La presente es una recopilación de información de varios autores.

MODELOS DE TOMA DE DECISIONES

La teoría de decisiones proporciona una manera útil de clasificar modelos para la toma de decisiones. Se supondrá que se ha definido el problema, que se tienen todos los datos y que se han identificado los cursos de acción alternativos. La tarea es entonces seleccionar la mejor alternativa. La teoría de decisiones dice que esta tarea de hacer una selección caerá en una de las cuatro categorías generales dependiendo de la habilidad personal para predecir las consecuencias de cada alternativa.

En los procesos de decisión bajo incertidumbre, el decisor conoce cuáles son los posibles estados de la naturaleza, aunque no dispone de información alguna sobre cuál de ellos ocurrirá. No sólo es incapaz de predecir el estado real que se presentará, sino que además no puede cuantificar de ninguna forma esta incertidumbre. En particular, esto excluye el conocimiento de información de tipo probabilístico sobre las posibilidades de ocurrencia de cada estado.

Elección del criterio de decisión en condiciones de incertidumbre

Situación en la que podemos descubrir los estados posibles de la naturaleza pero desconocemos la probabilidad de ocurrencia de cada uno de ellos. Los criterios de decisión más empleados en estos casos son un reflejo de la actitud hacia el riesgo que tienen los responsables en la toma de decisiones. El criterio de decisión se toma basándose en la experiencia de quien toma la decisión, este incluye un punto de vista optimista o pesimista, agresivo o conservador.

Los criterios aplicados son: Maximin o de Wald, Minimax o Savage, Maximax, Principio de razonamiento insuficiente o criterio de Laplace, Criterio de Hurwics

CRITERIO DE LAPLACE

Este criterio, propuesto por Laplace en 1825, está basado en el principio de razón insuficiente: como a priori no existe ninguna razón para suponer que un estado se puede presentar antes que los demás, podemos considerar que todos los estados tienen la misma probabilidad de ocurrencia, es decir, la ausencia de

conocimiento sobre el estado de la naturaleza equivale a afirmar que todos los estados son equiprobables. Así, para un problema de decisión con n posibles estados de la naturaleza, asignaríamos probabilidad 1/n a cada uno de ellos.
Este procedimiento propone que se sumen las consecuencias posibles de cada acción y se divida entre el número de sucesos posibles. La acción con mayor valor con base en la hipótesis de igualdad de probabilidad sería la más deseable. Si no se sabe mucho acerca de la probabilidad de los sucesos posibles, algunas personas dirían entonces que se debe suponer que cada suceso tiene la misma probabilidad. Sin embargo, es muy raro el caso en el que no se tenga alguna idea acerca de la probabilidad de los sucesos. Estas probabilidades, que pueden o no estar basadas en pruebas objetivas, deben usarse en el análisis si se desea que la acción sea consistente con nuestro juicio. Si se considera que un suceso es más probable que otro, al suponer automáticamente que todos los sucesos tienen la misma probabilidad no se asegura tal consistencia. Pero es adecuado asignar la misma probabilidad a cada estado de la naturaleza cuando se desconoce su ocurrencia, a fin de considerar que dichos estados de la naturaleza pueden ocurrir.
La regla de Laplace selecciona como alternativa óptima aquella que proporciona un mayor resultado esperado:

CRÍTICA

La objeción que se suele hacer al criterio de Laplace es la siguiente: ante una misma realidad, pueden tenerse distintas probabilidades, según los casos que se consideren. Por ejemplo, una partícula puede moverse o no moverse, por lo que la probabilidad de no moverse es 1/2. En cambio, también puede considerarse de la siguiente forma: una partícula puede moverse a la derecha, moverse a la izquierda o no moverse, por lo que la probabilidad de no moverse es 1/3.

Desde un punto de vista práctico, la dificultad de aplicación de este criterio reside en la necesidad de elaboración de una lista exhaustiva y mutuamente excluyente de todos los posibles estados de la naturaleza.

Por otra parte, al ser un criterio basado en el concepto de valor esperado, su funcionamiento debe ser correcto tras sucesivas repeticiones del proceso de toma de decisiones. Sin embargo, en aquellos casos en que la elección sólo va a realizarse una vez, puede conducir a decisiones poco acertadas si la distribución de resultados presenta una gran dispersión.

