



MATEMÁTICAS II

- Responda en el pliego en blanco a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2,5 puntos.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la anulación de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. En una protectora de animales se dan tres tipos de alimentos a tres razas de perros distintas. Cada perro de la raza 1 consume, por semana, un promedio de 2 unidades del alimento A y 1 unidad del alimento C. Cada perro de la raza 2 consume, por semana, un promedio de 1 unidad del alimento A y 1 unidad del alimento C. El consumo semanal promedio de la raza 3 es de 3 unidades de alimento A, 1 unidad de alimento B y 3 unidades de alimento C. Cada semana se compran 410 unidades del alimento A, 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C. Se supone que toda la comida que se proporciona se consume.

(a) (0,75 puntos) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice este problema y escríbelo matricialmente.

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de perros	nº de unidades de A	nº de unidades de B	nº de unidades de C
raza 1	x	2x	0x	1x
raza 2	y	1y	0y	1y
raza 3	z	3z	1z	3z
total	x + y	2x + y + 3z	z	x + y + 3z

Según el enunciado, $\begin{cases} 2x + y + 3z = 410 \\ z = 30 \end{cases}$ $x + y + 3z = 310$, que en forma matricial es $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 410 \\ 310 \end{pmatrix}$

(b) (1 punto) ¿Cuántos ejemplares de cada raza puede coexistir en la protectora?

Resolución

Resolviendo el sistema, como $z = 30$,

$$\begin{cases} 2x + y + 3 \cdot 30 = 410 \\ x + y + 3 \cdot 30 = 310 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 320 \\ x + y = 220 \end{cases}$$

Restando las ecuaciones, $x = 100$; $y = 220 - x = 220 - 100 = 120$

De la raza 1 hay 100 perros, 120 de la raza 2 y hay 30 perros de la raza 3

(c) (0,75 puntos) Si la raza 2 consumiese 1 unidad del alimento B, ¿existiría otra distribución del número de ejemplares de cada raza que permitiese mantener las unidades compradas cada semana?

Resolución

En este caso, cambia la 2ª ecuación $z = 30$ por $y + z = 30$ y queda el sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 410 \\ y + z = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z = 410 \\ x + y + 3z = 310 \end{cases}$$

$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 410 & 0 & 1 & 1 & 30 & 1 & 1 & 3 & 310 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_3 - f_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 210 & 0 & 1 & 1 & 30 & 1 & 1 & 3 & 310 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 - f_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 180 & 0 & 1 & 1 & 30 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
que corresponde

al sistema $\begin{cases} 2z = 180 \\ y + z = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 90 \\ y = 30 - 90 = -60 \end{cases}$ (imposible por ser negativo)

La respuesta a la pregunta es NO

Pregunta 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -2 & -3 & 0 & 1 & 2 & x \end{pmatrix}$

(a) (1,5 puntos) Da el $\text{rg}(A)$ según los valores de x . Para $x = 1$, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

Resolución

$$\det A = 3x + 8 - 6 - 4x = 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

- Si $x \neq 2$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3$

- Si $x = 2$, $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -2 & -3 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$ y como el menor $|-3 \ 0 \ 2 \ 2| = -6 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$

Para $x = 1$, sabemos que A es invertible, $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -2 & -3 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\det A = 2 - 1 = 1 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & -6 & 4 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) (1 punto) Toma $x = 1$. Supongamos que B es una matriz 3×3 con $\det(B) = 5$. Calcula $\det(AB)$.

Razona cuál debe ser el valor de $\det \left(\frac{1}{5} AB \right)$

Resolución

Para $x = 1$, sabemos que $\det A = 1$. Luego, $\det(AB) = \det A \det B = 1 \cdot 5 = 5$

Por otra parte, como AB es de orden 3×3 , entonces

$$\det \det \left(\frac{1}{5} AB \right) = \left(\frac{1}{5} \right)^3 \det \det (AB) = \left(\frac{1}{5} \right)^3 5 = \frac{1}{25}$$

