

Partie A : Ondes longitudinales

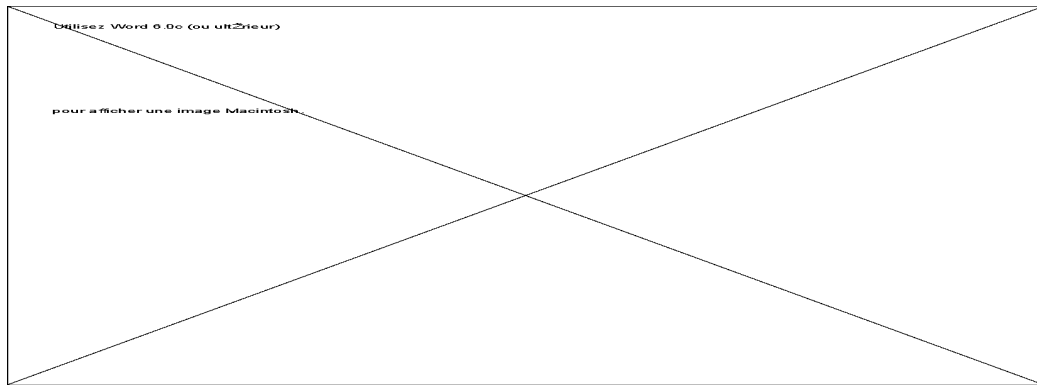
A.1 Chaque point n'interagissant qu'avec ses plus proches voisins, la loi de Newton s'écrit :

$$m_p = -k(x_p - x_{p+1}) - k(x_p - x_{p-1})$$

A.2 Utilisons des notations complexes : $p = X_0 \exp i(Kpa - \omega t)$. En reportant dans l'équation précédente, on obtient :

$$-m\omega^2 = -k + k \exp(iKa) - k + k \exp(-iKa) = -2k(1 - \cos Ka) = -4k \sin^2 \frac{Ka}{2}$$

Une pulsation étant toujours un réel positif, l'équation de dispersion s'écrit :



A.3 Le changement $K \leftarrow K + \pi/a$ ne modifie pas x_p , ni par conséquent la "situation physique".

Nous supposons donc $K \in [-\pi/a, \pi/a]$, ce qui correspond en physique du solide à la première zone de Brillouin (voir question A.7).

D'autre part le changement $K \leftarrow -K$ correspond simplement à inverser le sens de propagation. On peut donc finalement supposer : $K \in [0, \pi/a]$

La vitesse de phase est $v_p = \omega/K$. La vitesse de groupe est $v_g = d\omega/dK$.

Ces vitesses sont différentes et dépendent de K : le milieu est dispersif.

A.4 Il est clair, sur le graphique du A.2, que les ondes sinusoidales se propageant dans ce milieu ont des pulsations inférieures à ω_c . Le système est donc un filtre passe-bas de pulsation de coupure ω_c .

A.5 Pour $\omega > \omega_c$, l'équation de dispersion donne $\cos(Ka) > 1$, ce que l'on peut interpréter avec un vecteur d'onde complexe $K = K' + iK''$, en supposant toujours $K' \in [0, \pi/a]$. On peut tout d'abord penser obtenir une onde progressive atténuée, mais ceci est impossible car le modèle ne contient aucun élément pouvant dissiper de l'énergie. Logiquement, on doit donc trouver une onde évanesccente, dans laquelle le phénomène de propagation a disparu : le vecteur d'onde étant imaginaire pur, tous les points vibrent en phase, avec une atténuation exponentielle en fonction de la profondeur.

Le calcul qui suit va montrer que c'est en partie inexact.

Reprenons les calculs du A.2 :

$$-m\omega^2 = -k + k \exp(iK'a) \exp(-K''a) - k + k \exp(-iK'a) \exp(K''a)$$

La partie imaginaire du membre de droite doit être nulle : $\sin(K'a)(\exp(-K''a) - \exp(K''a)) = 0$.