CRITERIO MINIMAX

El criterio minimax sugiere que se seleccione la acción con menor perdía máxima posible, de otro modo, la que presente los mayores beneficios mínimos posibles. En otras palabras, hay que asegurar que se ganen por lo menos R pesos y buscar la acción que brinde R mayor (la menor perdida, si se analizan las perdidas).

El criterio minimax tiende a llevar a la decisión de no hacer nada, a menos que no haya probabilidad de perdida. Es un criterio muy conservador. La persona que use el criterio minimax se vería, al final de cuentas, ante la amenaza de morirse de hambre (al no hacer nada) y estaría obligado a actuar. En términos de las actividades empresariales, la corporación se estancaría y seria superada por la competencia dispuesta a innovar y a tomar riesgos razonables de sufrir pérdidas.

En otras situaciones se puede llegar a una decisión totalmente irracional al usar el criterio minimax. Por ejemplo suponga que la siguiente tabla nos muestra los costos condicionales de dos acciones:

Acción

Estado de la naturaleza: Comprar seguro No comprar seguro q1 $1000 $1001 q2 1000 10

La mejor acción es “comprar el seguro”, de acuerdo con el criterio minimax, ya que el costo máximo es de 1000 pesos (el costo máximo de la acción “no comprar (el seguro) es 1001 pesos). Sin embargo, si los dos estados tuvieran la misma probabilidad, o si el estado q2 es más probable que q1, entonces la mayoría de las personas opinarían que la acción deseable es “no comprar”. Minimax no es una estrategia deseable en un juego contra la naturaleza, pero si es útil frente a adversarios que piensan.

- **Enfoque de arrepentimiento Minimax.**

El enfoque de arrepentimiento para la toma de decisiones no es puramente optimista ni puramente conservador. Se ilustra el enfoque de arrepentimiento mostrando cómo puede emplearse para seleccionar una alternativa en el siguiente ejemplo.

Suponga que la constructora Mar de Cortés construye un complejo de condominios pequeño (d1) y la demanda resulta ser fuerte (s1).

Estado de la naturaleza
Alternativas de decisión. Demanda fuerte s1 Demanda débil s2
Complejo pequeño, d1 8 7 Complejo mediano, d2 14 5 Complejo grande, d3 20 −9

Lo anterior nos muestra que la ganancia resultante para la constructora sería de $8 millones. Sin embrago, dado que ha ocurrido el estado de la naturaleza de demanda fuerte (s1), nos damos cuenta que la decisión de construir un complejo de condominios grande (d3), que produce una ganancia de $20 millones, habría sido la mejor decisión. La diferencia entre el resultado por la mejor alternativa de decisión ($20 millones) y el pago por la decisión de construir un complejo de condominios pequeño ($8 millones) es la perdida de oportunidad, o arrepentimiento, asociado con la alternativa de decisión d1 cuando ocurre el estado de la naturaleza s1; por tanto, para este caso, la perdida de oportunidad o arrepentimiento es de $20 millones - $8 millones ═ $12 millones. Del mismo modo, so Mar de Cortes toma la decisión de construir un complejo de condominios medianos (d2) y ocurre el estado de la naturaleza de una demanda fuerte (s1) la perdida de oportunidad, o arrepentimiento, asociada con d2 seria $20 millones - $14 millones = $6 millones.

El siguiente paso al aplicar el enfoque de arrepentimiento es enlistar el arrepentimiento máximo para cada alternativa de decisión.

Enfoques optimista y pesimista.

En esta sección consideramos los enfoques de la toma de decisiones que no requieren un conocimiento de las probabilidades de los estados de la naturaleza. Estos enfoques son apropiados en situaciones en las que el tomador de decisiones tiene poca confianza en su capacidad para evaluar las probabilidades, o en las que es deseable un análisis simple del mejor y el peor caso. Debido a que en ocasiones enfoques diferentes conducen a diferentes recomendaciones, el tomador de decisiones necesita entender los enfoques disponibles y luego seleccionar el enfoque específico que, de acuerdo con su juicio, sea el más apropiado.

Enfoque optimista.