Pregunta 3. Se considera la función $f(x) = \frac{x-4}{1-x}$

(a) (1 punto) Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

Resolución

Como el denominador se anula para $x = 1$, entonces $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

$$f(x) = \frac{1-4}{1-1} = \frac{-3}{0} = \pm\infty \Rightarrow f \text{ tiene una asíntota vertical en } x = 1 \text{ de ecuación A.V. : } x = 1$$

$$\text{Además, } f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$f(x) = \frac{x-4}{1-x} = \frac{x}{-x} = -1 \Rightarrow f \text{ tiene asíntota horizontal en } \pm\infty, \text{ que es la recta de}$$

ecuación $y = -1$

$$y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} = \frac{x-4}{1-x} - (-1) = \frac{-3}{1-x}$$

Si $x \rightarrow +\infty$, $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} > 0 \Rightarrow$ la gráfica está “por encima” de la asíntota en $+\infty$

Si $x \rightarrow -\infty$, $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} < 0 \Rightarrow$ la gráfica está “por debajo” de la asíntota en $-\infty$

(b) (1 punto) Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Resolución

$f(x) = \frac{x-4}{1-x}$; $f'(x) = \frac{1(1-x) - (x-4)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-3}{(1-x)^2} < 0 \Rightarrow f$ es decreciente. No hay máximos ni mínimos