K'' ne peut être nul, compte tenu de l'hypothèse $\omega > \omega_c$. Il ne reste que 2 possibilités :

a) $K'=0$ qui correspond à l'onde évanescence. Mais en poursuivant le calcul :

$$-m\omega^2 = -k + k \exp(-K'a) - k + k \exp(K'a) = -2k(1 - \cosh Ka) = 4k \sinh^2 \frac{Ka}{2} \text{ ce qui est impossible !}$$

b) La seule possibilité est finalement $K'=\pi/a$, donc $\exp(iK'a)=-1$, ce qui donne :

$$-m\omega^2 = -k - k \exp(K'a) - k - k \exp(-K'a) = -2k(1 + \cosh K'a) = -4k \cosh^2 \frac{Ka}{2}$$

, où δ est une "profondeur de pénétration".

L'expression de x_p est en définitive :

Ceci ressemble à une onde évanescence, mais les points de rang impair vibrent en opposition de phase avec les points de rang pair.

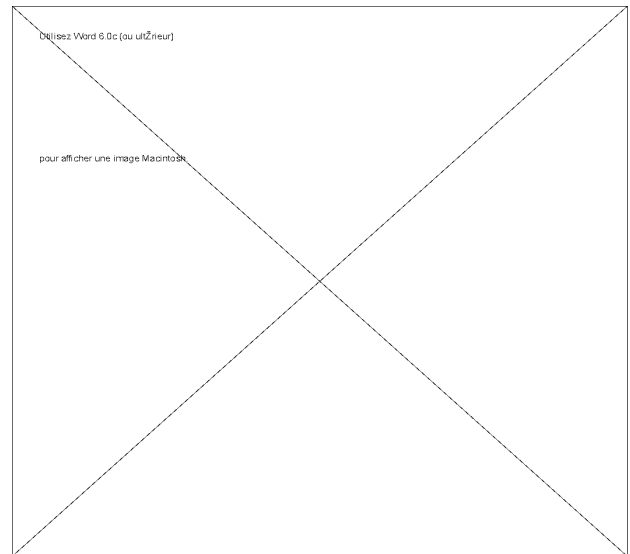
A.6 On dira que K est faible si la longueur d'onde est grande devant a , de telle sorte que les vitesses de phase et de groupe soient pratiquement égales. Le milieu devient non dispersif, on retrouve les ondes acoustiques.

A.7 Ce modèle peut effectivement décrire un réseau cristallin unidimensionnel : les masses sont les ions du réseau, et les ressorts schématisent les forces qui rappellent les ions vers leurs positions d'équilibre.

Les forces mises en jeu à l'échelle microscopique dans un cristal sont :

- Des forces attractives d'origine électrostatique à longue distance (cristal ionique), ou à moyenne distance (liaisons hydrogène par exemple), découlant d'une énergie potentielle négative.

- Des forces répulsives à courte distance, traduisant la non-interpénétrabilité des nuages électroniques, découlant d'une énergie potentielle positive et rapidement décroissante. Si r est la distance entre 2 ions ou molécules consécutifs, il existe donc un minimum d'énergie potentielle pour $r=a$. Si on fait un développement de l'énergie potentielle autour de $r=a$, on trouve un terme du type $\frac{1}{2}k(r-a)^2$, ce qui justifie l'existence d'une force de rappel élastique.



A.8 Les discontinuités de vitesse des ondes sismiques correspondent à des discontinuités de masse volumique et/ou de compressibilité des matériaux constituant le globe terrestre. (la compressibilité est proportionnelle à $1/k$)

On en déduit que la terre a une structure "en couches". On rencontre successivement, en partant de la surface :

- l'écorce et le manteau supérieur.
- le manteau (jusqu'à 3000 km de profondeur environ)
- le noyau externe (jusqu'à 5000 km)
- le noyau interne.