El enfoque optimista evalúa cada alternativa de decisión en función del mejor resultado que pueda ocurrir. La alternativa que se recomienda es la que da el mejor resultado posible. Para un problema en el que se desea la mayor ganancia, el enfoque optimista conduciría al tomador de decisiones a elegir la alternativa correspondiente a la mayor ganancia. Para problemas que implican minimización, este enfoque conduce a elegir la alternativa con el resultado más pequeño. Mediante el criterio Hurwiz asignaríamos mayor probabilidad a la cantidad mayor de cada uno de los cursos de acción y menor probabilidad a la cantidad menor.

Enfoque pesimista.

El enfoque pesimista evalúa cada alternativa de decisión desde el punto de vista del peor resultado que pueda ocurrir. La alternativa de decisión recomendada es la que proporciona el mejor de los peores resultados posibles. Para un problema en el que la medida de salida es la ganancia, este enfoque conduciría al tomador de decisiones a elegir la alternativa que maximiza la ganancia mínima posible que podría obtenerse. Para problemas que implican minimización, este enfoque identifica la alternativa que minimizara el resultado máximo.

CRITERIO DE HURWICZ

Se trata de un **criterio intermedio** entre el criterio de **Wald** y el criterio **maximax.** Dado que muy pocas personas son tan extremadamente pesimistas u optimistas como sugieren dichos criterios, Hurwicz (1951) considera que el decisor debe ordenar las alternativas de acuerdo con una **media ponderada de los niveles de seguridad y optimismo**:

$$\alpha s_i + (1-\alpha) o_i \qquad 0 \le \alpha \le 1$$

donde α es un valor específico elegido por el decisor y aplicable a cualquier problema de decisión abordado por él, por lo que **$T(a_i)$ = αs_i + (1-✓ ● o_i**. Así, la **regla de decisión de Hurwicz** resulta ser:

$$\boxed{\text{Elegir la alternativa } a_k \text{ tal que } T(a_k) = \alpha s_k + (1-\alpha) o_k = \max_{1 \le i \le m} \{\alpha s_i + (1-\alpha) o_i\}}$$

	Los **valores de** α **próximos a 0** corresponden a una **pensamiento optimista**, obteniéndose en el caso extremo α =0 el criterio maximax.
	Los **valores de** α **próximos a 1** corresponden a una **pensamiento pesimista**, obteniéndose en el caso extremo α =1 el criterio de Wald.

ELECCIÓN DE α

Para la aplicación de la regla de Hurwicz es preciso determinar el valor de α, valor propio de cada decisor. Dado que este valor es aplicable a todos los problemas en que el decisor interviene, puede determinarse en un problema sencillo, como el que se muestra a continuación, y ser utilizado en adelante en los restantes problemas que involucren al decisor.

	Estados de la naturaleza				
Alternativas	e_1	e_2	s_i	o_i	$S(a_i)$
a_1	1	0	0	1	$1-\alpha$
a_2	λ	λ	λ	λ	λ

Si las alternativas a_1 y a_2 son indiferentes para el decisor, se tendrá $1-\alpha = \lambda$, por lo que $\alpha = 1-\lambda$. Por tanto, para determinar α el decisor debe seleccionar repetidamente una alternativa en esta tabla, modificando el valor de λ en cada elección, hasta que muestre indiferencia entre ambas alternativas.

EJEMPLO

Partiendo del ejemplo de construcción del hotel, la siguiente tabla muestra las recompensas obtenidas junto con la media ponderada de los niveles de optimismo y pesimismo de las diferentes alternativas para un valor **α=0.4**:

Alternativas Terreno comprado	Estados de la Naturaleza				
	Aeropuerto en A	Aeropuerto en B	s_i	o_i	$S(a_i)$
A	13	-12	-12	13	3
B	-8	11	-8	11	3.4
A y B	5	-1	-1	5	2.6
Ninguno	0	0	0	0	0

La alternativa óptima según el criterio de Hurwicz sería comprar la parcela en la ubicación B, pues proporciona la mayor de las medias ponderadas para el valor de **α** seleccionado.

