Niveau Terminale Spécialité

Programme du bac blanc du ven 24 janvier 2025

- Fonctions
    - Dérivée, variations, tableaux de signes
    - Dérivée seconde, convexité
    - Fonctions de référence
    - Fonction exponentielle
    - Fonction logarithme népérien
- Suites
    - Raisonnement par récurrence
    - Suites arithmétiques, géométriques
    - Limites
    - Variations
- Equations différentielles
    - Équations y'=ay ; y'=ay+b ; y'=ay+f
    - Calcul de primitives
- Vecteurs, droites, plans de l'espace
    - Combinaisons linéaires
    - Parallélismes, alignement
    - Coordonnées

Exercice 1 :

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1000$.

1. Calculer u_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.
3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par suite(10).

```
def suite( n) :
    u = 1 000
    for i in range(n) :
        u = 0,9*u + 250
    return u
```

4. **a.** Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2500$.
   b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   c. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2500$ pour tout entier naturel n.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = -1500$.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que :
   $$u_n = -1500 \times 0,9^n + 2500.$$
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.

Corrigé exercice 1 :

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1000$.

1. On a donc $u_1 = 1000 \times \left(1 - \dfrac{10}{100}\right) + 250 = 1000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = 1150$.
2. Enlever 10 % c'est multiplier par $1 - \dfrac{10}{100} = 1 - 0,10 = 0,90$.
   Le nombre d'abonnés de l'année précédente est donc multiplié par 0,9 ; on ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 250.$$

3. $u(10)$ donne le nombre d'abonnés au bout de 10 ans ; une calculatrice donne ≈ 1977.
4. **a.** *Initialisation* : on a $u_0 = 1000 \leqslant 2500$: la relation est vraie au rang 0 ;
   Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leqslant 2500$.

   La multiplication par $0,9 > 0$ respectant l'ordre, on a donc $0,9u_n \leqslant 0,9 \times 2500$ ou $0,9u_n \leqslant 2250$, puis en ajoutant 250 à chaque membre :
   $0,9u_n + 250 \leqslant 2250 + 250$, soit $u_{n+1} \leqslant 2500$: la relation est encore vraie au rang $n+1$.
   La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2500$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$.
   Or d'après la question précédente : $u_n \leqslant 2500$, puis $0,1u_n \leqslant 0,1 \times 2500$ ou encore $0,1u_n \leqslant 250$, soit en prenant les opposés : $-250 \leqslant -0,1u_n$ et en ajoutant à chaque membre 250 : $0 \leqslant -0,1u_n + 250$.
   On a donc pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ou $u_{n+1} \geqslant u_n$: la suite (u_n) est croissante.

   c. La suite (u_n) est croissante (d'après 4. b.) et majorée par 2 500 (d'après 4. a.) : elle converge donc vers une limite inférieure ou égale à 2 500.
5. **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 2500 = 0,9u_n + 250 - 2500$, soit
   $v_{n+1} = 0,9u_n - 2250 = 0,9(u_n - 2500) = 0,9v_n$.
   L'égalité vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,9v_n$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = u_0 - 2500 = 1000 - 2500 = -1500$.

   b. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,9^n = -1500 \times 0,9^n$.
   Or $v_n = u_n - 2500 \iff u_n = v_n + 2500 = 2500 - 1500 \times 0,9^n$.

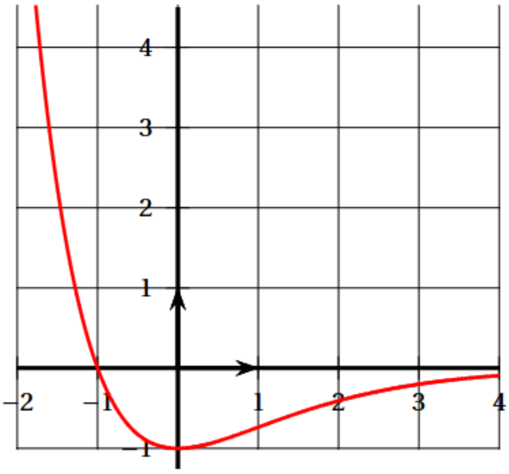
   c. Comme $0 < 0,9 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$ et par suite par produit de limites $\lim\limits_{n \to +\infty} -1500 \times 0,9^n = 0$ et finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2500$.

Exercice 2 :

Partie 1

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\,e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x,

$$f(x) = \frac{x}{e^x} + 2\,e^{-x}.$$

   En déduire la limite de f en $+\infty$.
   Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.
   On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)\,e^{-x}$.
   b. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f.
   Que représente pour la courbe $\mathscr{C}$ son point A d'abscisse 0 ?