Partie B : étude du sismographe

B.1.1 On se place dans le référentiel du sol, en introduisant la force d'inertie d'entraînement :

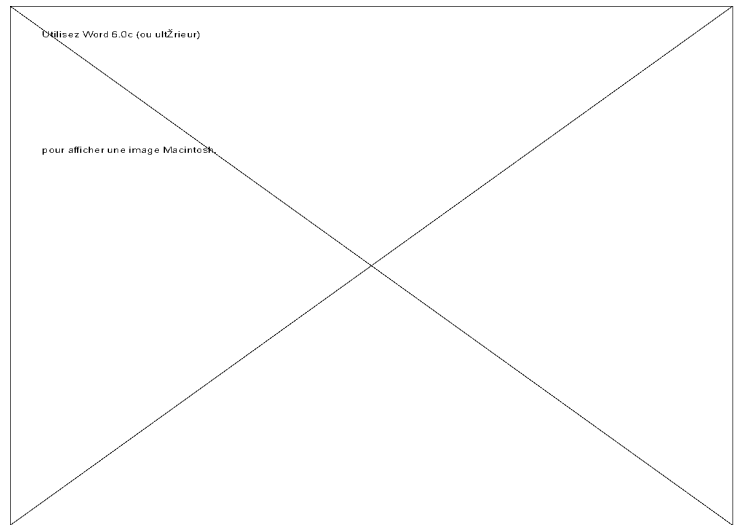
Si l_0 est la longueur au repos du ressort, la loi de Newton s'écrit :

Lorsque tout est immobile $k(l_1 - l_0) - mg = 0$, ce qui donne finalement l'équation différentielle :

B.1.2 On se place en notations complexes : , et on obtient :
d'où l'amplitude des oscillations :

En posant et on obtient l'expression réduite :

En calculant la dérivée, on montre facilement que cette expression passe par un maximum (résonance) pour . La résonance n'existe donc que pour $\alpha < 1$, ce que l'on suppose d'ailleurs dans l'ouvrage.



B.1.3 Pour avoir $A \approx Z_0$, il suffit que la fréquence de résonance soit très petite devant la fréquence des oscillations, c'est-à-dire: . Dans ces conditions, la suspension est si souple que la masse ignore les mouvements du sol et reste pratiquement immobile dans le référentiel galiléen : $z \approx -Z$.

L'allongement Δl du ressort soumis au poids de la masse m doit donc vérifier : , ce qui, pour $\nu = 1$ Hz, donne $\Delta l \gg 25$ cm (par exemple $\Delta l = 2,5$ m). Un sismographe bien encombrant !

B.2 Suspension de La Coste.

B.2.1 Ecrivons qu'il y a l'équilibre le moment en O des forces appliquées au système (tige) ∪ (disque) est nul :

$$\vec{0} = \vec{OA} \wedge (m\vec{g} + k\vec{AP}) = \vec{OA} \wedge (m\vec{g} + k\vec{OP}) \text{ avec } \vec{OA} = (l \cos \alpha, l \sin \alpha) \text{ et } \vec{OP} = (d \sin \alpha, d \cos \alpha)$$

Soit en projection sur Ox : $l \cos \theta (k d \cos \alpha - mg) - k l d \sin \alpha \sin \theta = 0$

a) Si $\alpha = 0$ ou bien $\theta = \pm \pi/2$

ou bien $kd = mg$, auquel cas θ est quelconque : l'équilibre est indifférent.

b) Si $\alpha \neq 0$ alors

B.2.2 $\theta = 0$ est une position d'équilibre si . Dans ces conditions, le théorème du moment cinétique en O donne : .

En linéarisant en θ , on obtient une équation d'oscillateur harmonique de période :

Numériquement, on obtient pour $T = 10$ s un angle $\alpha = 0,47^\circ$.

B.2.3 Si maintenant le disque tourne librement en A, il se comporte exactement comme un point matériel, car les forces qu'il exerce sur la tige ont un moment nul en A. On obtient donc la nouvelle période T_0 en faisant $R=0$ dans l'expression de T :

B.3 Enregistrement des mouvements sismiques.

