabendo que, para o plástico utilizado,  $G = 1.050 \text{ MPa}$ , determine o deslocamento da placa



Dimensões em mm

**Figura P9.61**

FONTE: Beer, Ferdinand, P. et al. Estática e Mecânica dos Materiais. Disponível em: Minha Biblioteca, Grupo A, 2013.pag: 393.

**RESPOSTA(S):**

A NUMERAÇÃO máxima de códigos até este ponto é **(cod23)**

## PAC 6 - Torção

### CONTEÚDO TORÇÃO

Fórmulas

$$L \cdot \gamma = r \cdot \theta$$

$$\tau = G \cdot \gamma \quad \tau = \frac{Tp}{J}$$

$$J_{\bullet} = \frac{\pi r_e^4}{2} - \frac{\pi r_i^4}{2}$$

$$T = F \cdot d_{\perp F}$$

$$\theta = \frac{TL}{JG} \quad \gamma = \frac{T \cdot r}{JG}$$

A **torção** ocorre quando um momento de torção ou **torque** é aplicado a um eixo ou barra, resultando em uma rotação ou deformação angular ao longo de seu comprimento. A torção é um fenômeno comum em elementos estruturais como eixos, onde é necessário transmitir momentos torcionais. A análise de torção é fundamental no projeto de componentes como eixos de transmissão, chaves de torque e eixos de motores.

### 1. Torque

O **torque** (ou momento de torção) é a grandeza que gera a torção em um eixo. É definido como a força aplicada multiplicada pela distância do ponto de aplicação da força ao eixo de rotação:

$$T = F \times r$$

Onde:

- $T$  é o torque (Nm),
- $F$  é a força aplicada (N),
- $r$  é a distância perpendicular da linha de ação da força ao eixo de rotação (m).

O torque aplicado gera uma distribuição de tensões de cisalhamento ao longo da seção transversal da peça. Para eixos ou barras submetidos a torção, o valor do torque é constante ao longo do comprimento do eixo, exceto nas seções onde a carga é aplicada.

## 2. Ângulo de Cisalhamento

Quando um eixo é submetido à torção, cada seção transversal rotaciona em relação à anterior, gerando um **ângulo de cisalhamento**. O ângulo de cisalhamento, representado por  $\gamma$ , mede a deformação angular gerada pelo cisalhamento ao longo da superfície do eixo:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

Onde:

- $\gamma$  é o ângulo de cisalhamento (em radianos),
- $\tau$  é a tensão de cisalhamento (Pa ou MPa),
- $G$  é o módulo de cisalhamento do material (Pa ou MPa).

O ângulo de cisalhamento representa a deformação local causada pelo cisalhamento na superfície da peça.

## 3. Ângulo de Torção

O **ângulo de torção** ( $\theta$ ) é a rotação total de uma seção transversal em relação a outra ao longo do comprimento da barra. Pode ser calculado pela seguinte fórmula para um eixo de comprimento  $L$ :

$$\theta = \frac{TL}{GJ}$$

Onde:

- $\theta$  é o ângulo de torção (em radianos),
- $T$  é o torque aplicado (Nm),
- $L$  é o comprimento do eixo (m),
- $G$  é o módulo de cisalhamento (Pa),
- $J$  é o momento polar de inércia da seção transversal (m<sup>4</sup>).

O ângulo de torção descreve a rotação total de uma extremidade do eixo em relação à outra sob a ação do torque.

## 4. Tensão de Cisalhamento da Torção

A **tensão de cisalhamento** ( $\tau$ ) em um eixo circular devido à torção é dada pela fórmula:

$$\tau = \frac{Tr}{J}$$

Onde:

- $\tau$  é a tensão de cisalhamento (Pa ou MPa),
- $T$  é o torque aplicado (Nm),
- $r$  é o raio da seção transversal (m),
- $J$  é o momento polar de inércia (m<sup>4</sup>).

A tensão de cisalhamento é máxima na superfície externa da seção transversal, ou seja, onde  $r$  é máximo. A distribuição de tensões de cisalhamento é linear, sendo nula no centro da seção (para seções maciças) e máxima na periferia.

## 5. Seções Transversais Circulares Maciças

Para eixos de seção transversal **circular maciça**, o momento polar de inércia ( $J$ ) é dado por:

$$J = \frac{\pi d^4}{32} \quad \text{ou} \quad J = \frac{\pi r^4}{2}$$

Onde:

- $d$  é o diâmetro da seção transversal.

Um eixo de seção circular maciça possui uma distribuição linear de tensões de cisalhamento que vai de zero no centro até seu valor máximo na superfície externa.

## 6. Seções Transversais Tubulares

Para eixos de seção transversal **circular tubular** (ou eixo oco), o momento polar de inércia ( $J$ ) é dado por:

$$J = \frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{32}$$

Onde:

- $d_o$  é o diâmetro externo da seção,
- $d_i$  é o diâmetro interno da seção.

Os eixos tubulares são muito utilizados quando é necessário reduzir o peso sem comprometer a capacidade de resistir à torção. A tensão de cisalhamento ainda segue a relação linear, sendo máxima na superfície externa ( $d_o$ ).

## 7. Resumo dos Conceitos

- **Torque:** Medida de rotação aplicada a um eixo, calculada como força vezes distância.
- **Ângulo de Cisalhamento:** Deformação angular local causada pelo torque, relacionado à tensão de cisalhamento.
- **Ângulo de Torção:** Rotação total de uma seção do eixo em relação a outra, calculada em função do torque, módulo de cisalhamento e momento polar de inércia.
- **Tensão de Cisalhamento da Torção:** Tensão gerada em uma seção transversal devido ao torque aplicado.
- **Seções Maciças e Tubulares:** Diferentes fórmulas para o momento polar de inércia, dependendo da geometria da seção (maciça ou tubular), com impacto direto na distribuição de tensões.

A análise de torção é importante no projeto de elementos como eixos e componentes que transmitem torque, garantindo que o material e a geometria escolhidos suportem as tensões geradas sem falhar.

## PAC 7 - EXERCÍCIOS GERAIS DE TORÇÃO

### 2.0 EXERCÍCIOS GERAIS DE TORÇÃO (DA ETAPA 2)

#### I QUESTIONAMENTOS FEITOS EM SALA (mini PBL)

1)(Cod24) Considere uma haste cilíndrica reta, fixa em um extremo e livre no outro, com diâmetro “D” e comprimento “L”. No extremo livre a haste recebe um binário com duas forças iguais de intensidade “F”, a distância entre as forças tem o valor “d”.

DADOS: D=4,0cm ; L=60cm ; F=600kgf e d=1,20m.

i) Determine o Torque passado para a peça pela ação do binário de forças.

ii) Determine a Tensão de cisalhamento máxima que atua na peça em função do binário recebido.

**RESPOSTAS:**

i) O **torque** transmitido à peça pela ação do binário de forças é:

$$T = 7063,2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

ii) A **tensão de cisalhamento máxima** que atua na peça é:

$$\tau_{max} \approx 561,8 \text{ MPa}$$

---

2)(Cod25) Considere uma haste cilíndrica reta, fixa em um extremo e livre no outro, com diâmetro “D” e comprimento “L”. No extremo livre a haste recebe um binário com duas forças iguais de intensidade “F”, a distância entre as forças têm o valor “d”.

DADOS: D=4,0cm ; L=60cm ; F=600kgf ; d=1,20m ; G=80GPa

i)Determine o Ângulo de Cisalhamento.

ii)Determine o Ângulo de Torção.

**RESPOSTAS:**

i) O **ângulo de cisalhamento** é:

$$\gamma \approx 0,007 \text{ rad} \approx 0,4^\circ$$

ii) O **ângulo de torção** é:

$$\theta \approx 0,211 \text{ rad} \approx 12,1^\circ$$

**OBS:** Somente o ângulo de cisalhamento precisa ser um “ângulo pequeno\*”, o ângulo de torção não precisa.

---

3)(Cod26) Considere uma haste cilíndrica reta maciça, fixa em um extremo e livre no outro, com diâmetro “D=8,5cm” e comprimento “L=3m”. No extremo livre a haste recebe um toque que produz na peça um ângulo de torção “theta = seis graus”, neste ângulo da peça se rompe, theta é o ângulo de ruptura da peça. Esta peça tem módulo de elasticidade transversal “G = 15GPa”.



i)Determine o valor da tensão de cisalhamento de ruptura desta peça

ii)Determine o torque máximo que essa peça recebe

**RESPOSTAS:**

Tensão de Cisalhamento de ruptura : 22.3 MPa

Toque máximo que pode atuar 259 kNm

---

4)(Cod30) Considere uma haste cilíndrica reta, maciça, fixa em um extremo e livre no outro , com diâmetro “D” e comprimento “L =60cm” . No extremo livre a haste recebe um binário com duas forças iguais de intensidade “F=600kgf” , a distância entre as forças têm o valor “d=1,20m”. O módulo de elasticidade transversal da peça é “G =60GPa” e a tensão máxima admissível para o cisalhamento é “Tau\_max=50MPa”. Determine o diâmetro mínimo desta peça para suportar esta situação.

**RESPOSTA(S):**

O diâmetro mínimo da peça é, aproximadamente, 8,92cm

6)(Cod27) Considere uma haste maciça de comprimento 1,6m e diâmetro 5,0cm está engastada nos extremos, a distância de 40cm de um dos apoios recebe um torque de 5,0kNm. O módulo de elasticidade transversal é 80GPa

Determine:

i)O torque que atua em cada engaste

ii)A tensão de cisalhamento que atua em cada engaste

iii) O ângulo de torção que a peça recebe.

**RESPOSTA(S):**

**7)(Cod28)** Considere uma haste maciça de comprimento 40 cm de diâmetro externo de 5,0 cm, presa à haste está um tubo de comprimento 60 cm, diâmetro interno 5,0cm e espessura de parede de 3,0mm. Os dois estão soldados e a área de superposição pode ser desconsiderada.

A extremidade da haste rígida está engastada e a extremidade do tubo está livre. O módulo de elasticidade transversal é 80GPa e a tensão máxima admissível de cisalhamento do material é 90MPa.

i) Determine o torque máximo, admissível, que pode ser aplicado na extremidade livre .

ii) Determine o ângulo máximo admissível de torção que a peça (como um todo ) apresenta.

iii) Determine também os ângulos máximos admissíveis de torção e de cisalhamento que as duas partes da peça possam apresentar sem risco de ruptura.

**RESPOSTA(S):**

**8)(Cod29) Julgue com F ou V**

Considere uma haste rígida e maciça e um tubo rígido, ambos feitos do mesmo material e de mesmo comprimento.

i) ( ) Em cenários onde o **tubo e a haste têm o mesmo raio externo**, a haste maciça será superior tanto em torque quanto em área útil.

ii) ( ) Quando o **tubo e a haste têm a mesma área útil**, o tubo suporta mais torque, devido à distribuição do material na periferia, que aumenta o momento polar de inércia.

iii) ( ) Para casos de **hastes com diferentes diâmetros externos ou tubos com espessuras diferentes**, o torque máximo será maior para a peça com maior momento polar de inércia.

iv) ( ) Quando um tubo tem menos área útil que uma haste com o mesmo diâmetro interno, a **haste maciça** sempre terá maior resistência ao torque.

v) ( ) Quando **um tubo tem o seu diâmetro interno igual ao diâmetro de uma haste maciça**, é possível determinar um espessura adequada ao tubo de forma que ele resista a um torque maior que o maior torque que a haste suporta, sendo o tubo calculado com menos área útil que a haste maciça, Em outras palavras tubo calculado seria mais leve que a haste maciça e suportaria mais torque.

**RESPOSTA(S):**

### **3 EXERCÍCIOS**

Estas questões estão na pagina 421 do livro texto : Estática e mecânica dos materiais - Autor(es) Ferdinand P. Beer, John T. Dewolf , E. Russell Johnston Jr. , David F. Mazurek

- 10.1** Determine o torque  $T$  que causa uma tensão de cisalhamento máxima de 70 MPa no eixo cilíndrico de aço mostrado na figura.
- 10.2** Determine a tensão de cisalhamento máxima provocada por um torque de intensidade  $T = 800 \text{ N} \cdot \text{m}$ .
- 10.3** (a) Para o eixo vazado e o carregamento mostrado, determine a máxima tensão de cisalhamento. (b) Determine o diâmetro do eixo de seção cheia para que a máxima tensão de cisalhamento com o carregamento mostrado seja idêntica à da parte a.
- 10.4** (a) Determine o torque que pode ser aplicado a um eixo de seção cheia com diâmetro de 90 mm, sem exceder a tensão de cisalhamento admissível do material do eixo de 70 MPa. (b) Resolva a parte a considerando que o eixo de seção cheia foi substituído por um eixo vazado com a mesma massa e com um diâmetro interno 90 mm.
- 10.5** (a) Para um cilindro sólido de 75 mm e carregamento mostrado na figura, determine a máxima tensão de cisalhamento. (b) Determine o diâmetro interno de um cilindro vazado de 100 mm de diâmetro externo, para que a máxima tensão seja idêntica à da parte a.