CRÍTICA

El criterio de Hurwicz puede conducir en ocasiones a decisiones poco razonables, como se muestra en la siguiente tabla:

	Estados de la naturaleza						
Alternativas	e_1	e_2	...	e_{50}	s_i	o_i	$S(a_i)$
a_1	**0**	**1**	**...**	**1**	**0**	**1**	**1-✓**
a_2	**1**	**0**	**...**	**0**	**0**	**1**	**1-✓**

Según el criterio de Hurwicz ambas alternativas son equivalentes, aunque racionalmente la alternativa $\mathbf{a_1}$ es preferible a la alternativa $\mathbf{a_2}$. Más aún, si el resultado de la elección de la alternativa $\mathbf{a_2}$ cuando la naturaleza presenta el estado $\mathbf{e_1}$ fuese 1.001, se seleccionaría la segunda alternativa, lo cual parece poco razonable.

<u>CRITERIO DE SAVAGE</u>

En 1951 **Savage** argumenta que al utilizar los valores $\mathbf{x_{ij}}$ para realizar la elección, el decisor compara el resultado de una alternativa bajo un estado de la naturaleza con todos los demás resultados, independientemente del estado de la naturaleza bajo el que ocurran. Sin embargo, el estado de la naturaleza no es controlable por el decisor, por lo que **el resultado de una alternativa sólo debería ser comparado con los resultados de las demás alternativas bajo el mismo estado de la naturaleza**.

Con este propósito Savage define el concepto de **pérdida relativa** o **pérdida de oportunidad** $\mathbf{r_{ij}}$ asociada a un resultado $\mathbf{x_{ij}}$ como la diferencia entre el resultado de la mejor alternativa dado que $\mathbf{e_j}$ es el verdadero estado de la naturaleza y el resultado de la alternativa $\mathbf{a_i}$ bajo el estado $\mathbf{e_j}$:

$$\boxed{r_{ij} = \max_{1 \le k \le m} \{x_{kj}\} - x_{ij}}$$

Así, si el verdadero estado en que se presenta la naturaleza es $\mathbf{e_j}$ y el decisor elige la alternativa $\mathbf{a_i}$ que proporciona el máximo resultado $\mathbf{x_{ij}}$, entonces no ha dejado de ganar nada, pero si elige otra alternativa cualquiera $\mathbf{a_r}$, entonces obtendría como ganancia $\mathbf{x_{rj}}$ y dejaría de ganar $\mathbf{x_{ij}\text{-}x_{rj}}$.

Savage propone seleccionar la alternativa que proporcione la menor de las mayores pérdidas relativas, es decir, si se define $\mathbf{r_i}$ como la mayor pérdida que puede obtenerse al seleccionar la alternativa $\mathbf{a_i}$,

$$\rho_i = \max_{1 \le j \le n} \{ r_{ij} \}$$

El criterio de Savage resulta ser el siguiente:

$$\text{Elegir la alternativa } a_k \text{ tal que } \rho_k = \min_{1 \le i \le m} \rho_i = \min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} r_{ij}$$

Conviene destacar que, como paso previo a la aplicación de este criterio, se debe calcular la matriz de pérdidas relativas, formada por los elementos $\mathbf{r_{ij}}$. Cada columna de esta matriz se obtiene calculando la diferencia entre el valor máximo de esa columna y cada uno de los valores que aparecen en ella.

EJEMPLO

Partiendo del ejemplo de construcción del hotel, la siguiente tabla muestra la matriz de pérdidas relativas y el mínimo de éstas para cada una de las alternativas.

Alternativas Terreno comprado	**Estados de la Naturaleza**		
	Aeropuerto en A	**Aeropuerto en B**	$\times_i$
A	**0**	**23**	**23**
B	**21**	**0**	**21**
A y B	**8**	**12**	**12**
Ninguno	**13**	**11**	**13**

El mayor resultado situado en la columna 1 de la tabla de decisión original es 13; al restar a esta cantidad cada uno de los valores de esa columna se obtienen las pérdidas relativas bajo el estado de la naturaleza *Aeropuerto en A.* De la misma forma, el máximo de la columna 2 en la tabla original es 11; restando a esta cantidad cada uno de los valores de esa columna se obtienen los elementos $\mathbf{r_{ij}}$ correspondientes al estado de la naturaleza *Aeropuerto en B*. Como puede observarse, el valor $\times_i$ menor se obtiene para la tercera alternativa, por lo que la decisión óptima según el criterio de Savage sería comprar ambas parcelas.