B.3.1 Le flux coupé par le circuit dans un déplacement dz vaut : $d\Phi_c = N 2\pi a B dz$ (pour une orientation vers le bas de la normale au circuit). Le travail de la force de Laplace est $F_L dz = I d\Phi_c$ d'où $F_L = 2\pi NaIB$. On en déduit l'équation mécanique :

D'autre part la force électromotrice induite vaut : , d'où l'équation électrique :

B.3.2 En régime sinusoïdal, écrivons ces équations en notations complexes :

En éliminant la grandeur électrique I , il vient : . Si $L\omega \ll R$ alors :

On voit qu'au niveau mécanique, on a un phénomène de type frottement fluide avec un coefficient :

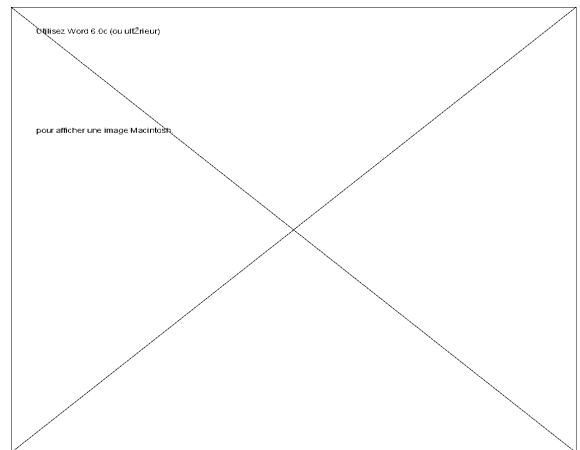
Si ce frottement est assez petit (il suffit que la résistance de charge R_c soit assez grande), et si la condition est respectée, alors $z \approx -Z$ et . La différence de potentiel aux bornes de R_c est alors proportionnelle à la dérivée de Z : on va utiliser un montage intégrateur pour détecter l'amplitude des mouvements du sol.

B.3.3 Le montage proposé est un "ampli. inverseur" auquel on a ajouté un condensateur en dérivation sur R_2 . La fonction de transfert est donc :

Il s'agit d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre, dont la pulsation de coupure $-3dB$ est .

Si $\omega \ll \omega_c$ on a un fonctionnement en ampli. inverseur de gain $-R_2/R_1$.

Si $\omega \gg \omega_c$ on a un fonctionnement en intégrateur (pente $-20dB/décade$).



B.3.4 On a vu précédemment que c'est justement ce que l'on souhaite : on choisit donc . D'autre part, R_1 est la résistance d'entrée de l'intégrateur, et joue le rôle de la résistance de charge R_c . Elle doit être assez grande pour que l'amortissement mécanique ne perturbe pas le fonctionnement : en fait, il faut imposer .

Partie C : Frottement solide

C.1 Question de cours.

C.2.1 Le ressort modélise l'élasticité de la plaque mobile.

C.2.2 La force exercée par le ressort sur M est (en projection sur x) $F = -k(x-l_0-ut)$. Au départ $x=l_0$, la force est nulle et M ne commence à bouger que lorsque cette force atteint f_0Mg c'est à dire à la date $t_0 = f_0Mg/ku$. (On suppose bien entendu que le support n'est pas auparavant venu en contact avec M ce qui se traduit par $ut_0 < l_0$ c'est à dire $f_0Mg < kl_0$). On est alors au point A (Figures C1 et C1 bis). Ensuite, M glisse et l'équation de son mouvement est $M \frac{d^2x}{dt^2} = -fMg - k(x - l_0 - ut)$ tant