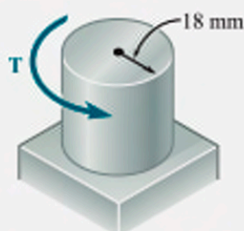


Figura P10.1 e P10.2

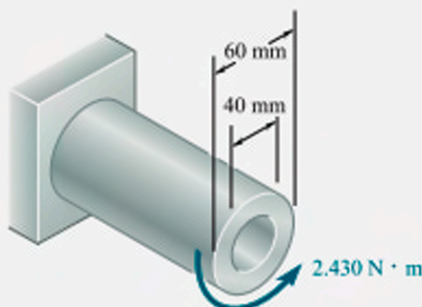
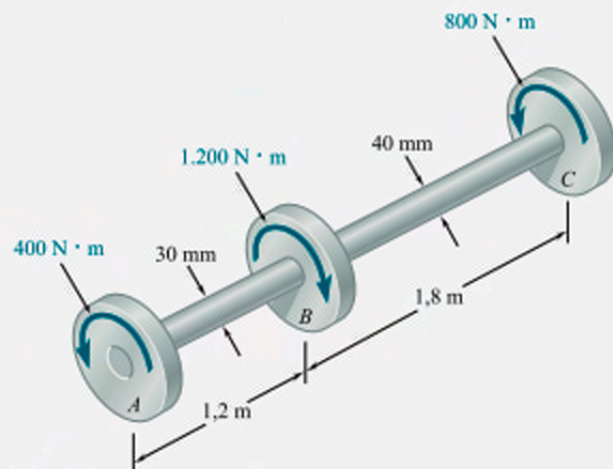


Figura P10.3

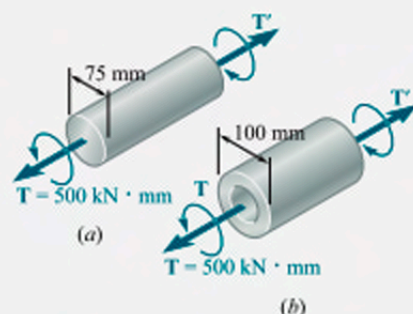
**10.6** (a) Determine o torque que pode ser aplicado a um eixo de seção cheia com diâmetro de 19 mm, sem exceder a tensão de cisalhamento admissível do material do eixo de 70 MPa. (b) Resolva a parte a considerando que o eixo de seção cheia foi substituído por um eixo vazado com a mesma área de seção transversal e com um diâmetro interno igual à metade de seu próprio diâmetro externo.

**10.7** Os torques mostrados são aplicados nas polias A, B e C. Sabendo que ambos os eixos são de seções cheias, determine a tensão de cisalhamento máxima (a) no eixo AB e (b) no eixo BC.



**Figura P10.7 e P10.8**

**10.8** Os eixos do conjunto de polias mostrado na figura devem ser redimensionados. Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível em cada eixo é de 60 MPa, determine o menor diâmetro admissível para (a) o eixo AB e (b) o eixo BC.

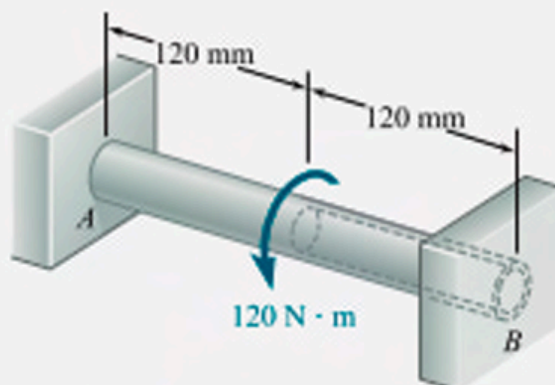


**Figura P10.5**

Esta questão está na página 430 do livro texto: Estática e mecânica dos materiais - Autor(es) Ferdinand P. Beer, John T. Dewolf, E. Russell Johnston Jr., David F. Mazurek.

No livro esta questão é um problema resolvido.

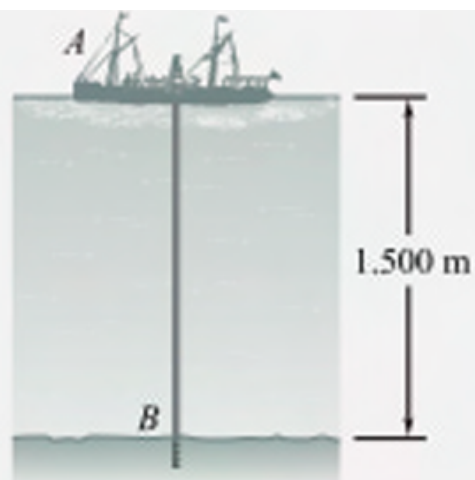
**Exemplo 10.5.** Um eixo circular  $AB$  consiste em um cilindro de aço de 240 mm de comprimento e 22 mm de diâmetro, no qual foi feito um furo de 120 mm de profundidade e 16 mm de diâmetro na extremidade  $B$ . O eixo está engastado a suportes fixos em ambas as extremidades, e é aplicado um torque de  $120 \text{ N} \cdot \text{m}$  na sua seção média (Fig. 10.25). Determine o torque aplicado no eixo por cada um dos suportes.



**Figura 10.25**

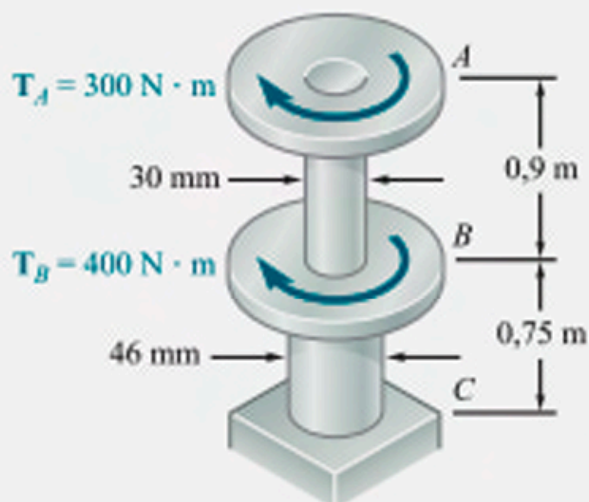
Esta(s) questão(ões) está(am) na(s) página(s) 434 do livro texto : Estática e mecânica dos materiais - Autor(es) Ferdinand P. Beer , John T. Dewolf , E. Russell Johnston Jr. , David F. Mazurek

- 10.27** Determine o maior diâmetro possível para uma barra de aço com 3 m de comprimento ( $G = 77 \text{ GPa}$ ), se a barra deve ser girada em  $30^\circ$  sem exceder a tensão de cisalhamento de 80 MPa.
- 10.28** O navio em  $A$  está começando a perfurar um poço de petróleo no fundo do oceano a uma profundidade de 1.500 m. Sabendo que o topo da broca de aço ( $G = 77 \text{ GPa}$ ) de 200 mm de diâmetro dá duas voltas completas até que a broca em  $B$  comece a girar, determine a tensão de cisalhamento máxima provocada na broca pela torção.



**Figura P10.28**

- 10.29** Os torques mostrados são aplicados nas polias *A* e *B*. Sabendo que os eixos têm seção transversal cheia e são feitos de aço ( $G = 77 \text{ GPa}$ ), determine o ângulo de torção entre (a) *A* e *B* e (b) *A* e *C*.



**Figura P10.29**



## PAC 8 - FLEXÃO

### CONTEÚDO : FLEXÃO : FÓRMULAS ÚTEIS

#### Fórmulas Manuscritas

$$\sigma = \frac{M \cdot C}{I} \quad W = \frac{I}{C} \quad \sigma = \frac{M}{W}$$

$$\frac{1}{\rho_w} = \frac{M}{E \cdot I} \quad \tau = \frac{V \cdot Q}{I t}$$

$$\square \quad \sigma_{max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \quad \tau = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \left( 1 - \left( \frac{y}{c} \right)^2 \right)$$

$$\odot \quad \sigma_{max} = \frac{4}{3} \frac{V}{A}$$

$$I_{\blacksquare} = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad I_{\bullet} = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$I_I = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot d^3}{12} + \frac{t_a \cdot d^3}{12} \quad d = h - 2t_m$$

$$I_T = \frac{b_a \cdot h_a^3}{12} + A_a \cdot d_a^2 + \frac{b_m \cdot h_m^3}{12} + A_m \cdot d_m^2$$

$$d_a = y_{cgT} - y_{cg_a} \quad d_m = y_{cgT} - y_{cg_m}$$

$$\text{Fluxo de Cisalhamento: } q = \frac{\tau \cdot Q}{I \cdot t}$$

## FLEXÃO MECÂNICA em Resistência dos Materiais e Mecânica dos Sólidos

---

A **flexão** é um tipo de esforço que ocorre em elementos estruturais, como vigas, quando submetidos a carregamentos perpendiculares ao seu eixo longitudinal.

Esse fenômeno gera tensões internas que causam a curvatura do elemento e é fundamental em projetos de estruturas e peças estruturais para garantir a segurança e a estabilidade.

### 1. Conceitos Fundamentais

- **Momento Fletor:** Quando uma viga é sujeita a uma força perpendicular ao seu eixo, surgem forças internas que equilibram o carregamento aplicado. Essas forças geram um momento de flexão ao longo da viga, chamado de **momento fletor**. O momento fletor em um ponto da viga é a medida da tendência de causar rotação ou curvatura nesse ponto.
- **Linha Neutra:** É a linha ao longo da qual não há tensão de tração nem de compressão quando a viga se deforma. A linha neutra divide as regiões de tração e de compressão em uma viga.
- **Tensões de Flexão:** Em um elemento fletido, as fibras superiores e inferiores da seção transversal da viga são submetidas a diferentes níveis de tensão. A tensão máxima ocorre nas fibras mais distantes da linha neutra, enquanto a tensão zero está na própria linha neutra. A tensão de flexão pode ser calculada pela fórmula:

$$\left[ \sigma = \frac{M \cdot y}{I} \right]$$

Onde:

- (  $\sigma$  ) é a tensão de flexão,



- ( M ) é o momento fletor no ponto considerado,
- ( y ) é a distância até a linha neutra,
- ( I ) é o momento de inércia da seção transversal da viga.

<FIGURA>

## 2. Tipos de Carregamentos e Vinculações

- **Carregamento Concentrado:** Aplicado em um ponto específico da viga, causando um momento fletor que varia ao longo do comprimento da viga.
- **Carregamento Distribuído:** Aplica-se ao longo de uma extensão da viga, criando um momento fletor que varia continuamente.
- **Carregamento Uniformemente Distribuído:** A intensidade do carregamento é constante ao longo de uma seção, resultando em um momento fletor de perfil parabólico.
- **Carregamento Não Uniforme:** A intensidade do carregamento varia ao longo da seção, gerando um momento fletor mais complexo.

Os valores de momento fletor, em uma viga ou outra peça estrutural dependem do carregamento e do tipo de vínculo a qual essa peça está sujeita. Esses vínculos definem como a peça estrutural se prende a outras peças estruturais ou ao solo .

<FIGURA>

## 3. Equações de Flexão

Para resolver problemas de flexão, são utilizadas **equações diferenciais** que relacionam o carregamento aplicado à viga com o momento fletor, o corte e a deflexão da viga. Em uma viga de Euler-Bernoulli, que é um modelo simplificado, a relação entre a curvatura e o momento fletor é dada por:

$$\left[ \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I} \right] \quad \text{e} \quad \rho = \frac{E \cdot I}{M} \quad \rho : \text{raio de curvatura}$$

Onde:

- ( v ) é a deflexão transversal da viga,
- ( E ) é o módulo de elasticidade do material da viga.

## 4. Distribuição de Tensões

A flexão gera um **perfil de tensões** ao longo da seção transversal da viga:

- **Tensões de compressão** ocorrem nas fibras acima da linha neutra.

- **Tensões de tração** ocorrem nas fibras abaixo da linha neutra.

Se a peça é reta e está sujeita, somente momentos fletores, a linha neutra coincide com o centro geométrico da seção.

Contudo, quando se trata de peças muito curvas e/ou se trata da presença de esforço adicionais, como tração e compressão, ao longo do eixo da peça, essa linha neutra não precisa coincidir com o centróide da seção transversal.

## 5. Teoria de Flexão Simples

A **teoria de flexão simples** ou teoria de Euler-Bernoulli assume que as seções planas antes da deformação permanecem planas após a deformação. Esta teoria é aplicável a vigas finas e retas e oferece uma boa aproximação para materiais elásticos e lineares.

## 6. Momentos Fletores Máximos em Peças

O **momento fletor** é uma medida das forças internas que atuam em uma viga ou elemento estrutural ao longo de seu comprimento, causando flexão. Esse momento é gerado por cargas aplicadas perpendicularmente ao eixo longitudinal da viga, e varia ao longo do comprimento, sendo máximo nos pontos onde as cargas criam maior tendência de curvatura.

O cálculo dos momentos fletores máximos é essencial no dimensionamento de vigas e elementos estruturais, pois eles indicam os pontos de maior esforço, onde o material está mais suscetível a falhas.

### 1. Conceito de Momento Fletor

Em um ponto específico de uma viga, o momento fletor é o produto da carga aplicada e a distância até esse ponto. Esse momento cria tensões internas de tração e compressão nas fibras da viga, sendo que as fibras superiores sofrem compressão e as inferiores, tração (em uma viga simplesmente apoiada). A magnitude do momento-fletor depende da posição e do tipo de carregamento.