CRÍTICA

El criterio de Savage puede dar lugar en ocasiones a decisiones poco razonables. Para comprobarlo, consideremos la siguiente tabla de resultados:

	Estados de la Naturaleza	
Alternativas	e_1	e_2
a_1	**9**	**2**
a_2	**4**	**6**

La **tabla de pérdidas relativas** correspondiente a esta tabla de resultados es la siguiente:

	Estados de la Naturaleza		
Alternativas	e_1	e_2	$\times_i$
a_1	**0**	**4**	**4**
a_2	**5**	**0**	**5**

La alternativa óptima es a_1. Supongamos ahora que se añade una alternativa, dando lugar a la siguiente tabla de resultados:

	Estados de la Naturaleza	
Alternativas	e_1	e_2
a_1	**9**	**2**
a_2	**4**	**6**
a_3	**3**	**9**

La nueva tabla de pérdidas relativas sería:

	Estados		

	de la Naturalez a		
Alternativas	e_1	e_2	X_i
a_1	**0**	**7**	**7**
a_2	**5**	**3**	**5**
a_3	**6**	**0**	**6**

El criterio de Savage selecciona ahora como alternativa óptima $\mathbf{a_2}$, cuando antes seleccionó $\mathbf{a_1}$. Este cambio de alternativa resulta un poco paradójico: supongamos que a una persona se le da a elegir entre **peras** y **manzanas,** y prefiere **peras**. Si posteriormente se la da a elegir entre **peras**, **manzanas** y **naranjas**, ¡esto equivaldría a decir que ahora prefiere **manzanas**!

EJERCICIO
CRITERIOS DE DECISION EN INCERTIDUMBRE

Una instalación recreativa debe decidir acerca del nivel de abastecimiento que debe almacenar para satisfacer las necesidades de sus clientes durante uno de los días de fiesta. El número exacto de clientes no se conoce, pero se espera que esté en una de cuatro categorías: 200,250, 300 o 350 clientes. Se sugieren, por consiguiente, cuatro niveles de abastecimiento, siendo el nivel i el ideal (desde el punto de vita de costos) si el número de clientes cae en la categoría i. La desviación respecto de niveles ideales resulta en costos adicionales, ya sea porque se tenga un abastecimiento extra sin necesidad o porque la demanda no puede satisfacerse. La tabla que sigue proporciona estos costos en miles de unidades monetarias.

Nivel de abastecimiento		e1(200)	e2(250)	e3(300)	e4(350)
	a1(200)	5	10	18	25
	a2(250)	8	7	8	23
	a3(300)	21	18	12	21
	a4(350	30	22	19	15

Determine cuál es el nivel de aprovisionamiento óptimo, utilizando los criterios explicados.

RESULTADOS

A) LAPLACE:

El principio de Laplace establece que e1, e2, e3, e4 tienen la misma probabilidad de suceder. Por consiguiente las probabilidades asociadas son P(x)=1/4 y los costos esperados para las acciones son:

E(a1) = (1/4)(5+10+18+25) = 14.5
E(a2) = (1/4)(8+7+8+23) = 11.5
E(a3) = (1/4)(21+18+12+21) = 18.0
E(a4) = (1/4)(30+22+19+15) = 21.5

Por lo tanto, el mejor nivel de inventario de acuerdo con el criterio de Laplace está especificado por a2.

B) WALD

Ya que $x(a_i, e_j)$ representa costo, el criterio minimax es aplicable. Los cálculos se resumen en la matriz que sigue. La estrategia minimax es a3:

Nivel de abastecimiento		e1(200)	e2(250)	e3(300)	e4(350)	$\max_{e_j}\{x(a_i,e_j)\}$
	a1(200)	5	10	18	25	25
	a2(250)	8	7	8	23	23
	a3(300)	21	18	12	21	**21 (valor minimax)**
	a4(350	30	22	19	15	30

C) HURWICZ

Supongamos =1/2. Los cálculos necesarios se muestran enseguida. La solución óptima está dada por a1 ó a2.