qu'il y a glissement vers la droite. On peut introduire la variable $X = x - l_0 - ut$ qui représente l'allongement du ressort et qui vérifie l'équation $M \frac{d^2 X}{dt^2} = -fMg - kX$ dont la solution est de la forme $X = -\frac{fMg}{k} + A \cos(wt + j)$ (avec $w = \sqrt{kM}$ et les conditions initiales (à $t=t_0$) $X = -\frac{f_0 M g}{k}$ et $\frac{dX}{dt} = -u$). X oscille donc autour d'une valeur moyenne $-fMg/k$ (voir la figure C1). Le glissement cesse éventuellement la première fois où dX/dt reprend la valeur $-u$ c'est à dire au point C symétrique de A par rapport à B. Alors (puisque $0 < f < f_0$) la figure permet de montrer que X est compris entre $-\frac{f_0 M g}{k}$ et $-\frac{f M g}{k}$ et donc la force du ressort est insuffisante pour faire reprendre le glissement. M reste donc immobile jusqu'à ce que l'allongement revienne à $-\frac{f_0 M g}{k}$ c'est à dire pendant une durée $2 \frac{(f_0 - f) M g}{k u}$ (partie des figures entre les points C et A'). On est alors (en A') dans le même état qu'à l'instant t_0 (en A) et le glissement reprend ainsi périodiquement.

C.2.3 Si k est infini, le ressort se comporte comme une barre rigide qui pousse M . $x = l_0 + ut$.

Si $f=f_0$, les points C et A' sont confondus et le glissement se réamorçait dès que la vitesse de glissement devient nulle. Le glissement est donc permanent pour $t > t_0$ et on trouve :

$$x = l_0 + \frac{u}{w} [w(t - t_0) - \sin(w(t - t_0))]$$

C'était la différence entre f et f_0 qui était responsable des périodes d'immobilité au C.2.2.

C.3.1 Lorsque les systèmes sont rigides, le soulèvement du système 2 doit se traduire par une barrière (ce qui élimine le cas A) de potentiel dont le sommet est situé en $x = 0$ (ce qui élimine les cas C et D). La forme B convient alors.

Le mouvement du système 2 selon x sera alors analogue à celui d'un point se déplaçant sur l'axe x sous l'action d'une force $F_{pi} = -\frac{dE_{pi}}{dx}$.

Remarque (utile pour la question C.3.3) : cette force a donc la forme D.

C.3.2 $E_{pi}(x, X) = E_{pi}(x + X) + E_{pe}(X) = E_{pi}(x + X) + 1/2 kX^2$

C.3.3 La valeur d'équilibre X_e correspond à un extremum (à x fixé) de $E_{pi}(x, X)$ et correspond donc à une racine de l'équation $\frac{dE_{pi}}{dx}(x + X_e) + \frac{dE_{pe}}{dX}(X_e) = 0$ d'où $-\frac{dE_{pi}}{dx}(X_e - (-x)) = kX_e$. Il suffit donc graphiquement (en portant X_e en abscisse) de trouver l'intersection d'une courbe de la forme D décalée de $-x$ avec la droite de pente k passant par l'origine (voir par exemple la figure C3). On voit donc que si k est grand (figure C2) il n'y a qu'une seule solution quel que soit x alors que si k est petit, il peut y avoir 3 solutions si $|x|$ n'est pas trop grand (figure C3) et une si $|x|$ est assez grand (figure C4). La valeur critique de k est la pente à l'origine de la courbe $F_{pi}(x)$.

L'énergie potentielle totale présente une branche parabolique pour X grand. Donc lorsqu'il y a trois solutions, la position d'équilibre moyenne correspond à un maximum (instable donc) encadré par deux minima (stables donc) (Figure C3 bis). Lorsqu'il n'y a qu'un extremum, c'est un minimum (stable). (Figures C2 bis et C4 bis)

La résolution graphique permet de tracer point par point la courbe $X_e(x)$ (Figures C2 ter et C5) et $u(x) = x + X_e(x)$ (Figures C2 quater et C5 bis).

La figure C5 met en évidence un phénomène d'hystérésis : Si on fait varier x entre des valeurs assez grandes en valeur absolue, $X_e(x)$ dépend du sens de déplacement quand x passe au voisinage de 0.