### 2. Fórmulas para o Cálculo dos Momentos Fletores Máximos

As fórmulas para o cálculo dos momentos fletores máximos variam de acordo com as condições de apoio e o tipo de carregamento. Abaixo estão as fórmulas para os casos mais comuns:

#### *(a) Viga Simplesmente Apoiada com Carregamento Concentrado no Centro*

Para uma viga de comprimento (  $L$  ), com uma carga concentrada (  $P$  ) aplicada no centro, o momento fletor máximo ocorre no centro da viga e é dado por:

$$[M_{max} = \frac{P \cdot L}{4}]$$

*(b) Viga Simplesmente Apoiada com Carregamento Uniformemente Distribuído*

Para uma viga de comprimento (  $L$  ), com uma carga distribuída (  $q$  ) ao longo de todo o comprimento, o momento fletor máximo ocorre no centro da viga e é dado por:

$$[M_{max} = \frac{q \cdot L^2}{8}]$$

*(c) Viga Engastada e Livre (em Balanço) com Carregamento Concentrado na Extremidade*

Para uma viga em balanço com comprimento (  $L$  ), com uma carga concentrada (  $P$  ) na extremidade livre, o momento fletor máximo ocorre no engaste e é dado por:

$$[M_{max} = P \cdot L]$$

*(d) Viga Engastada e Livre (em Balanço) com Carregamento Uniformemente Distribuído*

Para uma viga em balanço de comprimento (  $L$  ), com uma carga uniformemente distribuída (  $q$  ) ao longo do comprimento, o momento fletor máximo ocorre no engaste e é dado por:

$$[M_{max} = \frac{q \cdot L^2}{2}]$$

### 3. Importância dos Momentos Fletores Máximos

O cálculo dos momentos fletores máximos permite identificar as regiões críticas de uma viga, onde o esforço interno é maior e a chance de falha é potencialmente mais alta. Essas fórmulas, aplicadas conforme o tipo de carregamento e apoio, permitem projetar elementos estruturais que resistam aos momentos fletores sem ultrapassar os limites de resistência do material.

### 4. Relação entre Momento Fletor e Flexão

O momento fletor está diretamente relacionado à flexão em uma viga. Em qualquer seção da viga, o momento fletor gera tensões de tração e compressão que causam deformação (curvatura) da viga. Ao combinar as fórmulas de momentos fletores com as equações de deflexão, é possível realizar uma análise completa da resistência e da rigidez estrutural, essencial para o projeto seguro e eficiente de estruturas.

### 7. Cálculo de Deflexão

A **deflexão** é o deslocamento transversal que ocorre ao longo do comprimento da viga devido à flexão. Para vigas engastadas e simplesmente apoiadas, são usadas fórmulas específicas para determinar o deslocamento máximo, com base no tipo de carregamento e nas condições de

apoio. A deflexão é um critério importante em projetos, pois limites de deslocamento são impostos para garantir a integridade e o desempenho da estrutura.

ou, em outras palavras:

A **deflexão** em vigas é a deformação transversal causada por cargas perpendiculares ao seu eixo longitudinal. A análise de deflexão é crucial no projeto de estruturas, pois permite avaliar o quanto uma viga se deforma sob carga e se essa deformação está dentro dos limites aceitáveis para garantir segurança e funcionalidade.

### 1. Equação Diferencial da Deflexão

A **equação diferencial da deflexão** relaciona o momento fletor ao longo da viga com a sua curvatura, permitindo calcular a deflexão transversal em diferentes pontos. Essa equação se baseia na teoria de Euler-Bernoulli para vigas, que assume que seções planas antes da deformação permanecem planas após a deformação e que o material se comporta de forma elástica e linear.

A equação diferencial da deflexão é expressa por:

$$\left[ \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M(x)}{E \cdot I} \right]$$

Onde:

- $v(x)$  é a deflexão transversal da viga em uma posição  $(x)$ ,
- $M(x)$  é o momento fletor na posição  $(x)$ ,
- $E$  é o módulo de elasticidade do material da viga,
- $I$  é o momento de inércia da seção transversal da viga em relação ao eixo neutro.
- O produto  $(I \cdot E)$  é conhecido como “rigidez” à flexão.

Para encontrar a expressão da deflexão, essa equação pode ser integrada duas vezes em relação a  $(x)$ , considerando as condições de contorno da viga (por exemplo, as posições onde a deflexão e a inclinação são conhecidas, como apoios e engastes).

### 2. Fórmulas de Deflexão Máxima (Flecha Máxima) para Casos Comuns de Vigas

Com base na equação diferencial, as deflexões máximas podem ser calculadas para configurações e condições de carregamento específicas. Aqui estão algumas fórmulas de **flecha máxima** para casos comuns:

#### *(a) Viga Simplesmente Apoiada com Carregamento Concentrado no Centro*

Para uma viga de comprimento  $(L)$ , com carga concentrada  $(P)$  aplicada no centro:

$$[v_{max} = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}]$$

*(b) Viga Simplesmente Apoiada com Carregamento Uniformemente Distribuído*

Para uma viga de comprimento ( L ), com uma carga distribuída ( q ) ao longo de todo o comprimento:

$$[v_{max} = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I}]$$

*(c) Viga Engastada e Livre (em Balanço) com Carregamento Concentrado na Extremidade*

Para uma viga em balanço com comprimento ( L ), com uma carga concentrada ( P ) na extremidade livre:

$$[v_{max} = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}]$$

*(d) Viga Engastada e Livre (em Balanço) com Carregamento Uniformemente Distribuído*

Para uma viga em balanço de comprimento ( L ), com uma carga uniformemente distribuída ( q ) ao longo do comprimento:

$$[v_{max} = \frac{q \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot I}]$$

### 3. Aplicação das Fórmulas de Deflexão

Essas fórmulas de flecha máxima são usadas para determinar a **deflexão máxima** em vigas submetidas a diferentes tipos de carregamentos. Elas são úteis porque simplificam o processo de cálculo da deflexão para situações comumente encontradas em projetos de engenharia.

Para casos mais complexos, onde o carregamento ou as condições de contorno não se enquadram nessas situações, é necessário integrar a equação diferencial da deflexão diretamente ou usar métodos numéricos para encontrar a solução. As deflexões calculadas ajudam a verificar se o elemento estrutural atende aos critérios de desempenho e segurança, garantindo que a deformação esteja dentro dos limites aceitáveis para evitar falhas e desconforto ao usuário

### 4. Relação Flecha/Vão

A **relação Flecha/Vão** (ou Deflexão/Vão) é uma medida importante para o projeto de estruturas, representando o quão rígida uma viga ou elemento estrutural permanece sob carga. Ela é definida como a razão entre a flecha máxima (deflexão) e o vão (comprimento) do elemento estrutural:

$$[\text{Relacao Flecha/Vao} = \frac{\text{Deflexao Maxima}}{\text{Comprimento do Vao}}]$$

Valores aceitáveis dessa relação são especificados por normas para garantir que a estrutura mantenha sua integridade e funcionalidade, além de proporcionar conforto ao usuário e evitar problemas estéticos.

#### *1. Valores Recomendados por Normas*

A relação Flecha/Vão depende do tipo de estrutura e da sua finalidade. Valores comuns recomendados por normas incluem:

- **Elementos de piso e lajes:** Recomenda-se que a relação Flecha/Vão seja limitada a **1/360** para assegurar conforto e evitar fissuras nas estruturas e no acabamento.
- 
- **Vigas com carga distribuída:** Uma relação de **1/250** a **1/300** é comumente utilizada para limitar deformações visíveis e assegurar estabilidade.
- 
- **Estruturas de pontes e passarelas:** Devido à necessidade de maior rigidez para evitar vibrações e desconforto, recomenda-se uma relação Flecha/Vão de **1/500** ou até mais rígida. Chegando a 1/1000.
- 
- As novas normas de desempenho estipulam flechas de 1/500 para algumas situações residenciais.

Esses valores de relação Flecha/Vão são definidos de forma a controlar o excesso de deformação, que poderia comprometer a segurança e o conforto dos usuários, além de garantir a durabilidade da estrutura.

## 8. Tipos de flexão

- **Flexão Pura:** Onde atua somente o momento fletor, nessa situação o cortante é zero então o momento fletor constante.
- **Flexão Simples:** Onde atua momento fletor e cortante
- **Flexão Composta:** Onde atua momento fletor e cortante (causados pela flexão) e esforço axial adicional.
  - Flexo-Tração
  - Flexo-Compressão

- **Flexão Reta:** Quando a linha neutra Não é inclinada em relação a geometria da seção transversal. Nessas situações somente atua um momento fletor
- **Flexão Oblíqua:** Quando a linha neutra É inclinada em relação a geometria da seção transversal. Nessas situações podem atuar um ou mais momentos fletores.

**Observação:** Esses tipos podem se combinar formando, por exemplo, uma flexão composta oblíqua.

## 9. Aplicações e Importância dos estudos de flexão

A análise de flexão é fundamental para o projeto de **vigas, pontes, pisos** e outros elementos estruturais, onde o carregamento perpendicular é comum. O dimensionamento adequado de elementos fletidos previne falhas estruturais e proporciona maior segurança e durabilidade às construções.

As fórmulas e a equação diferencial são fundamentais para engenheiros projetarem estruturas que precisam suportar cargas sem deformações excessivas. A análise de deflexão permite verificar e controlar a rigidez de vigas e outros elementos estruturais, proporcionando segurança e durabilidade à construção.

## 10. Tipos de vigas que serão estudados aqui, separadas por CASOS.

Inúmeros tipos de vigas poderiam ser estudados aqui, no entanto:

Quanto à seção transversal: vamos concentrar a atenção em vigas de seção retangular, quadrada ou circular, maciças ou vazadas, Constantes por toda a viga. (3x2=6)

Quanto ao carregamento: vamos concentrar a atenção em vigas com carregamento distribuído uniforme por toda a viga e carregamento pontual com uma só carga (posicionado no meio do vão ou no extremo do balanço) . (2)

Quanto às condições de apoio em geometria da viga: Serão estudadas somente vigas isostáticas sendo, As biapoiadas sem balanço, a viga com um engaste (em balanço) e as vigas biapoiadas com um balanço à direita .(3)

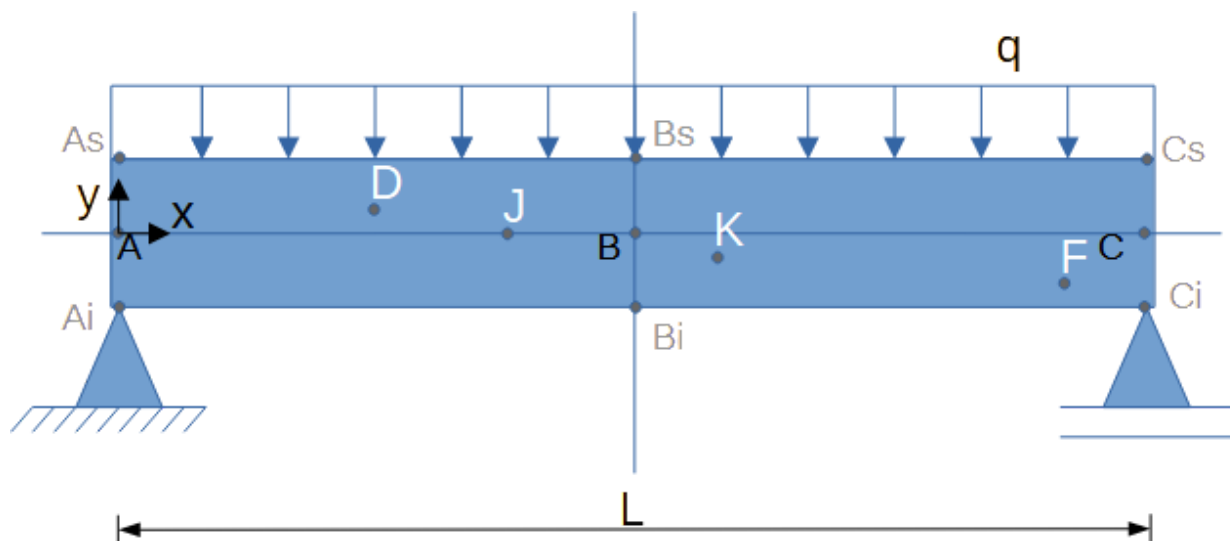
Ainda se deve levar em consideração que serão estudados os esforços de flexão os esforços que incluem cisalhamento e esforços axiais assim como os casos que envolvem forças externas ao longo do eixo da viga e de tração e compressão (3)

Montando as combinações possíveis (para este estudo introdutório) teríamos  $6 \times 2 \times 3 \times 3 = 108$ , seriam 108 tipos a serem estudados. Este número de tipos também é muito grande, somente, em torno de 15 destes serão explorados nessa disciplina , cabendo aos alunos

expandirem às demais combinações. Para os alunos que forem cursar a disciplina Resistência dos Materiais II, este assunto será retomado com fórmulas gerais para vários casos.

