

Знаходження найбільшого і найменшого значень неперервної функції на проміжку

Для знаходження найбільшого і найменшого значень функції найчастіше використовується графік функції. У деяких випадках можна знайти найбільше і найменше значення функції і без допомоги графіка, використовуючи міркування. У більш складних випадках використовується похідна. Для цього сформулюємо деякі теореми.

1. Якщо функція неперервна на відрізку, тоді вона досягає на ньому і свого найбільшого, і свого найменшого значень (ця теорема доводиться в курсі вищої математики).
2. Найбільшого і найменшого значень безперервна функція може досягати як на кінцях відрізка, так і всередині нього.
3. Якщо найбільше (або найменше) значення досягається всередині відрізка, тоді тільки в стаціонарній або критичній точці.

Алгоритм знаходження найменшого та найбільшого значень неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$:

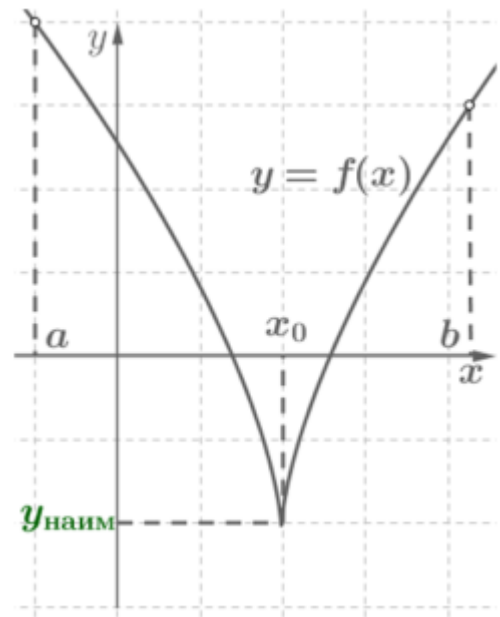
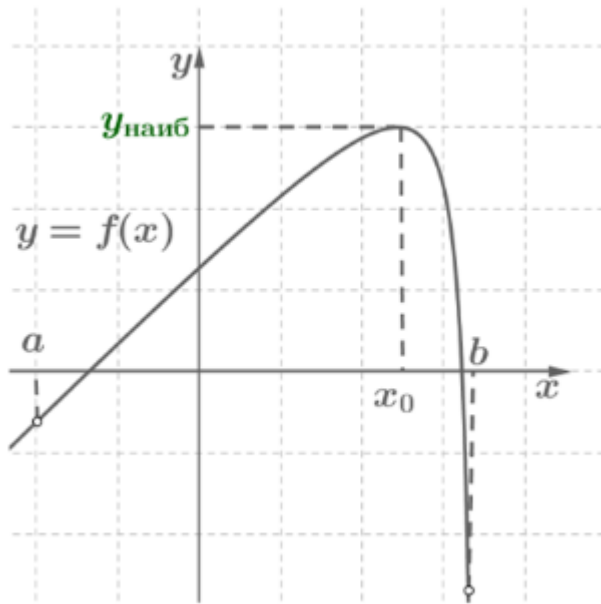
1. Знайти похідну $f'(x)$.
2. Знайти стаціонарні та критичні точки функції, що лежать всередині відрізка $[a;b]$.
3. Обчислити значення функції $y=f(x)$ в точках, відібраних на другому кроці і в точках a і b ; обрати серед цих значень найменше (це буде $u_{\min}$) і найбільше (це буде $u_{\max}$).

А як бути, якщо мова йде про знаходження найбільшого або найменшого значення функції, неперервної на незамкнутому проміжку, наприклад на інтервалі? Можна побудувати графік функції і зняти інформацію з отриманої графічної моделі. Але частіше виявляється більш зручним використовувати наступну теорему.

Теорема. Нехай функція $y=f(x)$ неперервна на проміжку X і має всередині нього єдину стаціонарну або критичну точку x_0 . Тоді:

- а) якщо $x=x_0$ — точка максимуму, тоді $u_{\max}=f(x_0)$;
- б) якщо $x=x_0$ — точка мінімуму, тоді $u_{\min}=f(x_0)$.

На малюнках наведені відповідні геометричні ілюстрації.



Приклад

Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x^3 - 12x + 7$ на відрізку $[0; 3]$.

Розв'язок.

Знайдемо похідну і критичні точки першого роду.

$$y' = 3x^2 - 12;$$

$$y' = 0, \text{ якщо } 3x^2 - 12 = 0; x^2 = 4; x = \pm 2.$$

Із знайдених двох критичних точок тільки точка $x = 2$ належить заданому відрізку $[0; 3]$.

Обчислимо значення функції в критичній точці $x = 2$ і на кінцях відрізка $x = 0$ та $x = 3$:

$$y(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 7 = -9;$$

$$y(0) = 0^3 - 12 \cdot 0 + 7 = 7;$$

$$y(3) = 3^3 - 12 \cdot 3 + 7 = -2.$$

Порівнюючи три отриманих значення функції, робимо висновок, що:

найбільше значення функції $y_{\max} = y(0) = 7$,

найменше значення функції $y_{\min} = y(2) = -9$.