	$\min_{e_j}\{x(a_i,e_j)\}$	$\max_{e_j}\{x(a_i,e_j)\}$	$\{\alpha \min_{e_j} x(a_i,e_j)+(1-\alpha)\max_{e_j} x(a_i,e_j)\}$

a1	5	25	**15 (mín)**
a2	7	23	**15 (mín)**
a3	12	21	16.5
a4	15	30	22.5

D) SAVAGE

Se obtiene primero la matriz **rij** restando 5, 7, 8 y 15 de las columnas 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

Nivel de abastecimiento		e1(200)	e2(250)	e3(300)	e4(350)	$\max_{e_j} \{r(a_i, e_j)\}$
	a1(200)	5	10	18	25	10
	a2(250)	8	7	8	23	**8 (valor minimax)**
	a3(300)	21	18	12	21	16
	a4(350	30	22	19	15	25

2. Considere la siguiente matriz de pagos (beneficios):

	e1	e2	e3	e4	e5
a1	15	10	0	-6	17
a2	3	14	8	9	2
a3	1	5	14	20	-3
a4	7	19	10	2	0

No se conocen probabilidades para la ocurrencia de los estados de la naturaleza. Compare las soluciones obtenidas con cada uno de los criterios aprendidos.

3. Considere las siguientes tablas de retribuciones en la que cada dato es un rendimiento neto en dólares. Suponga que es una decisión en la que no se tiene conocimiento del estado de la naturaleza. Determine la mejor decisión utilizando los criterios aprendidos.

Tabla a)

	Estados de la naturaleza			
Decisión	1	2	3	4
1	35	22	25	12
2	27	25	20	18
3	22	25	25	28
4	20	25	28	33

Tabla b)

	Estados de la naturaleza		
Decisión	1	2	3
1	3	8	5

2	7	4	6
3	5	6	9

ESTRATEGIA (Teoría de Juegos)

La teoría de juegos es un área de la matemática aplicada que utiliza modelos para estudiar interacciones en estructuras formalizadas de incentivos (los llamados juegos) y llevar a cabo procesos de decisión. Sus investigadores estudian las estrategias óptimas así como el comportamiento previsto y observado de individuos en juegos.

Tipos de interacción aparentemente distintos pueden, en realidad, presentar estructura de incentivo similar y, por lo tanto, se puede representar mil veces conjuntamente un mismo juego. Desarrollada en sus comienzos como una herramienta para entender el comportamiento de la economía, la teoría de juegos se usa actualmente en muchos campos, como en la biología, sociología, psicología y filosofía. Experimentó un crecimiento sustancial y se formalizó por primera vez a partir de los trabajos de John von Neumann y Oskar Morgenstern, antes y durante la Guerra Fría, debido sobre todo a su aplicación a la estrategia militar en particular a causa del concepto de destrucción mutua garantizada. Desde los setenta, la teoría de juegos se ha aplicado a la conducta animal, incluyendo el desarrollo de las especies por la selección natural. A raíz de juegos como el dilema del prisionero, en los que el egoísmo generalizado perjudica a los jugadores, la teoría de juegos ha atraído también la atención de los investigadores en informática, usándose en inteligencia artificial y cibernética.

La estrategia de un jugador es un plan de acción completo para cualquier situación que pueda acaecer; determina completamente la conducta del jugador. La estrategia de un jugador determinará la acción que tomará el jugador en cualquier momento del juego, para cualquier secuencia de acontecimientos hasta ese punto.

Un perfil de estrategia:

- Es un conjunto de estrategias para cada jugador que especifica completamente todas las acciones en un juego.
- Debe incluir solamente una estrategia para cada jugador.

El concepto de estrategia se confunde en ocasiones con el de movimiento. Un movimiento es una acción que toma un jugador en un determinado momento en el juego. Por otra parte, es un algoritmo completo para jugar al juego, enumerando implícitamente todos los movimientos de todos los jugadores para cada situación del juego, por ejemplo: el número de movimientos en el tres en raya es 4 o 5 mientras que el número de estrategias es superior a 6 billones., mientras que el número de estrategias es superior a 6 billones.

En los juegos no es el análisis del azar o de los elementos aleatorios sino de los comportamientos estratégicos de los jugadores. En el mundo real, tanto en las relaciones económicas como en las políticas o sociales, son muy frecuentes las situaciones en las que, al igual que en los juegos, su resultado depende de la conjunción de decisiones de diferentes agentes o jugadores. Se dice de un comportamiento que es estratégico cuando se adopta teniendo en cuenta la influencia conjunta sobre el resultado propio y ajeno de las decisiones propias y ajenas. El concepto de estrategia se confunde (erróneamente) en ocasiones con el de movimiento. Un movimiento es una acción que toma un jugador en un determinado momento en el juego (por ejemplo, en el ajedrez, al mover el alfil blanco de a2 a b3). Una estrategia, por otra parte, es un algoritmo completo para jugar al juego, enumerando implícitamente todos los movimientos de todos los jugadores para cada situación del juego. El número de movimientos en el tres en raya es 4 o 5 (dependiendo de si el jugador empieza o no, y considerando que ninguno de los jugadores puede saltarse un turno), mientras que el número de estrategias es superior a 6 billones.