10.1 CASO 1 - Flexão simples em viga isostática, de vão 'L', com dois apoios simples, sem balanço, com seção transversal retangular e de carregamento uniformemente distribuído por todo vão de carga 'q'

Representação da viga e fórmulas





Valores de momento(M) e cortante (V) em função de x

$$M(x) = \frac{q \cdot L}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \qquad \frac{d}{dx} M = \frac{d}{dx} V$$

$$V(x) = \frac{q \cdot L}{2} - q \cdot x \qquad \frac{d}{dx} V = -q$$

$$M_{max} = \frac{q \cdot L^2}{8} \quad \text{ocorre em } x = L/2$$

$$V_{max} = \frac{q \cdot L}{2} \quad \text{ocorre em } x = 0 \text{ e } x = L$$

Valores das tensões

$$\sigma = - \frac{M(x) \cdot y}{I} \qquad \sigma = \sigma(x; y)$$

$$\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{V(x)}{A} \cdot \left( 1 - \left( \frac{y}{c} \right)^2 \right) \qquad \tau = \tau(x; y)$$

Observação: Módulo de resistência à flexão ( $W$ ) é a relação entre o momento de inércia da seção em relação a um eixo e a distância do ponto mais afastado da seção àquele eixo.

$$W = \frac{I}{c}$$

Ou seja:

$$\sigma = \frac{M}{W} \quad \text{e} \quad W = \frac{M}{\sigma}$$

A flecha máxima desta viga ocorre em  $x = L/2$  e o valor é

$$f_{max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{E \cdot I} \quad \text{O valor } E \cdot I \text{ é conhecido como rigidez à flexão}$$

Pode-se denominar de relação Flecha-Vão uma relação  $f_{max} / L$ .

### Relação Flecha-Vão Máxima

$$\frac{f_{max}}{L}$$

O valor desta relação é um parâmetro de projeto, de qualidade e de segurança para uma viga. Os valores desta relação são dados em frações do tipo 1/300 “um para 300” ou 1/500 ou 1/150 e outros valores.

Ao se comparar duas vigas usando estes valores, a melhor viga (menos deformável) será aquela de menor relação flecha-vão portanto será a viga com maior denominador. Então, se duas vigas de mesmo carregamento, mesmo vão e mesmo tipo de vínculos e balanços, forem comparadas sendo uma 1/200 e outra 1/300 a última está menos deformada portanto é mais rígida, o motivo da menor deformação pode ser a geometria da seção ou o material usado na viga.

### 10.1.1 QUESTÕES sobre o caso 1

**[1.1]** Considere uma viga biapoiada sem balanços, de vão 'L' com uma carga uniformemente distribuída no sentido a gravidade, em todo vão de valor 'q', esta viga tem seção retangular de base 'b' e altura 'a' constante em toda viga. O material da viga tem módulo de elasticidade longitudinal (módulo de young) 'E'.

#### DADOS:

L= 4m; q= 600kgf/m; b= 12cm; a= 30cm; E= 28GPa.

i)Determine o local de ocorrência e o valor do momento fletor máximo desta viga, especifique o sinal deste momento e escreva onde fica a região tracionada se na parte de cima ou de baixo da peça .

#### Respostas:

O local de ocorrência meio do vão onde  $x = \frac{L}{2} = \frac{4\text{ m}}{2} = 2\text{ m}$

Valor do momento máximo :  $M_{max} = \frac{q \cdot L^2}{8} = \frac{5886\text{ N/m} \cdot (4\text{ m})^2}{8} = 11.77\text{ kNm}$

As tensões de tração ficam na parte de baixo da peça (viga)

ii)Determine os locais de ocorrência dos maiores valores, em módulo, das tensões de tração(+) e compressão(-) provocados pela flexão na peça.

#### Dados necessários e calculos Prévios

$$L = 4\text{ m}$$

$$q = 5886\text{ N/m}$$

$$M_{max} = \frac{q \cdot L^2}{8} = \frac{5886\text{ N/m} \cdot (4\text{ m})^2}{8} = 11.77\text{ kNm}$$

#### Respostas:

O local de ocorrência meio do vão onde  $x = \frac{L}{2} = \frac{4\text{ m}}{2} = 2\text{ m}$

Valor maximo de tensão :  $\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot c}{I} = \frac{11.77\text{ kNm} \cdot 15\text{ cm}}{27000\text{ cm}^4} = 6540\text{ kPa}$

Os maiores valores de tensões axiais ocorrem no meio do vão, onde na parte superior da viga estão as tensões de compressão e na parte inferior as tensões de tração

v)Determine os valores máximos e os locais de ocorrência dos esforços cortantes e das

tensões de cisalhamento..

Respostas:

$$Local_{de\_Vmax} = 0 \text{ ----> Cisalhamento positivo}$$

$$Local_{de\_Vmax} = L = 4 \text{ m ----> Cisalhamento negativo}$$

$$V_{max} = \frac{q \cdot L}{2} = \frac{5886 \text{ N/m} \cdot 4 \text{ m}}{2} = 11.77 \text{ kN ----> máximo valor, em módulo, do esforço de cisalhamento}$$

$$\tau_{max} = \frac{1.5 \cdot V}{A} = \frac{1.5 \cdot 11.77 \text{ kN}}{360 \text{ cm}^2} = 49.05 \text{ kPa ----> máximo valor, em módulo, da tensão de cisalhamento}$$

iii)Determine o valor e o local de ocorrência da deformação vertical máxima (flecha máxima) que acontece nesta viga.

$$Local_{fmax} = \frac{L}{2} = \frac{4 \text{ m}}{2} = 2 \text{ m}$$

$$f_{max} = \frac{\frac{5}{384} \cdot q \cdot L^4}{E \cdot I} = \frac{\frac{5}{384} \cdot 5886 \text{ N/m} \cdot (4 \text{ m})^4}{28 \text{ GPa} \cdot 27000 \text{ cm}^4} = 0.0026 \text{ m ----> Flecha máxima em metros}$$

$$\frac{f_{max}}{\text{mm}} = \frac{0.0026 \text{ m}}{\text{mm}} = 2.6 \text{ mm ----> Flecha máxima em milímetros}$$

iv)Determine a relação flecha-maxima/vão para esta viga (flecha máxima para o esforço de flexão).

vii)Quais o valor das tensões de tração e compressão , geradas pela flexão no ponto (x=1,8m ; y=-6cm)?

viii)Quais o valor das tensões de cisalhamento, geradas pela flexão no ponto (x=1,8m ; y=-6cm)?

ix)Quais o valor das tensões de tração e compressão , geradas pela flexão no ponto (x=2,8m ; y=8cm)?

x)Quais o valor das tensões de cisalhamento, geradas pela flexão no ponto (x=2,8m ; y=8cm)?

xi)Qual o raio máximo de curvatura para esta viga? E o raio de curvatura em x=3,6m?

[1.2]Considere uma viga biapoiada sem balanços, de vão 'L' com uma carga uniformemente distribuída no sentido a gravidade, em todo vão de valor 'q', esta viga tem seção retangular de base 'b' e altura 'a' constante em toda viga. O material da viga tem módulo de elasticidade longitudinal (módulo de young) 'E'.

**DADOS:**

**L**= 6m; **q**= 8kN/m; **b**= 20cm; **a**= 56cm; **E**= 13GPa.

i)Determine o local e o valor do momento fletor máximo que ocorre nesta viga e os valores de tensão

ii)Determine as tensões axiais máximas que ocorrem nesta viga

iii)Determine o valor e onde ocorre o cortante máximo que nesta viga (em função somente do esforço de flexão já citado).

vi)Determine as tensões máximas que o cortante provoca nesta viga.

v)Determine o valor da deformação máxima (flecha) que acontece nesta viga e onde ela ocorre.

vi)Qual a relação flecha-maxima/vão para esta viga? (flecha máxima para o esforço de flexão)

vii)Quais o valor das tensões de tração e compressão, geradas pela flexão no ponto ( $x=2,4$  ;  $y=-20\text{cm}$ )?

viii)Quais o valor das tensões de cisalhamento, geradas pela flexão no ponto ( $x=2,4$  ;  $y=-20\text{cm}$ )?

ix)Quais o valor das tensões de tração e compressão , geradas pela flexão no ponto ( $x=5,4$  ;  $y=5\text{cm}$ )?

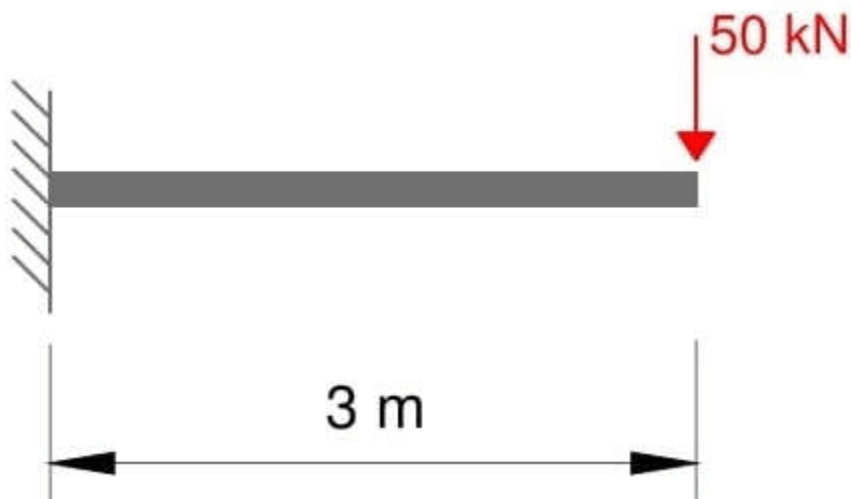
x)Quais o valor das tensões de cisalhamento, geradas pela flexão no ponto ( $x=5,4$  ;  $y=5\text{cm}$ )?

xi)Qual o raio máximo de curvatura para esta viga ?

xii)Qual o raio de curvatura para esta viga no ponto  $x=2,4\text{m}$  ?

10.2 CASO 2 - Flexão simples em viga isostática, de vão 'L', com um engaste com seção transversal retangular e de carregamento pontual no extremo livre do balanço, no sentido da gravidade, com valor F

Representação da viga: considerando  $F = 50,0\text{kN}$  e  $L=3,0\text{m}$



FONTE:

[https://www.researchgate.net/figure/Figura-13-Viga-em-balanco-com-carga-de-5-toneladas-na-extremidade-livre\\_fig6\\_342530792](https://www.researchgate.net/figure/Figura-13-Viga-em-balanco-com-carga-de-5-toneladas-na-extremidade-livre_fig6_342530792)

<FALTA O CONTEÚDO E FÓRMULAS>

[2.1] Flexão simples em viga isostática, de vão 'L', com um engaste com seção transversal retangular e de carregamento pontual no extremo livre do balanço, no sentido da gravidade, com valor F.

**L=4m; F=1800kgf; b= 12cm; a= 30cm; E= 28GPa.**

- i)Determine o local e o valor do momento fletor máximo que ocorre nesta viga.**
- ii)Determine o valor da deformação máxima que acontece nesta viga e onde ela ocorre.**
- iii)Qual a relação flecha-maxima/vão para esta viga? (flecha máxima para o esforço de flexão)**
- iv)Qual o raio máximo de curvatura para esta viga?**
- v)Determine as tensões axiais máximas que ocorrem nesta viga.**
- vi)Qual o valor e onde corre o valor do cortante máximo que ocorre nesta viga (em função somente do esforço de flexão já citado)**
- vii)Quais o valor das tensões de tração e compressão , geradas pela flexão no ponto (x=1,8m ;**

$y=-6\text{cm}$ )?

viii) Quais o valor das tensões de cisalhamento, geradas pela flexão no ponto ( $x=1,8\text{m}$  ;  $y=-6\text{cm}$ )?

ix) Quais o valor das tensões de tração e compressão, geradas pela flexão no ponto ( $x=1,8\text{m}$  ;  $y=-6\text{cm}$ )?

x) Quais o valor das tensões de cisalhamento, geradas pela flexão no ponto ( $x=1,8\text{m}$  ;  $y=-6\text{cm}$ )?

### Questões teóricas

Aqui estão cinco questões teóricas sobre flexão.

## 11. EXERCÍCIOS : Questões Teóricas sobre Flexão (necessita REVISÃO)

1. **Definição de Momento Fletor:** O que é o momento fletor em uma viga, e qual é sua importância na análise estrutural de elementos sujeitos à flexão?
  - A) É a força axial que age ao longo do eixo da viga, importante para verificar compressão e tração.
  - B) É o momento causado por uma carga aplicada perpendicularmente ao eixo da viga, crucial para avaliar a resistência à curvatura.
  - C) É a força de cisalhamento que age lateralmente na viga, importante para evitar falhas por deslizamento.
  - D) É a deformação transversal máxima da viga, importante para medir a deflexão.
  - E) É a carga de ruptura aplicada no centro da viga, necessária para determinar a tensão última.
2. **Tensões de Flexão em uma Viga:** Em uma viga sujeita a flexão, onde ocorrem as tensões de tração e compressão, e como elas se distribuem na seção transversal?
  - A) As tensões de tração e compressão se distribuem uniformemente em toda a seção transversal.
  - B) A tração ocorre acima da linha neutra, enquanto a compressão ocorre abaixo dela.
  - C) A compressão ocorre acima da linha neutra, enquanto a tração ocorre abaixo dela.
  - D) As tensões de tração e compressão se concentram no centro da seção transversal.
  - E) A tração e a compressão ocorrem apenas nos apoios da viga.