Ne pas traiter la question concernant les limites de la fonction corrigé exercice 2 :

Partie 1

1. D'après la courbe représentant la fonction dérivée f' :
   - la fonction f' est positive sur $]-\infty\,;\,1[$ donc la fonction f est croissante sur cet intervalle ;
   - la fonction f' est négative sur $]1\,;\,+\infty[$ donc la fonction f est décroissante sur cet intervalle.
2. D'après la courbe représentant la fonction dérivée f' :
   - la fonction f' est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle ;
   - la fonction f' est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Pour tout nombre réel x, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + 2\mathrm{e}^{-x}$.

   D'après le cours : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.
   De plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, comme asymptote horizontale en $+\infty$.
   On admet que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+2) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = (1-x-2)\mathrm{e}^{-x} = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x-1$; donc $f'(x)$ s'annule et change de signe en $x = -1$.
   $f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$; on établit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-x-1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

3. $f''(x) = (-1) \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-1) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = (-1+x+1)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}$
   $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout x, donc $f''(x)$ est du signe de x.
   - Sur $]-\infty\,;\,0[$, $f''(x) < 0$ donc la fonction f est concave.
   - Sur $]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe.
   - En $x = 0$, la dérivée seconde s'annule et change de signe donc le point A d'abscisse 0 de $\mathscr{C}$ est le point d'inflexion de cette courbe.

Exercice 3 :

Étude de fonction avec ln

f est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{x}\ln x$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. (a) Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x - 1 + \ln x$.
   (b) Vérifier que $g(1) = 0$. En déduire, selon les valeurs de x, le signe de $g(x)$.
2. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   (b) En déduire les variations de f.
   (c) Étudier la limite de f en 0, puis en $+\infty$.
   (d) Dresser le tableau de variations de f.

Ne pas traiter la question 2.c)
corrigé vidéo

Exercice 4 :

Équation différentielle ♦ $y' = ay + f$

On considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) : y' + y = e^{-x}$$

a. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^{-x}$. Vérifier que la fonction h est une solution de l'équation différentielle (E).
b. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.
c. En déduire l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

corrigé vidéo

Exercice 5 :

On considère un cube $\mathrm{ABCDEFGH}$ et on définit les points R, S et T par les relations suivantes :
$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{GS}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{GF}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{RT}} = 2\overrightarrow{\mathrm{BS}}$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{AT}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{8}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$.

2. Démontrer que les plans (ART) et (BCG) sont parallèles.

Corrigé exercice 5 :

1. $\vec{AT} = \vec{AR} + \vec{RT} = \frac{2}{3}\vec{AE} + 2\vec{BS} = \frac{2}{3}\vec{AE} + 2\vec{BF} + 2\vec{FS} = \frac{2}{3}\vec{AE} + 2\vec{AE} + \vec{FG} = \frac{8}{3}\vec{AE} + \vec{AD}$
2. Comme $\vec{AE} = \vec{BF}$ et $\vec{AD} = \vec{BC}$ alors $\vec{AT} = \frac{8}{3}\vec{BF} + \vec{BC}$

   ainsi $\vec{AT}$ est coplanaire avec $\vec{BF}$et $\vec{BC}$
   De même, $\vec{AR} = \frac{2}{3}\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{BF}$, donc $\vec{AR}$ est coplanaire avec $\vec{BF}$et $\vec{BC}$

   les vecteurs $\vec{AT}$et $\vec{AR}$ne sont pas colinéaires et sont deux vecteurs directeurs de (ART)

   les vecteurs $\vec{BF}$et $\vec{BC}$ne sont pas colinéaires et sont deux vecteurs directeurs de (BCG)

   (comme le point F est dans le plan (BCG) alors $\vec{BF}$est un vecteur directeur de ce plan).
   Comme deux vecteurs directeurs de (ART) sont coplanaires avec deux vecteurs directeurs de (BCG) alors les deux plans sont parallèles.
   Comme R ∈ (AE) qui est parallèle au plan (BCG) alors R n'appartient pas à (BCG) donc les deux plans sont strictement parallèles.

Exercice 6 :

On considère les points $\mathrm{A}(1\,;1\,;2)$ et $\mathrm{B}(-1\,;3\,;4)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

2. Soit M le point du plan défini par $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = 2\vec{u} + 4\vec{v}$.
Les points A, B et M sont-ils alignés ? Justifer.

Corrigé exercice 6 :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-1\\3-1\\4-2\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$. Il faut déterminer les réels λ et μ simultanément non nuls tels que $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

$\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda - 2\mu = -2\\ \lambda = 2\\ \mu = 2\end{cases}$. Sur la première ligne, on a bien $2 - 2 \times 2 = -2$ donc le système est compatible.

Ainsi, $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u} + 2\vec{v}$ et ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

$\overrightarrow{AM} = 2\vec{u} + 4\vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2\times 1 + 4\times(-2)\\ 2\times 1 + 4\times 0\\ 2\times 0 + 4\times 1\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}-6\\2\\4\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ ne sont pas colinéaires. Les points A, B et M ne sont pas alignés.