Tipos de Estrategias

Una **estrategia pura** proporciona una definición completa para la forma en que un jugador puede jugar a un juego. En particular, define, para cada elección posible, la opción que toma el jugador. El **espacio de estrategia** de un jugador es el conjunto de estrategias puras disponible al jugador.

Una **estrategia mezclada** es una asignación de probabilidad a cada estrategia pura. Define una probabilidad sobre las estrategias y refleja que, en lugar de elegir una estrategia pura particular, el jugador elegirá al azar una estrategia pura en función de la distribución dada por la estrategia mezclada. Por supuesto, cada estrategia pura es una estrategia mezclada que elige esa estrategia pura con probabilidad *1* y cualquier otra con probabilidad *0*.

Las estrategias en teoría de juegos tienen una importancia esencial desde que se mostró que en el dilema del prisionero nunca se llega a la cooperación a menos que se consideren estrategias multi-periodo. Una estrategia altamente efectiva es "ojo por ojo". En un concurso de programación se descubrió que, pese a su simpleza, era muy competitivo contra muchos otros algoritmos. Esta estrategia recibió el nombre de estrategia Martingala, y se formalizó simplemente para mostrar por qué no crea un provecho esperado. Sin embargo, es una estrategia popular que se puede ver en muchos casinos (especialmente entre jugadores principiantes, que reciben el nombre de "jugadores sistemáticos"). El casino típico prefiere este tipo de jugadores porque el riesgo del casino es muy bajo (solo pierden el mínimo cada vez que el jugador empieza), pero su ganancia potencial es extremadamente grande (todo el dinero del jugador). 1. La teoría de la subasta. Se ocupa de cómo las personas actúan en mercados de subastas e investiga sus propiedades. Existen muchos diseños posibles (o conjuntos de reglas) para una subasta. Los temas típicos estudiados por los teóricos incluyen la eficiencia de un determinado diseño de subasta, estrategias de oferta óptima y de equilibrio y la comparación de ingresos. La teoría de la subasta también se utiliza como una herramienta para el diseño de subastas del mundo real, en particular la subasta para la privatización de empresas del sector público o la venta de licencias de uso del espectro electromagnético. Un juego teórico de modelo de subasta es un juego matemático representado por un conjunto de jugadores, un conjunto de acciones (estrategias) a disposición de cada jugador, y un vector de premios correspondiente a cada combinación posible de las estrategias. Generalmente, los jugadores son el comprador y el vendedor. La acción de cada jugador es un conjunto de la oferta, cada función de los mapas de la oferta del jugador valor (en el caso de un comprador) o coste (en el caso de un vendedor) a una oferta (precios). Los pagos de cada jugador en virtud de una combinación de estrategias es la utilidad esperada (o espera de beneficio), de dicho jugador en virtud de que la combinación de estrategias.

La teoría de modelos de juego de las subastas y las ofertas estratégicas en general pertenecía a ninguna de las dos categorías siguientes:

· En una modelo de valor privado, cada participante (postor) se supone que cada uno de los competidores ofertantes obtiene un valor privado de un distribución de probabilidad.

· En una valor común modelo, cada participante asume que cualquier otro participante que obtiene una señal de una distribución de probabilidad común a todos los ofertantes.

TEORÍA DE JUEGO

Origen

La Teoría de Juegos fue creada por Von Neumann y Morgenstern en su libro clásico “The Theory of Games Behavior”, publicado en 1944. Otros habían anticipado algunas ideas. Los economistas Cournot y Edgeworth fueron particularmente innovadores en el siglo XIX. Otras contribuciones posteriores mencionadas fueron hechas por los matemáticos Borel y Zermelo. El mismo Von Neumann ya había puesto los fundamentos en el artículo publicado en 1928. Sin embargo, no fue hasta que apareció el libro de Von Neumann y Morgenstern que el mundo comprendió cuán potente era el instrumento descubierto para estudiar las relaciones humanas.