3. **Função da Linha Neutra:** Qual é a função da linha neutra em uma viga fletida e o que ela representa no estado de tensões?

- A) A linha neutra é o eixo onde ocorrem as tensões máximas de compressão.
- B) A linha neutra é o plano onde as tensões de tração e compressão são máximas e iguais.
- C) A linha neutra é a linha ao longo da qual a tensão de cisalhamento é máxima.
- D) A linha neutra é a linha onde as tensões de tração e compressão são zero.
- E) A linha neutra é o eixo onde ocorrem as máximas deflexões.

4. **Cálculo da Deflexão Máxima:** Qual das fórmulas abaixo é correta para calcular a deflexão máxima em uma viga simplesmente apoiada com uma carga concentrada ( P ) no centro?

- A)  $(v_{max} = \frac{P \cdot L}{4})$
- B)  $(v_{max} = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I})$
- C)  $(v_{max} = \frac{P \cdot L^3}{16 \cdot E \cdot I})$
- D)  $(v_{max} = \frac{P \cdot L^2}{8 \cdot E \cdot I})$
- E)  $(v_{max} = \frac{P \cdot L^4}{64 \cdot E \cdot I})$

5. **Comparação de Carregamentos em Vigas:** Considere duas vigas de mesmo comprimento e material, uma com uma carga concentrada no centro e outra com uma carga uniformemente distribuída ao longo de todo o comprimento. Qual viga terá, em geral, uma deflexão máxima menor?

- A) A viga com carga concentrada terá uma deflexão menor.
- B) A viga com carga uniformemente distribuída terá uma deflexão menor.
- C) Ambas as vigas terão a mesma deflexão máxima, pois o comprimento e o material são os mesmos.
- D) A deflexão máxima não depende do tipo de carregamento, apenas do comprimento da viga.
- E) A viga com menor momento fletor terá uma deflexão menor.

---

### 11.1 Gabarito Resumido

1.O momento fletor é o momento causado por uma carga perpendicular ao eixo da viga e é fundamental para analisar a resistência à curvatura.

2.Em uma viga fletida, a compressão ocorre acima da linha neutra, enquanto a tração ocorre abaixo dela.



3.A linha neutra é a linha ao longo da qual a tensão é zero, separando as regiões de tração e compressão.

4.A fórmula correta para a deflexão máxima de uma viga simplesmente apoiada com carga concentrada no centro é

$$(v_{max} = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}).$$

5.Em geral, uma viga com carga uniformemente distribuída terá uma deflexão máxima menor em comparação com uma viga com carga concentrada no centro. (MUDAR ESTA QUESTÃO)

## 12.MODELOS DE EXERCÍCIOS: FLEXÃO (necessita de revisão)

**[1.1]** Cálculo das Tensões e Deformações Axiais para Flexão Simples Reta e Flexão Pura Reta em viga sem balanço, simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída por todo vão e seção transversal constante por toda a viga.

Considere uma viga biapoiada sem balanços, de vão 'L' com uma carga uniformemente distribuída no sentido a gravidade, em todo vão de valor 'q', esta viga tem seção retangular de base 'b' e altura 'a' constante em toda viga. O material da viga tem módulo de elasticidade longitudinal (módulo de young) 'E'.

### DADOS:

**L= 6m; q= 700kgf/m; b= 18cm; a= 36cm; E= 28GPa.**

i)Determine o local e o valor do momento flexível máximo que ocorre nesta viga.

ii)Determine o valor da deformação máxima que acontece nesta viga e onde ela ocorre.

iii)Qual a relação flecha-maxima/vão para esta viga? (flecha máxima para o esforço de flexão)

iv)Qual o raio máximo de curvatura para esta viga?

v)Determine as tensões axiais máximas que ocorrem nesta viga

vi)Qual o valor e onde corre o valor do cortante máximo que ocorre nesta viga (em função somente do esforço de flexão já citado)

**[1.2]** Cálculo das Tensões e Deformações Axiais para Flexão Simples Reta e Flexão Pura Reta em viga sem balanço, simplesmente apoiada com carga pontual,para baixo, no meio do vão e seção transversal constante por toda a viga.

Considere uma viga biapoiada sem balanços, de vão 'L' com uma carga pontual posicionada no meio do vão de valor 'P', esta viga tem seção retangular de base 'b' e altura 'a' uniforme em toda

viga. O material da viga tem módulo de elasticidade longitudinal (módulo de young) 'E'.

**DADOS:**

**L**= 6m; **P**= 3500kgf/m; **b**= 18cm; **a**= 36cm; **E**= 28GPa.

i)Determine o local e o valor do momento flexível máximo que ocorre nesta viga.

ii)Determine o valor da deformação máxima que acontece nesta viga e onde ela ocorre.

iii)Qual a relação flecha-maxima/vão para esta viga? (flecha máxima para o esforço de flexão)

iv)Qual o raio máximo de curvatura para esta viga?

v)Determine as tensões axiais máximas que ocorrem nesta viga.

vi)Qual o valor e onde corre o valor do cortante máximo que ocorre nesta viga (em função somente do esforço de flexão já citado)

---

**[2.1]**Tensão e Deformação em Flexão Simples Reta e Pura Reta para viga com balanço simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída.

---

**[3.1]**Tensão e Deformação em Flexão Composta reta para viga sem balanço, simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída.

---

**[4.1]**Tensão e Deformação em Flexão Composta oblíqua reta para viga sem balanço, simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída.

---

**[5.1]**Cisalhamento e Fluxo de cisalhamento em Flexão Simples Reta e Pura Reta para viga sem balanço simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída.

---

# PAC 9 - Flambagem Elástica

## FLAMBAGEM ELÁSTICA

A **flambagem elástica** é um fenômeno que ocorre em elementos estruturais esbeltos, como colunas e pilares, quando submetidos a uma força de compressão axial. Em vez de se encurtarem sob compressão, esses elementos podem se deformar lateralmente, perdendo sua estabilidade e assumindo uma forma curva. Desta maneira a flambagem também pode ser considerada uma instabilidade geométrica à compressão. Esse fenômeno acontece de forma súbita e pode levar à falha estrutural, mesmo que a tensão do material esteja dentro dos limites de resistência.

### 1. Conceitos Fundamentais de Flambagem Elástica

1. **Estabilidade Estrutural:** A flambagem é um problema de estabilidade, pois representa a transição de um estado estável para um estado instável quando a carga de compressão crítica é atingida. Até a carga crítica, o elemento permanece em equilíbrio estável, mas qualquer aumento adicional provoca uma deflexão lateral abrupta.
2. **Carga Crítica de Euler:** O físico e matemático Leonard Euler desenvolveu uma fórmula para calcular a carga crítica necessária para causar flambagem em colunas esbeltas com diferentes condições de apoio. Essa carga é conhecida como **Carga Crítica de Euler** ( $P_{cr}$ ), e é dada por: Onde:

$$[P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(K \cdot L)^2}]$$

- ( E ) é o módulo de elasticidade do material,
  - ( I ) é o momento de inércia da seção transversal,
  - ( L ) é o comprimento da coluna,
  - ( K ) é o fator de comprimento efetivo, que depende das condições de apoio da coluna (engaste, apoio simples, etc.).
3. **Comprimento Efetivo:** O fator ( K ) varia com as condições de apoio. Ele modifica o comprimento ( L ) para representar a "rigidez" do elemento estrutural sob compressão. Por exemplo:
    - Coluna com ambos os extremos articulados: ( K = 1 ),
    - Coluna engastada em ambos os extremos: ( K = 0,5 ),
    - Coluna com um extremo engastado e outro livre: ( K = 2 ).

- Coluna engastada em um extremo e rotulada do outro : (  $K = 0,7$  ).

## 2.Fatores que Influenciam a Flambagem Elástica

1. **Esbeltez:** Elementos esbeltos (com alta relação comprimento/diâmetro) são mais suscetíveis à flambagem. Quanto maior o comprimento em relação à largura da seção, menor é a carga necessária para provocar flambagem.
2. **Momento de Inércia:** O momento de inércia da seção transversal afeta a resistência à flambagem. Seções com maior momento de inércia (como perfis "I" ou "H") são mais resistentes à flambagem do que seções de baixa inércia.
3. **Material:** O módulo de elasticidade (  $E$  ) do material influencia a carga crítica. Materiais mais rígidos, com altos valores de (  $E$  ), têm maior resistência à flambagem.

## 3.Fórmula da Tensão Crítica de Flambagem

A **tensão crítica de flambagem** ( $\sigma_{cr}$ ) é a tensão axial que causa flambagem elástica. Pode ser calculada dividindo a carga crítica de Euler pela área da seção transversal (  $A$  ) da coluna:

$$\left[ \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(K \cdot L/r)^2} \right]$$

Onde

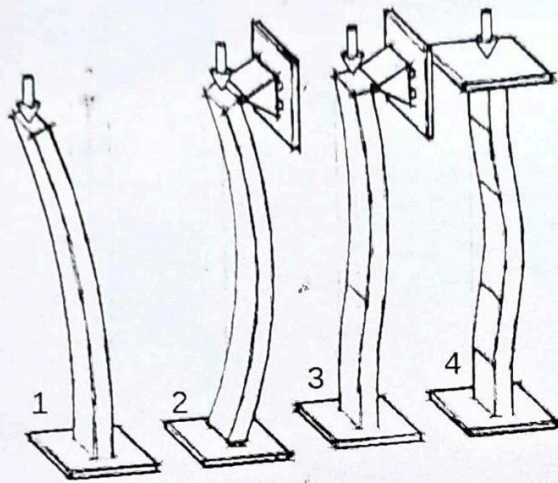
$$(r = \sqrt{I/A})$$

é o raio de giração da seção transversal.

<FIGURA>

## QUESTÃO 02

### FIGURAS



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_n^2} \quad L_n = k \cdot H$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{\lambda^2} \quad \lambda = \frac{L_n}{r} \quad r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$I_{\text{retângulo}} = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad I_{\text{círculo}} = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$$

$$A_{\text{retângulo}} = b \cdot h \quad A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2$$

A FIGURA representa 4 pilares, de mesma altura e mesma seção transversal, submetidos às respectivas forças que os levam à flambagem.

O pilar 1 é engastado em uma extremidade e livre na outra e a força que atua nele é F1, nesta situação  $k=2$

O pilar 2 é rotulado nas duas extremidades e a força que atua nele é F2, nesta situação  $k=1$

O pilar 3 é engastado em uma extremidade e rotulado na outra e a força que atua nele é F3, nesta situação  $k=0,7$

O pilar 4 é engastado nas duas extremidades e a força que atua nele é F4, nesta situação  $k=0,5$

Esta imagem é de um material mais antigo. //A imagem mostra os tipos de peças que serão analisadas e as fórmulas que serão usadas, nos estudos de introdução à flambagem elástica.// A figura usada pode ser facilmente obtida na WEB. Por exemplo no link:  
<https://spotcursos.com.br/blogs/mecanica-das-estruturas/posts/por-que-acontece-a-flambagem>

#### 4.Importância da Análise de Flambagem

A análise de flambagem elástica é essencial no projeto de estruturas esbeltas, pois ajuda a evitar colapsos inesperados. O dimensionamento adequado de pilares e colunas requer a consideração da carga crítica e das condições de apoio para garantir que esses elementos possam suportar cargas de compressão sem perder estabilidade.

#### 5.Aplicações e Limitações

A fórmula de Euler é válida apenas para flambagem elástica, aplicável quando as tensões são baixas o suficiente para que o comportamento do material seja linear e elástico. Em colunas mais curtas e robustas (menos esbeltas), outros modos de falha, como esmagamento, devem ser considerados, pois a flambagem não será o modo dominante.

Este estudo de flambagem é fundamental para projetar estruturas que suportem cargas de compressão, prevenindo falhas catastróficas e garantindo a segurança estrutural.

## PAC 10 - Vasos De Paredes Finas

### INTRODUÇÃO A VASOS DE PAREDES FINAS

**Vasos de Paredes Finas** são recipientes projetados para suportar pressões internas ou externas significativas, comuns em indústrias petroquímicas, alimentícias e aeronáutica. Quando a espessura da parede do vaso é pequena em relação ao seu diâmetro (geralmente menos que 1/10 do diâmetro), considera-se que o vaso possui **paredes finas**, o que simplifica a análise de tensões, já que as tensões variam pouco ao longo da espessura.

Existem dois tipos principais de vasos de paredes finas: **cilíndricos** e **esféricos**, cada um apresentando diferentes características de distribuição de tensões.

---

#### 1. Vasos Cilíndricos de Paredes Finas

Em um vaso cilíndrico submetido a uma pressão interna ( $p$ ), surgem dois tipos principais de tensões na parede:

- **Tensão Circunferencial** : Esta é a tensão que atua ao longo da circunferência do vaso e é a tensão predominante em vasos cilíndricos. A fórmula para a tensão circunferencial é:  $\sigma_c = \frac{p \cdot r}{t}$  Onde:
  - ( p ) é a pressão interna,
  - ( r ) é o raio interno do cilindro,
  - ( t ) é a espessura da parede.
- **Tensão Longitudinal**: Esta tensão atua ao longo do eixo do cilindro e é aproximadamente metade da tensão circunferencial. Ela é calculada por:  $\sigma_l = \frac{p \cdot r}{2t}$

As tensões são maiores na direção circunferencial, portanto, a análise da resistência do vaso geralmente se concentra nessa direção para garantir que o material possa suportar a pressão interna sem falhas.