C.3.4 L'énergie potentielle effective décrivant en fonction de x l'interaction entre les deux systèmes est alors $E_{peff}(x) = E_{pi}(x + X_e(x)) + \frac{1}{2} k(X_e(x))^2$. La force qu'un opérateur doit

exercer pour maintenir le système 2 immobile est donc $\frac{d}{dx}(E_{\text{peff}}(x)) = \left(1 + \frac{dX_e}{dx}\right)\left(\frac{dE_{pi}}{dx}\right)(x + X_e(x)) + kX_e \frac{dX_e}{dx}$. Mais, l'équation du C.3.3 permet de remplacer dE_{pi}/dx par $-kX_e$. On trouve alors que la force de l'opérateur vaut $F_{op} = -kX_e$. Ce résultat très simple peut d'ailleurs se démontrer directement en utilisant les forces et en regardant les conditions d'équilibre de chacune des sous parties du système 2 (en particulier de sa pointe). Les figures C2 ter et C5 représentent donc (à un facteur $-k$ près) cette force et montrent le phénomène d'hystérésis déjà mentionné au C.3.3.

La force est représentée avec le bon signe sur la figure C5 ter.

C.3.5 L'opérateur doit alors fournir un travail $W_{op} = \int -kX_e(x)dx$ qui correspond à l'aire sous la courbe de la figure C5 ter. Ce travail est positif quel que soit le sens de variation de x . En effet quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$ on emprunte le trajet ABCEF et le travail est représenté par l'aire hachurée (les parties AB et EF se compensant). De même, si x décroît, on décrit le trajet FEDBA et le travail (aire entre DE et l'axe Ox) est identique au précédent. De plus ce travail est indépendant de la vitesse de déplacement. On peut alors comprendre qu'en modélisant les surfaces de contact par une multitude de pointes analogues à celle qui vient d'être étudiée, on puisse décrire la dissipation irréversible associée au frottement de glissement entre des solides.

Annexe : Copie d'une feuille de calcul Maple permettant d'engendrer les figures C2 à C5.

Il est possible de transférer en bloc les lignes suivantes dans une feuille de calcul Maple par un simple *copier-coller* entre ce fichier Word et Maple. Elles sont alors directement exécutables.

```
with(plots): opt := xtickmarks=0,ytickmarks=0; opt2 := opt,grid=[75,75]:
Epi := x->1/2/(1+x^2);dEpi:= D(Epi);
Epe := X->k*X^2/2;dEpe := D(Epe);
Ept := X->Epi(x+X)+Epe(X);
```

Figures C2

```
k:=1.2: x:=0.5: plot({-dEpi(x+X),dEpe(X)},X=-3..3,-0.5..0.5,opt); plot(Ept,-3..3,opt,title='Ept(X)
à x fixé');
implicitplot(dEpi(x1+Xe)+dEpe(Xe),x1=-3..3,Xe=-3..3,opt2,title='Xe(x)');
implicitplot(dEpi(u)+dEpe(u-x1),x1=-3..3,u=-3..3,opt2,title='u(x)');
```

Figures C3 et C5

```
k:=0.2: x:=0.5: plot({-dEpi(x+X),dEpe(X)},X=-3..3,-0.5..0.5,opt); plot(Ept,-3..3,opt,title='Ept(X)
à x fixé');
implicitplot(dEpi(x1+Xe)+dEpe(Xe),x1=-3..3,Xe=-3..3,opt2,title='Xe(x)');
implicitplot(dEpi(u)+dEpe(u-x1),x1=-3..3,u=-3..3,opt2,title='u(x)');
implicitplot(dEpi(x1-Xe)+dEpe(-Xe),x1=-3..3,Xe=-3..3,opt2,title='Fop(x)');
```

Figures C4

```
k:=0.2: x:=1.5: plot({-dEpi(x+X),dEpe(X)},X=-3..3,-0.5..0.5,opt); plot(Ept,-3..3,opt,title='Ept(X)
à x fixé');
```