$$f''(x) = [-3(1-x)^{-2}]' = 6(1-x)^{-3}(-1) = \frac{-6}{(1-x)^3} \neq 0.$$

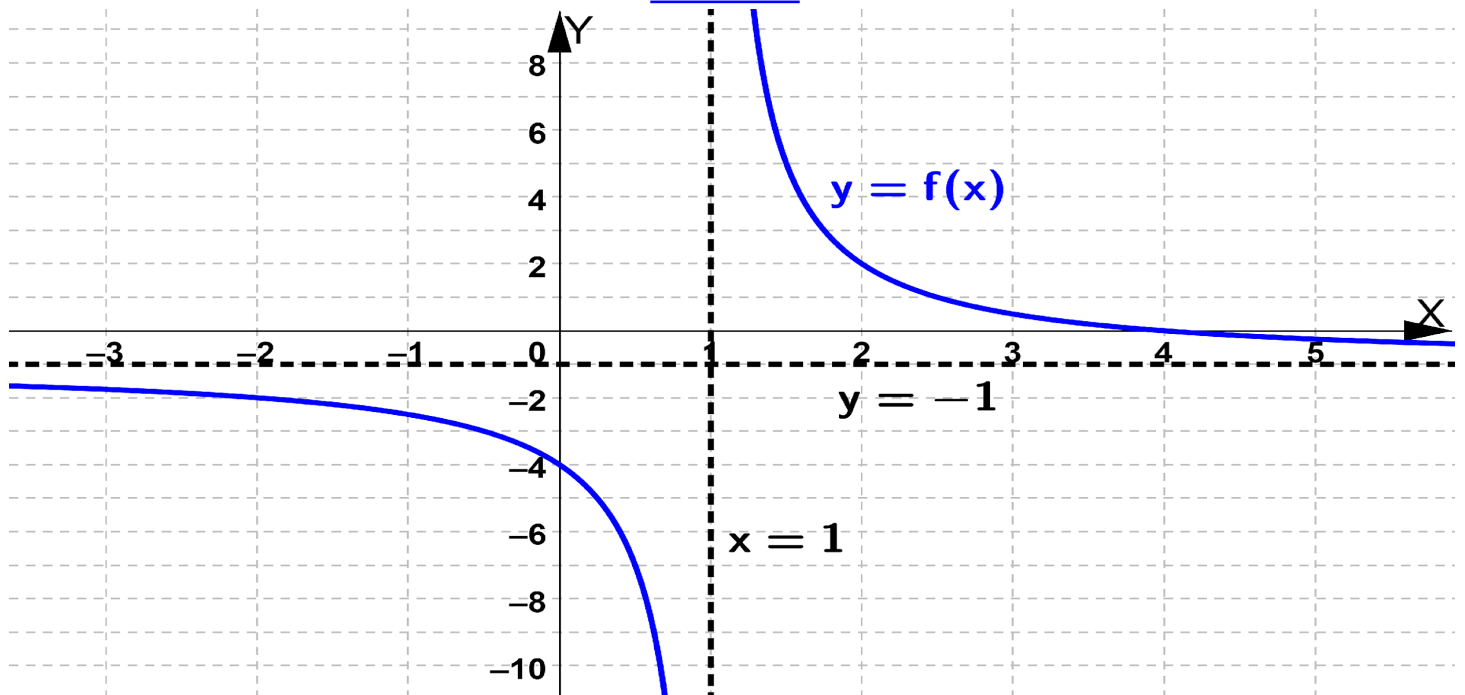
Hagamos una tabla de signos de $f''(x)$

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	-	$\nexists$	+
$f(x)$	convexa	$\nexists$	cóncava

No hay puntos de inflexión

(c) (0,5 puntos) Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f .

Resolución



Pregunta 4. Dada la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

(a) (1,25 puntos) Calcula una primitiva que pase por el punto (0, 1).

(b) (1,25 puntos) Calcula el área limitada por f , el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$

Resolución

(a) Las primitivas de f son $F(x) = \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{-2} + k = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2} + k$. Como la primitiva pasa por (0, 1),

entonces $1 = F(0) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2 \cdot 0\right)}{2} + k = 0 + k = k \Rightarrow k = 1$. La primitiva es $F(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2} + 1$

(b) $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ó $\frac{\pi}{2} - 2x = \pi \rightarrow x = \frac{-\pi}{4}$ (no válido)

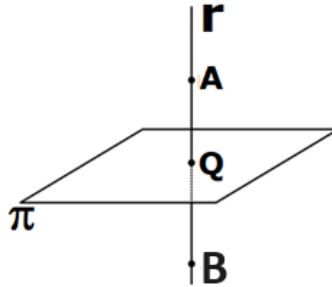
El área que se pide es $A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \right|$; $p(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2}$ es primitiva. Por Barrow,

$$A = \left| p\left(\frac{\pi}{4}\right) - p(0) \right| + \left| p\left(\frac{\pi}{2}\right) - p\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{4}\right)}{2} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\cdot 0\right)}{2} \right| + \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{4}\right)}{2} \right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Pregunta 5. Dado el punto $A(0, -1, 1)$ y el plano $\pi: x + y + z + 3 = 0$.

(a) (1,5 puntos) Calcula el punto B simétrico de A respecto de π .

Resolución



– Hallamos la recta r que pasa por $A(0, -1, 1)$ y es ortogonal a π :

Un vector director de r es el vector normal del plano, $\vec{d} = \vec{n} = (1, 1, 1)$. Luego,

$$r: \begin{cases} x = k \\ y = -1 + k \\ z = 1 + k \end{cases}$$

– Hallamos el punto de corte, Q, entre el plano π y la recta resolviendo el sistema de ecuaciones:

Sustituyendo en la ecuación del plano se tiene $k - 1 + k + 3 = 0 \Rightarrow 2k = -2$; $k = -1$

Luego, $\{x = -1, y = -1 - 1, z = 1 - 1\}$. El punto de corte es $Q(-1, -2, 0)$

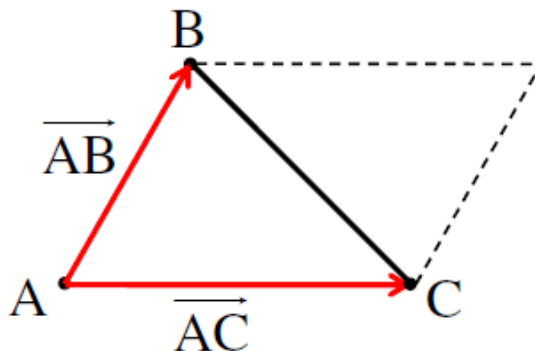
– Por último, hallamos el simétrico $B(a, b, c)$ de $A(0, -1, 1)$ usando que Q es el punto medio del segmento AB:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{a+0}{2} &= -1, & \Rightarrow a &= -2 \\ \frac{b-1}{2} &= -2, & b-1 &= -4 \Rightarrow b = -3 \\ \frac{c+1}{2} &= 0, & c+1 &= 0 \Rightarrow c = -1 \end{aligned} \right.$$

El punto simétrico que se pide es $B(-2, -3, -1)$

(b) (1 punto) Calcula el área del triángulo plano cuyos vértices son A, $C(-2, -3, 1)$ y el origen de coordenadas.