---

## 2. Vasos Esféricos de Paredes Finas

Em um **vaso esférico** submetido a uma pressão interna ( p ), a tensão é distribuída uniformemente em todas as direções ao longo da superfície, diferentemente dos vasos cilíndricos. Isso ocorre porque a simetria esférica permite que a pressão interna seja equilibrada igualmente em todos os pontos.

- **Tensão Esférica (ou Tensão Circunferencial em Vasos Esféricos)**: A tensão em um vaso esférico é a mesma em todas as direções, pois o formato distribui a pressão de maneira uniforme. A tensão é dada por:  $\sigma_s = \frac{p \cdot r}{2t}$

Comparando com o vaso cilíndrico, observamos que a tensão em um vaso esférico é menor, para a mesma pressão e espessura, o que torna os vasos esféricos mais eficientes para suportar pressões elevadas.

---

## 3. Comparação entre Vasos Cilíndricos e Esféricos

- **Distribuição de Tensão**: Nos vasos cilíndricos, a tensão circunferencial é o dobro da tensão longitudinal, enquanto nos vasos esféricos a tensão é uniforme em todas as direções.
- **Eficiência Estrutural**: Vasos esféricos são mais eficientes para suportar altas pressões devido à distribuição uniforme de tensões, necessitando de menos material para suportar a mesma pressão que um vaso cilíndrico.
- **Complexidade de Fabricação**: Apesar da eficiência dos vasos esféricos, a fabricação e montagem de vasos esféricos são mais complexas e, portanto, mais custosas. Em

muitos casos, vasos cilíndricos são preferidos por serem mais fáceis de fabricar e instalar.

---

#### 4. Aplicações Práticas

- **Vasos Cilíndricos:** Amplamente usados em reservatórios de gás e líquido, tubulações pressurizadas e caldeiras industriais.
- **Vasos Esféricos:** Usados em situações que exigem suportar pressões muito altas, como tanques de gás pressurizado, devido à sua alta resistência estrutural.

A análise de tensões em vasos de paredes finas permite otimizar a segurança e o uso de materiais em recipientes pressurizados, essencial para aplicações que envolvem altas pressões. A escolha entre um vaso cilíndrico ou esférico depende da relação custo-benefício, da facilidade de fabricação e dos requisitos específicos de pressão e espaço da aplicação.

## PAC 11 - Introdução ao Estado Plano de Tensões

### INTRODUÇÃO AO ESTADO PLANO DE TENSÕES

---

O **estado plano de tensões** ocorre em elementos estruturais ou materiais onde as tensões principais atuam em um plano, enquanto as tensões perpendiculares a este plano são desprezíveis. Esse conceito é muito utilizado em análises de chapas finas, superfícies e cascas submetidas a cargas bidimensionais, ajudando a entender a resistência e a deformação do material.

#### 1. Conceitos de Estado Plano de Tensões

No estado plano de tensões, temos três componentes principais de tensão:

1. **Tensões Normais** ( $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ ): São tensões que atuam perpendicularmente às faces do elemento no plano (xy), correspondendo às tensões ao longo dos eixos (x) e (y).
2. **Tensão de Cisalhamento** ( $\tau_{xy}$ ): É a tensão que atua paralelamente às faces do elemento no plano (xy), gerando um deslizamento entre as camadas do material.

Essas três componentes representam o estado de tensões no ponto em análise, e com elas é possível descrever como uma estrutura ou material responderá a cargas aplicadas no plano.



## 2. Transformação de Tensões

Quando o sistema de coordenadas é rotacionado em relação a um ponto, as componentes de tensão mudam de valor e orientação. Para encontrar as **tensões principais** e a **tensão de cisalhamento máxima**, utilizamos as **equações de transformação de tensões**:

Para um ângulo de rotação ( $\theta$ ), as tensões normais transformadas ( $\sigma'_x$ ), ( $\sigma'_y$ ) e a tensão de cisalhamento transformada ( $\tau_{x'y'}$ ) são dadas por:

$$[\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta)]$$

$$[\sigma'_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) - \tau_{xy} \sin(2\theta)]$$

$$[\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)]$$

Essas fórmulas permitem calcular as tensões em qualquer plano inclinado em um ponto específico. Através dessas transformações, podemos identificar:

- **Tensões Principais** ( $\sigma_1$ ) e ( $\sigma_2$ ): São as tensões normais máximas e mínimas no ponto e ocorrem em planos onde a tensão de cisalhamento é zero.
- **Tensão de Cisalhamento Máxima** ( $\tau_{max}$ ): Representa a maior tensão de cisalhamento e ocorre em um plano inclinado a 45° em relação aos planos principais.

## 3. Círculo de Mohr

O **Círculo de Mohr** é uma ferramenta gráfica que facilita a visualização das tensões principais e de cisalhamento máximas em um ponto, além dos ângulos onde essas tensões ocorrem. Ele é construído a partir das componentes de tensão ( $\sigma_x$ ), ( $\sigma_y$ ) e ( $\tau_{xy}$ ).

### 1. Construção do Círculo de Mohr

1. **Eixo Horizontal (Tensões Normais)**: Representa as tensões normais ( $\sigma$ ) ao longo do eixo horizontal.
2. **Eixo Vertical (Tensões de Cisalhamento)**: Representa as tensões de cisalhamento ( $\tau$ ) ao longo do eixo vertical.

3. **Centro do Círculo**: O centro do círculo é localizado em  $(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$ .

$$[R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}]$$

4. **Raio do Círculo:** O raio é calculado pela expressão:

O Círculo de Mohr permite visualizar diretamente:

- **Tensões Principais**  $(\sigma_1) e (\sigma_2)$ , localizadas nos pontos onde o círculo intersecta o eixo horizontal, representando os valores máximos e mínimos de tensões normais.
- **Tensão de Cisalhamento Máxima**  $(\tau_{max})$ , que corresponde ao valor do raio do círculo.

### 5. Conclusão

O estado plano de tensões e o Círculo de Mohr são ferramentas essenciais para analisar como um material reage a cargas bidimensionais, permitindo calcular as tensões principais e de cisalhamento e identificar planos críticos de tensão. Isso é fundamental em projetos e análises de resistência de materiais, especialmente em elementos estruturais finos, onde é importante prever a deformação e garantir a integridade da estrutura sob diferentes condições de carga. O Círculo de Mohr fornece uma representação visual que facilita a compreensão e o cálculo das tensões transformadas em diferentes orientações.

## PAC 12 - EXERCÍCIOS GERAIS DA ETAPA 3

### 1. EXERCÍCIOS GERAIS (Casos)

Tipos de vigas:

- Tipo 1 : Isostática, biapoiada, sem balanços, de vão “L” com carga distribuída ‘q’, que tem sentido gravitacional, constante e uniforme por todo vão.
- Tipo 2 : Isostática, engastada em uma extremidade e livre na outra, com carga pontual “F” no sentido da gravidade no extremo do balanço
- Tipo 3 : Isostática, biapoiada, sem balanços, de vão “L” com carga pontual ‘P’, que tem sentido gravitacional, no meio do vão.
- Tipo 4 : Isostática, engastada em uma extremidade e livre na outra, com carga distribuída ‘q’, que tem sentido gravitacional, constante e uniforme por toda extensão do balanço.

Tipos de seção transversal:

- Tipo 1 : retangular maciça de base ‘b’ e altura ‘a’.
- Tipo 2 : formato “I” com altura total ‘a’ espessura das mesas ‘tm’, base das mesas ‘b’, espessura da alma ‘ta’ e a altura da alma “d=a-2.tm” .

- Tipo 3: formato “T” com altura total ‘a’ espessura da mesa ‘tm’, base da mesa ‘b’, espessura da alma ‘ta’ e a altura da alma “d=a-tm’.
- Tipo 4 : circular maciça de diâmetro ‘D’.
- Tipo 5 : retangular vazada de base externa ‘be’, altura externa ‘ae’ , base interna ‘bi’ e altura interna ‘ai’ (a figura interna e a externa devem ter o mesmo centro).
- Tipo 6 : circular vazada de diâmetro externo ‘De’, diâmetro interno “Di” (a figura interna e a externa devem ter o mesmo centro).
- Tipo 7 : quadrada vazada de lado externo ‘le’ e espessura de parede ‘t’.

### CASO 1

Considere uma viga de vão de 2,6m, com uma carga pontual de 60 kgf no meio do vão.

A viga é isostática com dois apoios simples sem balanços.

A seção transversal é retangular de base 12 cm e altura 24 cm.

A flecha medida da viga foi de 3 mm.

Determine o módulo de elasticidade longitudinal do material que compõe a viga (“E”).

#### RESOLUÇÃO PLANILHADA :

Fórmula Básica :  $f = (1/48) * (P * L^3) / E * I$

f =	3 mm	0,003 m
P =	60 kgf	588,6 N
b =	12 cm	0,12 m
a =	24 cm	0,24 m
L =	2,6 m	2,6 m
I =	13824 cm <sup>4</sup>	0,00013824 m <sup>4</sup>
E =	0,520 GPa	519689670,1

RESPOSTA : O MÓDULO DE ELASTICIDADE PROCURADO É 0,520 GPa

### CASO 2

Refaça o CASO 1 considerando os seguintes dados:

$f = 6 \cdot 10^{-2}$  mm

P=4000 gf

b= 6,0cm  
a=8,0 cm  
L=120 cm

#### RESOLUÇÃO PLANILHADA :

Fórmula Básica : $f = (1/48) * (P * L^3) / E * I$			
f =	0,06	mm	0,00006 m
P =	4	kgf	39,24 N
b =	6	cm	0,06 m
a =	8	cm	0,08 m
L =	1,2	m	1,2 m
I =	256	cm <sup>4</sup>	0,00000256 m <sup>4</sup>
E =	9,197	GPa	9196875000 Pa

RESPOSTA : O MÓDULO DE ELASTICIDADE PROCURADO É 9,197 GPa

#### CASO 3

Considere uma viga do tipo 1 com vão de 6,0m, com carga distribuída (  $q = 1,2 \text{ tf/m}$  ), com seção transversal retangular maciça de base = 24 cm e altura = 48 cm.

“Viga Tipo 1: Isostática, sem balanços, com dois apoios simples (um do primeiro e um do segundo gênero), com carga uniforme distribuída, ‘q’, por toda viga, a viga tem vão ‘L’.”

i)Determine a posição (x,y) onde ocorre a tensão máxima de cisalhamento e onde a viga recebe o maior esforço de compressão causada pela flexão (resposta em coordenadas (x,y)).

RESPOSTA:

**Locais dos máximos Cisalhamento na flexão:**

Para este tipo de viga, os maiores valores, em módulo, do cisalhamento estão nas seções de  $x=0$  e  $x=L=6,0\text{m}$  e nas duas seções, é em  $y=0$  (no centróide da peça). Em  $x=0$  o cisalhamento é positivo e em  $x=6,0\text{m}$  o cisalhamento é negativo.

**Locais das máximas Tensões axiais na flexão:**

Para este tipo de viga, os maiores valores, em módulo, das tensões axiais geradas na flexão estão na seção  $x=L/2=6/2=3,0\text{m}$ , sendo em  $y=a/2=48/2=24,0\text{cm}$  uma tensão de compressão (considerada negativa) e em  $y=-24,0\text{cm}$  uma tensão de tração (considerada positiva).

ii)Determine os valores em módulo das tensões máxima de cisalhamento provocadas pela flexão.

RESOLUÇÃO / RESPOSTA:

**Valor (em módulo) das máximas tensões de Cisalhamento**

$$V_{\text{max}} = q.L/2 =$$

$$A =$$

$$\tau_{\text{max}} = 3/2.(V_{\text{max}}/A) =$$

iii)Determine os valores em módulo das tensões máxima axiais provocadas pela flexão.

RESOLUÇÃO / RESPOSTA:

**Valor (em módulo) das máximas tensões axiais**

$$M_{\text{max}} = q.L^2 / 8 =$$

$$I = b.a^3 / 12 =$$

$$c = a / 2 =$$

$$\sigma_{\max} =$$

#### CASO 4

Considere uma viga do tipo 1 com vão de 6,0m, com carga distribuída ( $q = 1,2 \text{ tf/m}$ ), com seção transversal retangular maciça de base = 24 cm e altura = 48 cm. Determine a tensão axial (valor e tipo) e a tensão de cisalhamento (valor e sinal) que atuam na coordenada ( $x = 3,0\text{m}$ ) e ( $y = -1,0\text{m}$ )."

#### CASO 5

Considere uma viga do tipo 2 onde 'L' é igual a 1,80m, 'P' é igual a 1,20tf e ainda a seção transversal da viga é quadrada vazada de aresta externa 5,0cm com espessura 4,0mm.

"Viga Tipo 2: Isostática, engastada à direita, carregamento pontual no extremo livre de valor 'P' e comprimento do balanço igual a 'L'.

i)Determine a tensão máxima de compressão que esta viga recebe e onde está localizada essa tensão (use coordenadas X e Y para indicar o local)

i)Determine a tensão máxima de cisalhamento negativo que esta viga recebe e onde está localizada essa tensão(use coordenadas X e Y para indicar o local)

#### CASO 6

Considere uma viga do tipo 2 onde 'L' é igual a 1,80m, 'P' é igual a 1,20tf onde a viga é uma barra maciça de diâmetro 'D', o módulo de young (  $E = 70 \text{ GPa}$  ) e tensão axial máxima admissível (  $\sigma = 48,0 \text{ MPa}$ , tração e compressão ).

i) Determine o diâmetro ideal (D) desta peça. Apresente o resultado em centímetros com 3 algarismos significativos.

ii) Verifique se a tensão encontrada satisfaz ao cisalhamento , considere uma resistência admissível ao cisalhamento de  $12,0 \text{ MPa}$

### CASO 7

Considere uma viga do tipo 1 com vão de 6,0m, com carga distribuída (  $q = 1,2 \text{ tf/m}$  ), com uma seção em 'T' onde a alma tem medidas "8,0cm x 18,0cm" e a mesa "24,0cm x 6,0cm" .

i) Determine a tensão máxima de tração e compressão pelo efeito provocado pela flexão.

ii) Determine o máximo fluxo de cisalhamento que ocorre na interface entre a mesa e a alma.

### CASO 8

Considere uma viga do tipo 2 onde 'L' é igual a 1,80m, 'P' é igual a 1,20tf e ainda com a seção transversal. em 'I' onde a alma tem medidas '5,0mm x 8,0cm' e as mesas medidas '8,0cm x 5,0mm' .

i) Determine a tensão máxima de tração e compressão pelo efeito provocado pela flexão.

ii) Determine a máxima tensão de cisalhamento que ocorre na viga, considere que somente a alma é responsável por absorver esta tensão.

## 2.QUESTÕES DIRECIONADAS

[Link para Resolução PAC12 -Questões Direcionadas](#)

256829 - 1

**Uma peça é usada como escoramento vertical. Ela tem seção transversal retangular com um lado 6cm e o outro 12cm**

A peça recebe um carregamento vertical para baixo ao longo do maior eixo de 1,2 tf.

Considere que a força não foi aplicada centrada e sim com uma excentricidade de 1,5cm em relação ao eixo x, que passa pelo centróide da seção, e é paralela ao maior lado. Trata-se de uma flexão reta.

Determine a tensão em cada vértice da peça.

Obs: FAÇA UM ESQUEMA GRÁFICO SEÇÃO, REPRESENTANDO, AS EXCENTRICIDADES E OS VÉRTICES.

APRESENTANDO OS VALORES EM CADA VÉRTICE EM MPa.

256825 - 2



**Considere uma viga de seção transversal em forma de “T” onde a mesa tem 16 cm por 2 cm e a alma tem 3 cm por 5 cm. As medidas são base por altura.**

Determine o momento de inércia dessa seção viga em relação ao eixo ‘x’ (paralelo a mesa) que passa pelo centróide da seção.

RESPOSTAS: (NÃO USE CASAS DECIMAIS NA RESPOSTA)

Momento de inércia \_\_\_\_\_ cm<sup>4</sup>

256827 - 3

**Considere uma peça de seção transversal circular e raio de 9cm, usada como viga**

Em uma seção “A” da peça recebe um momento fletor máximo de 20kNm e em uma seção “B” um cortante máximo de 14 kN, dentro dessas condições calcule:

a)As máximas tensões de compressão e tração devido à flexão na seção “A”.

RESPOSTA: (com 3 algarismos significativos)

de tração \_\_\_\_\_ MPa

de compressão \_\_\_\_\_ MPa

b)A máxima tensão devido ao cisalhamento na seção “B”.

RESPOSTA:(com 3 algarismos significativos) \_\_\_\_\_ MPa

**QUESTIONAMENTO:** COMO SERIAM A RESOLUÇÃO E A RESPOSTA SE A PEÇA FOSSE DE SEÇÃO RETANGULAR MACIÇA DE BASE 12 CM E ALTURA 22CM?

256826 - 4

**Considere uma viga T com: com base da Alma “b2” , altura da Alma 24,0cm, base da mesa ‘b1’ e altura da mesa 4,0cm e comprimento 6,0m. A viga é isostática biapoiada sem balanços.**

A viga recebe uma carga no sentido gravitacional, distribuída por todo o vão de 684kgf por metro.

O centróide da seção transversal está posicionado a 24cm da base da alma.

O momento de inércia (de área) tem relação a um eixo 'x' paralelo a mesa, que passa pelo centróide é  $18000 \text{ cm}^4$ .

O módulo de elasticidade do material da viga é 60GPa.

a)Determine a flecha máxima desta viga, a presente o resultado em mm com 3 algarismos significativos.

RESPOSTA: \_\_\_\_\_ mm

b)As tensões máximas de tração e compressão que a viga sofre

RESPOSTAS:

Tração: \_\_\_\_\_ MPa

Compressão: \_\_\_\_\_ MPa

256823 -5

**Considere uma peça (que funciona como viga) simplesmente apoiada sem balanços.**

Tal peça tem seção circular maciça de diâmetro 6,0cm e comprimento de 3,0 metros.

O carregamento é 6000 kgf pontual no sentido gravitacional e atua meio da peça.

Determine a tensão máxima de cisalhamento.

---

**QUESTIONAMENTO:** COMO SERIAM A RESOLUÇÃO E A RESPOSTA SE A PEÇA FOSSE DE SEÇÃO QUADRADA MACIÇA DE LADO 6,0 CM?

256822 -6

**Considere uma peça de seção circular VAZADA DE ESPESSURA 4mm, diâmetro 3,0cm e comprimento 90,0cm**

O módulo de elasticidade do material é de 60,0 GPa.

A peça é engastada de um extremo e livre no outro.

Determine a tensão crítica de flambagem (desconsidere qualquer travamento).

RESPOSTA: \_\_\_\_\_ MPa

---

----- 7

Uma peça é usada como escoramento vertical. Ela tem seção transversal retangular com um lado 6cm, o outro 12 cm a altura 3,0 m e o módulo de elasticidade longitudinal é igual a 8,0 GPa. A tensão admissível de compressão é 9,5 MPa. Sendo a peça usada como escoramento ela deve ser considerada com apoio rotulado nas extremidades.

Determine a tensão de flambagem

----- 8

**Explique as semelhanças e diferenças entre flambagem, flexão simples e flexão por compressão excêntrica**. Centre sua explicação aspectos relacionados a deformação que a peça vai apresentar nestas 3 situações especialmente se todas a peças forem birrotuladas nos extremos

---

**RESPOSTA**

**Deformações na Flambagem, Flexão Simples e Flexão por Compressão Excêntrica**

Quando analisamos peças birrotuladas nos extremos, as deformações decorrentes de **flambagem**, **flexão simples** e **flexão por compressão excêntrica** podem apresentar semelhanças visuais, levando a interpretações equivocadas por leigos. No entanto, existem diferenças fundamentais em suas causas, características e efeitos estruturais.

---

## 1. Flambagem

- **Deformação Característica:**
    - A peça sofre um deslocamento lateral significativo e súbito ao longo do comprimento.
    - A curvatura ocorre sem que haja força perpendicular aplicada diretamente, mas devido à instabilidade estrutural gerada pela compressão axial.
    - O deslocamento lateral é amplificado em elementos esbeltos (alta razão comprimento/diâmetro), com pontos máximos de curvatura entre os apoios.
  - **Causa:**
    - Instabilidade causada pela compressão axial pura.
    - Pequenas imperfeições geométricas ou excentricidades podem iniciar a flambagem.
  - **Visão Leiga:**
    - A deformação da peça pode ser confundida com flexão devido à sua aparência arqueada, mas a força causadora atua exclusivamente ao longo do eixo longitudinal.
- 

## 2. Flexão Simples

- **Deformação Característica:**
    - A peça se curva devido a forças perpendiculares ao eixo longitudinal.
    - Apresenta uma curvatura uniforme ou variável, dependendo do tipo de carregamento (pontual ou distribuído).
    - A linha neutra divide as regiões de compressão (fibra superior) e tração (fibra inferior).
  - **Causa:**
    - Forças perpendiculares ao eixo longitudinal aplicadas ao longo do vão.
    - Exemplos típicos incluem vigas de pontes e elementos horizontais submetidos a cargas verticais.
  - **Visão Leiga:**
    - A curvatura gerada pela flexão simples pode parecer semelhante à deformação da flambagem, especialmente se a peça for fina e esbelta, mas as forças causadoras e o comportamento estrutural são distintos.
-

### 3. Flexão por Compressão Excêntrica

- **Deformação Característica:**

- Combina o encurtamento axial típico da compressão com uma curvatura semelhante à flexão simples.
- A curvatura é causada pela excentricidade da aplicação da carga, que gera um momento fletor adicional.
- A deformação não é súbita como na flambagem, mas gradual, dependendo do aumento da carga excêntrica.

- **Causa:**

- Uma força de compressão axial aplicada fora do centro geométrico ou da linha neutra da peça.
- O deslocamento lateral se intensifica proporcionalmente à excentricidade.

- **Visão Leiga:**

- A curvatura causada pela flexão por compressão excêntrica pode ser confundida com flambagem, mas neste caso, há excentricidade na aplicação da força. Essa excentricidade gera um comportamento previsível e controlável.
- 

#### Por que essas deformações podem ser confundidas por leigos?

- **Aparência Similar:** Todas as situações resultam em deformações visíveis na forma de curvatura, o que pode levar a interpretações erradas sobre a causa da falha.
    - Na flambagem, a curvatura ocorre devido à instabilidade lateral.
    - Na flexão simples, a curvatura é causada por forças perpendiculares.
    - Na flexão por compressão excêntrica, a curvatura é uma combinação de compressão axial e flexão devido à excentricidade.
  - **Influência da Esbeltez:** Peças longas e finas (altamente esbeltas) tendem a exibir deformações visíveis mais intensas, independentemente da causa (compressão axial ou cargas perpendiculares).
  - **Comportamento Inicial Semelhante:** Tanto a flambagem quanto a flexão podem apresentar pequenas deflexões iniciais. Sem instrumentos de medição, essas deflexões podem ser confundidas.
- 

#### Diferenciação Prática

- **Flambagem:** Verifica-se a força axial pura. Se a peça está sendo comprimida ao longo do eixo e apresenta curvatura súbita, é flambagem.
- **Flexão Simples:** Identifica-se a presença de cargas perpendiculares ao eixo, que são responsáveis pela curvatura.

- **Flexão por Compressão Excêntrica:** Confirma-se a presença de compressão axial com excentricidade. A análise dos esforços combinados (momento fletor + compressão axial) ajuda a diferenciar de outros fenômenos.
- 

## Resumo

Embora as deformações causadas por flambagem, flexão simples e flexão por compressão excêntrica possam parecer semelhantes, suas causas físicas e implicações estruturais são distintas:

- **Flambagem:** Instabilidade súbita causada por compressão axial.
- **Flexão Simples:** Curvatura previsível causada por cargas perpendiculares.
- **Flexão por Compressão Excêntrica:** Combinação de compressão axial e curvatura devido à excentricidade.

Para engenheiros, a diferenciação clara é essencial para o diagnóstico correto e o dimensionamento seguro de estruturas.

----- 9

**Considere uma peça de seção circular VAZADA DE ESPESSURA 4mm, diâmetro 3,0cm e comprimento 90,0cm**

O módulo de elasticidade do material é de 60,0 GPa.  
A tensão admissível de tração e compressão é 70MPa  
A peça é engastada de um extremo e livre no outro.

i) Determine a força máxima que pode atuar, perpendicularmente ao extremo livre da peça.

ii) Determine qual será a flecha máxima na peça (em mm, 3 algarismos significativos), quando essa força máxima estiver aplicada perpendicularmente a peça no extremo do balanço.

----- 10

**Considere uma peça, funcionando como viga, de seção retangular de altura 'a' e base 'b', comprimento 3,0m e carga distribuída constante por todo o vão de 600 kgf/m.**

O módulo de elasticidade do material é de 8,0 GPa e tensão admissível (à tração e compressão é ) é 15MPa, a tensão admissível ao cisalhamento é 6MPa e a flecha máxima deve ser 1/200 do vão

A peça é isostática, biapoiada nos extremos e sem balanços.

i)Determine o momento máximo e o cortante máximo que atuam nesta peça

ii)Determine a largura (base) para esta peça sabendo que  $a = 30\text{cm}$

iii)Determine a altura desta peça sabendo que  $b = 20\text{cm}$

iv)Para o cálculo do item 'ii' confira se a peça resiste ao cortante.

v)Para o cálculo do item 'ii' determine a flecha máxima para esta peça e verifique a relação flecha vão.

---

**QUESTIONAMENTO:** COMO SERIAM A RESOLUÇÃO E A RESPOSTA SE A PEÇA FOSSE DE SEÇÃO "I" de base total 'b', altura total 'a' e espessuras  $t = 5,0\text{cm}$ .