Resolución



$A(0, -1, 1)$, $C(-2, -3, 1)$ y el origen de coordenadas $B(0, 0, 0)$. Sabemos que el área del triángulo ABC es la mitad del área del paralelogramo generado por los vectores $\vec{AB} = (0, 1, -1)$ y

$$\vec{AC} = (-2, -2, 0).$$

$$A(\text{triángulo}) = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| \quad ; \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, -2, 2)$$

$$A(\text{triángulo}) = \frac{1}{2} 2|(-1, -1, 1)| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3} \cong 1,73 u^2$$

Pregunta 6. Se consideran los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1, 0, 2)$, $C(-1, 1, 3)$ y $D(-1, 0, 1)$.

(a) (0,75 puntos) Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.

Resolución

Como $\det \begin{pmatrix} \vec{AB} & \vec{AC} & \vec{AD} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4 \neq 0$, entonces A, B, C y D no son coplanarios y, por tanto, no existe ningún plano que los contenga.

(b) (0,75 puntos) Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C.

Resolución

Los vectores $\vec{AB} = (0, -1, 1)$ y $\vec{AC} = (-2, 0, 2)$ son vectores directores de π .

Luego, un vector normal de π es

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2, -2, -2) // (1, 1, 1)$$

Como π pasa por $A(1, 1, 1)$, entonces $\pi: 1(x-1) + 1(y-1) + 1(z-1) = 0$; $\pi: x + y + z - 3 = 0$

Como r pasa por $D(-1, 0, 1)$ y es perpendicular a $\pi \Rightarrow \vec{d}_r = \vec{n} = (1, 1, 1)$,

$$r: \begin{cases} x = -1 + k \\ y = k \\ z = 1 + k \end{cases}$$

(c) (1 punto) Calcula el punto P intersección de $r: x + 1 = -y = z - 1$ y $\pi: x - y - z = 1$.

Resolución

Hallamos el punto de intersección, P, entre la recta, en forma paramétrica,

$r: \begin{cases} x = -1 + k \\ y = -k \\ z = 1 + k \end{cases}$ y el plano π resolviendo el sistema de ecuaciones: Sustituyendo en la ecuación del plano se tiene

$-1 + k - (-k) - (1 + k) = 1 \Rightarrow k = 3$; $k = 3$. Luego, $r: \begin{cases} x = -1 + 3 \\ y = -3 \\ z = 1 + 3 \end{cases}$. El punto de corte es $P(2, -3, 4)$

Pregunta 7. En una empresa 55% de los trabajadores han hecho el curso 'ChatGPT'. El 30% de los trabajadores que han hecho este curso también han hecho el curso 'IA', el 40% de los que no han hecho el curso 'ChatGPT' han realizado el curso 'IA'.

(a) (1,25 puntos) Tomado un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya realizado el curso 'IA'?

(b) (1,25 puntos) Si un trabajador elegido al azar no ha hecho el curso 'IA', ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga el curso de 'ChatGPT'?

Resolución

A = hacer el curso 'ChatGPT' B = hacer el curso 'IA'. Según el enunciado,

$$p(A) = 55\% = 0,55 \text{ [en consecuencia, } p(A^c) = 1 - p(A) = 1 - 0,55 = 0,45]$$

$$p(B/A) = 30\% = 0,3 \text{ [en consecuencia, } p(B^c/A) = 1 - p(B/A) = 1 - 0,3 = 0,7] \text{ y } p(B/A^c) = 40\% = 0,4$$

a) Piden $p(B)$, que por el teorema de probabilidad total es

$$p(B) = p(A) p(B/A) + p(A^c) p(B/A^c) = 0,55 \cdot 0,3 + 0,45 \cdot 0,4 = 0,345 = 34,5\%$$

$$b) \text{ Se pide } p\left[\frac{A}{B^c}\right] = \frac{p(A \cap B^c)}{p(B^c)} = \frac{p(A)p(B^c/A)}{1 - p(B)} = \frac{0,55 \cdot 0,7}{1 - 0,345} \cong 0,5878 = 58,78\%$$