----- 11

**Considere um pilar que recebe uma compressão excêntrica com  $e_x = 5\text{cm}$  e  $e_y = 3\text{cm}$ , a força de compressão é  $20\text{tf}$ , a seção é retangular  $36\text{cm} \times 24\text{cm}$ , o vértice A está no quadrante de aplicação da força. Nomeie os vértices de forma anti horária para, desta forma, o segmento AB ser igual a 36cm. Determine a tensão que atua em cada vértice**

---

## PAC 13 - ANEXO - FOLHA DE FÓRMULAS

### 1. Fórmulas manuscritas



## FÓRMULAS

$$\sigma = \frac{F}{A_{\perp F}} \quad \sigma = E \cdot \epsilon$$

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad \Delta L = L_f - L_i$$

↳ ADIMENSIONAL DE VALOR PEQUENO  $\approx 10^{-3}$

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\theta)$$

$$\tau = \sigma_0 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)$$

$$\Delta L = \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta T$$

$$\Delta T = t_f - T_i$$

$$\sigma = E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \alpha \cdot \Delta T$$

$$\sigma = \frac{M \cdot C}{I} \quad w = \frac{I}{C} \quad \sigma = \frac{M}{w}$$

$$\frac{1}{R_w} = \frac{M}{E \cdot I} \quad \sigma = \frac{V \cdot Q}{I \cdot t}$$

$$\square \quad \sigma_{mx} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \quad \tau = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \left(1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2\right)$$

$$\odot \quad \sigma_{mx} = \frac{4}{3} \frac{V}{A}$$

$$I_{\square} = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad I_{\bullet} = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$I_I = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot d^3}{12} + \frac{t \cdot a \cdot d^3}{12} \quad d = h - 2t_m$$

$$I_T = \frac{b \cdot a \cdot h \cdot a^3}{12} + A \cdot d_a^2 + \frac{b \cdot m \cdot h \cdot m^3}{12} + A_m \cdot d_m^2$$

$$d_a = y_{cgT} - y_{cg_a} \quad d_m = y_{cg} - y_{cg_m}$$

$$\tau = \frac{F}{A_{\parallel F}} \quad \tau = G \cdot \gamma$$

↳ ÂNGULO PEQUENO EM RADIANOS

$$\Delta L = h \cdot \sin(\gamma)$$

$$\Delta L \approx h \cdot \tan(\gamma) \approx h \cdot \gamma$$

$$\nu = - \frac{\epsilon_{\perp F}}{\epsilon_{\parallel F}} \quad \frac{E}{2G} = 1 + \nu$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

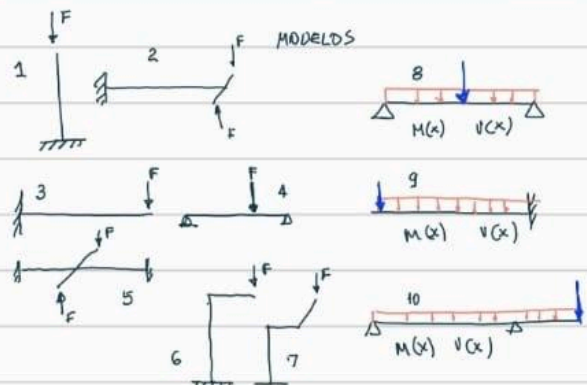
$$L \cdot \gamma = r \cdot \theta$$

$$\tau = G \cdot \gamma \quad \tau = \frac{T \rho}{J}$$

$$J_{\bullet} = \frac{\pi r_e^4}{2} - \frac{\pi r_i^4}{2}$$

$$T = F \cdot d_{\perp F}$$

$$\theta = \frac{T L}{J G} \quad \gamma = \frac{T \cdot r}{J G}$$



## 2. Fórmulas digitadas

### Esforços Axiais

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{perp}F}}$$

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$\epsilon$ : Adimensional de um valor pequeno  
OG\*\*  $\approx 10^{-3}$

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\Delta L = L_f - L_i$$

Adimensional de um valor pequeno  $\approx 10^{-3}$

### Esforços em planos inclinados

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\theta)$$

$$\tau = \sigma_0 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)$$

### Efeitos da temperatura

$$\Delta L = \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta T$$

$$\Delta T = T_f - T_i$$

$$\sigma = E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

### Torção

$$L \cdot \gamma = r \cdot \theta$$

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$\gamma$ : ângulo pequeno\* em radianos

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{J}$$

$$J_o = \frac{\pi \cdot r_e^4}{2} - \frac{\pi \cdot r_i^4}{2}$$

$$T = F \cdot d_{\text{perp}F}$$

$$\theta = \frac{T \cdot L}{G \cdot J} \quad \gamma = \frac{T \cdot \rho}{J \cdot G}$$

### Flexão

$$\sigma = \frac{M \cdot c}{I} \quad W = \frac{I}{c} \quad \sigma = \frac{M}{W}$$

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{M}{E \cdot I}$$

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I \cdot t}$$

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \alpha \cdot \Delta T$$

Lei de Hooke Generalizada para esforços axiais

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_z = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

Cisalhamento

$$\tau = F/(A_{//F})$$

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$$DL = h \cdot \text{sen}(\gamma) = \text{aprox} = h \cdot \gamma$$

$\gamma$  : ângulo pequeno\* em radianos

---

\*Definição de ângulo pequeno

Ângulo cujo valor em radianos é semelhante ao valor do seu seno e de sua tangente . Esta definição é particularmente válida para ângulos menores ou iguais a 5 graus , na precisão de 3 algarismos significativos (ccd)

\*\*OG: Ordem de Grandeza.

## Inércia de Seções

Para seção retangular - Para seção circular:

$$I_{ret} = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad I_{cir} = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$$

Para seção "I":

$$I_t = \frac{b \cdot h^3}{12} + \frac{b \cdot d^3}{12} + \frac{t_a \cdot d^3}{12}$$

$$d = h - 2 \cdot t_m$$

Para seção "T":

$$I_t = \frac{b_a \cdot h_a^3}{12} + A_a \cdot d_a^2 + \frac{b_m \cdot h_m^3}{12} + A_m \cdot d_m^2$$

$$d_a = Y_{cgT} - Y_{cg_a}$$

$$d_m = Y_{cgT} - Y_{cg_m}$$

## FLAMBAGEM ELÁSTICA

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_{fb}^2} \quad rg = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$L_{fb} = k \cdot L \quad \lambda = \frac{l_{fb}}{rg}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

	<p>A tensão crítica de flambagem é inversamente proporcional ao quadrado do índice de esbeltez</p> <p>FLECHAS MAIS COMUNS</p> $f = k_1 \cdot \frac{q \cdot L^4}{E \cdot I} \quad f = k_2 \cdot \frac{P \cdot L^3}{E \cdot I}$ <p> <math>k_1 = 5/384</math> - c. distribuída, biapoiada e sem balanço  <math>k_2 = 1/48</math> - c. pontual, biapoiada e sem balanço.  <math>k_1 = 1/8</math> - c. distribuída, em balanço  <math>k_2 = 1/3</math> - c. pontual, em balanço </p>
--	---

---

## PAC 20 : Distribuição Detalhada Do Conteúdo Para Cada Aula - Resumo

### Pergunta 10

Segue a distribuição detalhada do conteúdo para cada aula, de acordo com o plano de ensino final:

---

#### 1. Apresentação e Introdução (1 aula)

- Boas-vindas e apresentação do professor e dos alunos.
- Contextualização da importância da disciplina para a Engenharia.
- Apresentação do plano de ensino, metodologia e critérios de avaliação.
- Introdução ao campo da resistência dos materiais e exemplos práticos de aplicação.

- Explicação do contrato didático e expectativas.
- 

## **2. Tensão (8 aulas)**

### **Aula 1:**

- Conceito de tensão e sua definição.
- Força interna e área de seção transversal.
- Unidades de medida (Pa, MPa).

### **Aula 2:**

- Hipóteses simplificadoras (materiais homogêneos, isotrópicos, pequenas deformações).
- Exemplos práticos de aplicação das hipóteses.

### **Aula 3:**

- Tensão normal: definição e cálculo ( $\sigma = F/A$ ).
- Exemplos numéricos de barras sob tração e compressão.

### **Aula 4:**

- Tensão de cisalhamento: definição e cálculo ( $\tau = F/A$ ).
- Aplicações práticas, como parafusos e soldas.

### **Aula 5:**

- Tensão de esmagamento: conceito e cálculo ( $\sigma_e = F/A_e$ ).
- Exemplos práticos em chapas metálicas.

### **Aula 6:**

- Introdução à tensão admissível: definição e cálculo ( $\sigma_{ad} = \sigma_{ult}/FOS$ ).
- Fatores de segurança em projetos estruturais.

### **Aula 7:**

- Exercícios práticos envolvendo tensão normal, cisalhamento e esmagamento.

### **Aula 8:**

- Projeto de ligações simples com base nos conceitos de tensão.
  - Exemplos práticos: dimensionamento de parafusos e chapas.
- 

## **3. Deformação (5 aulas)**

**Aula 1:**

- Conceito de deformação e sua relação com a tensão.
- Definição de deformação longitudinal ( $\Delta L/L$ ).

**Aula 2:**

- Lei de Hooke: relação entre tensão e deformação ( $\sigma = E \times \epsilon$ ).
- Diagrama tensão-deformação.

**Aula 3:**

- Comportamento elástico e plástico dos materiais.
- Exemplos práticos de deformação específica.

**Aula 4:**

- Deformação não-linear em materiais frágeis e dúcteis.
- Exemplos práticos e análises de gráficos.

**Aula 5:**

- Exercícios práticos e casos reais de deformação em elementos estruturais.
- 

**4. Propriedades Mecânicas dos Materiais (6 aulas)****Aula 1:**

- Introdução às propriedades mecânicas: módulo de elasticidade, resistência à tração e limite de escoamento.

**Aula 2:**

- Ensaio de tração e compressão: procedimentos e análise de resultados.

**Aula 3:**

- Coeficiente de Poisson e sua relação com deformações longitudinais e transversais.

**Aula 4:**

- Energia de deformação e tenacidade dos materiais.
- Comparação entre materiais dúcteis e frágeis.

**Aula 5:**

- Relação entre as constantes elásticas ( $E$ ,  $G$ ,  $\nu$ ).

**Aula 6:**

- Exercícios práticos e aplicação em casos reais.
- 

**5. Barras Submetidas à Carga Axial (6 aulas)****Aula 1:**

- Conceito de força axial (tração e compressão).
- Princípio de Saint-Venant.

**Aula 2:**

- Tensão e deformação em barras axiais ( $\sigma = F/A$ ;  $\Delta L = FL/EA$ ).

**Aula 3:**

- Sistemas com barras compostas e seções variáveis.

**Aula 4:**

- Rigidez e flexibilidade axial.
- Aplicação em sistemas estruturais.

**Aula 5:**

- Efeitos térmicos: dilatação e contração.
- Exemplos práticos de deformação térmica.

**Aula 6:**

- Concentração de tensões em barras com furos e entalhes.
- 

**6. Vigas Submetidas à Carga Transversal (4 aulas)****Aula 1:**

- Introdução às vigas e forças transversais.
- Conceito de força cortante e momento fletor.

**Aula 2:**

- Diagramas de força cortante e momento fletor para cargas pontuais e distribuídas.

**Aula 3:**

- Tensões de cisalhamento em vigas: distribuição parabólica.

- Fluxo de cisalhamento em conexões.

#### **Aula 4:**

- Exercícios práticos e análise de exemplos reais.
- 

### **7. Barras Submetidas à Torção (4 aulas)**

#### **Aula 1:**

- Conceito de torção em barras de seção circular.
- Fórmula da torção ( $\theta = T \times L / G \times J$ ).

#### **Aula 2:**

- Tensões e deformações devido à torção.
- Exemplos em eixos de transmissão.

#### **Aula 3:**

- Torção em tubos de paredes finas.
- Aplicações práticas em estruturas tubulares.

#### **Aula 4:**

- Exercícios práticos e resolução de problemas.
- 

### **8. Flexão de Vigas (9 aulas)**

#### **Aula 1:**

- Conceito de flexão simples e momento fletor.
- Relação entre carregamento, força cortante e momento fletor.

#### **Aula 2:**

- Flexão pura: análise de tensões normais em seções transversais.

#### **Aula 3:**

- Flexão composta e flexão oblíqua.
- Aplicações em vigas de concreto armado.

#### **Aula 4:**

- Tensões máximas em vigas submetidas a flexão.



**Aula 5:**

- Exemplos de cálculo de tensões em vigas retangulares e circulares.

**Aula 6:**

- Dimensionamento de vigas para flexão.

**Aula 7:**

- Casos práticos: análise de vigas em pontes e edifícios.

**Aula 8:**

- Exercícios avançados de flexão com diferentes carregamentos.

**Aula 9:**

- Revisão do tema e resolução de dúvidas.
- 

**9. Cargas Combinadas (2 aulas)****Aula 1:**

- Conceito de tensões principais em elementos submetidos a cargas combinadas.

**Aula 2:**

- Exemplos práticos e exercícios envolvendo cargas axiais, flexão e cisalhamento.
- 

**10. Introdução ao Estudo da Flambagem (2 aulas)****Aula 1:**

- Conceito de flambagem e estabilidade estrutural.
- Cálculo da carga crítica ( $F_{cr} = \pi^2 EI / L^2$ ).

**Aula 2:**

- Aplicações práticas e exemplos de falhas por flambagem.
-