Pregunta 8. Una empresa cafetera realiza una encuesta a 10000 individuos sobre el tipo de café que compran. Los resultados son: 8000 dicen comprar café torrefacto, 4000 café natural y 3000 ambos tipos de café

(a) (0,5 puntos) Si se elige un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que compre alguno de los dos tipos de café?

Resolución

T = comprar café torrefacto N = comprar café natural. Según el enunciado,

$$p(T) = \frac{8000}{10000} = 0,8 \quad p(N) = \frac{4000}{10000} = 0,4 \quad p(T \cap N) = \frac{3000}{10000} = 0,3$$

Se pide $p(T \cup N) = p(T) + p(N) - p(T \cap N) = 0,8 + 0,4 - 0,3 = 0,9 = 90\%$

(b) (1 punto) Se selecciona un individuo y se le pregunta si compra café natural. Se repite la operación 100 veces, pudiendo repetirse el individuo seleccionado. Calcule aproximando por una distribución normal si fuese posible, la probabilidad de que no más de 50 individuos compre café natural.

Resolución

Si X = número de individuos que compra café natural en un grupo de 100, entonces $X \rightarrow B(100 ; 0,4)$.

Se puede hacer aplicando la aproximación de la binomial por la normal y la corrección por continuidad de Yates: "Si una v.a. X sigue una binomial $B(n, p)$ que cumple: $n \geq 30$, $np \geq 5$ y $n(1-p) \geq 5$, entonces, la v.a. X se puede sustituir por otra v.a. $X' \rightarrow N(\mu, \sigma)$, siendo μ la media de X, $\mu = np$

y σ la desviación típica, $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. Es decir, $X' \rightarrow N(np, \sqrt{np(1-p)})$ "

Aquí, $n = 100 \geq 30$, $p = 0,4$; $np = 40 \geq 5$ y $n(1-p) = 100 \cdot 0,6 = 60 \geq 5$; $X \rightarrow B(100 ; 0,4)$

$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{24} \cong 4,9$; $X' \rightarrow N(40 ; 4,9)$. Tipificando, $Z = \frac{X' - 40}{4,9} \rightarrow N(0, 1)$.

Piden $p(X \leq 50)$. Como los valores de X menores o iguales que 50, son ..., 48, 49, 50 tomamos un intervalo de la recta que contenga exactamente esos números. Por ejemplo, tomamos $(-\infty; 50,5)$.

Entonces, $p(X \leq 50) = p(X' \leq 50,5) = p\left(\frac{X' - 40}{4,9} \leq \frac{50,5 - 40}{4,9}\right) \cong p(Z < 2,14) = 0,9838 = 98,38\%$

(c) (1 punto) Si en el apartado anterior solo se seleccionasen 10 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que 5 compren café natural?

* Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0,5$, $F(0,15) = 0,5596$, $F(2,0412) = 0,9793$, $F(0,9793) = 0,8340$, $F(0,5596) = 0,7112$, $F(0,6294) = 0,7356$, $F(0,8159) = 0,7939$, $F(0,9) = 0,8159$, $F(1,28) = 0,9$.

Resolución

Si Y = número de individuos que compra café natural en un grupo de 10, entonces $Y \rightarrow B(10 ; 0,4)$.

La ley de probabilidad es $p_k = p(Y = k) = \binom{10}{k} 0,4^k 0,6^{10-k}$, con $k = 0, 1, 2, 3, \dots, 8, 9, 10$.

La probabilidad que se pide es $p(Y = 5) = \binom{10}{5} 0,4^5 0,6^{10-5} = 252 \cdot 0,4^5 \cdot 0,6^5 \cong 0,2007 = 20,07\%$