Durante las dos décadas que siguieron a la Segunda Guerra Mundial, uno de los progresos más interesantes de la Teoría Económica fue la Teoría de los Juegos y el comportamiento económico, publicada en un libro de este titulo bajo la autoridad conjunta de Jhon Von Neumann y Oskar Morgenstern. Actualmente, el consenso parece ser que la Teoría de los Juegos es más relevante al estudio de problemas comerciales específicos que a la teoría económica general, por que representa un enfoque único al análisis de las decisiones comerciales en condiciones de intereses competitivos y conflictivos.

En los últimos años, sus repercusiones en la teoría económica sólo se pueden calificar de explosivas. Todavía es necesario, sin embargo, saber algo de la corta historia de juegos, aunque sólo sea para entender por qué se usan algunos términos.

Von Neumann y Morgenstern investigaron dos planteamientos distintos de la Teoría de Juegos. El primero de ellos el planteamiento estratégico o no cooperativo. Este planteamiento requiere especificar detalladamente lo que los jugadores pueden y no pueden hacer durante el juego, y después buscar cada jugador una estrategia óptima. Lo que es mejor para un jugador depende de lo que los otros jugadores piensan hacer, y esto a su vez depende de lo que ellos piensan del primer jugador hará. Von Neumann y Morgenstern resolvieron este problema en el caso particular de juegos con dos jugadores cuyos intereses son diametralmente opuestos. A estos juegos se les llama estrictamente competitivos, o de suma cero, porque cualquier ganancia para un jugador siempre se equilibra exactamente por una pérdida correspondiente para el otro jugador. El Ajedrez, el Backgamón y el Póquer son juegos tratados habitualmente como juegos de suma cero.

La segunda parte del libro de Von Neumann y Morgenstern, se desarrolla el planteamiento coalicional o cooperativo, en el que buscaron describir la conducta óptima en juegos con muchos jugadores. Puesto que éste es un problema mucho más difícil, no es de sorprender que sus resultados fueran mucho menos precisos que los alcanzados para el caso de suma cero y dos jugadores. En particular, Von Neumann y Morgenstern abandonaron todo intento de especificar estrategias óptimas para jugadores individuales. En lugar de ello se propusieron clasificar los modelos de formación de coaliciones que son consistentes con conductas racionales. La negociación, en cuanto a tal, no jugaban papel alguno en esta teoría. De hecho, hicieron suyo el punto de vista, que había predominado entre los economistas al menos desde la época de Edgeworth, según el cual los problemas de negociación entre dos personas son inherentemente indeterminados.

A principio de los años cincuenta, en una serie de artículos muy famosos el matemático John Nash rompió dos de las barreras que Von Neumann y Morgenstern se había auto-impuesto. En el frente no cooperativo, estos parecen haber pensado que en estrategias la idea de equilibrio, introducida por Cournot en 1832, no era en sí misma una noción adecuada para construir sobre ella una teoría (de aquí que se restringieran a juegos de suma cero). Sin embargo, la formulación general de Nash de la idea de equilibrio hizo ver claramente que una restricción así es innecesaria. Hoy día, la noción de equilibrio de Nash, la cual no es otra cosa que cuando la elección estratégica de cada jugador es la respuesta óptima a las elecciones estratégicas de los otros jugadores. A Horace y Maurice les fueron aconsejados, por su consultor especialista en Teoría de Juegos, que usaran un equilibrio de Nash. Es tal vez, el más importante de los instrumentos que los especialistas en Teoría de Juegos tienen a disposición. Nash también hizo contribuciones al planteamiento cooperativo de Von Neumann y Morgenstern.

Nash no aceptó la idea de que la Teoría de Juegos debe considerar indeterminados problemas de negociación entre dos personas y procedió a ofrecer argumentos para determinarlos. Sus ideas sobre este tema fueron generalmente incomprendidas y, tal vez como consecuencia de ello, los años que la Teoría de Juegos paso en Babia se gastaron principalmente desarrollando el planteamiento cooperativa de Von Neumann y Morgenstern en direcciones que finalmente resultaron improductivas.

Aplicaciones

La Teoría de Juegos actualmente tiene muchas aplicaciones, sin embargo, la economía es el principal cliente para las ideas producidas por los especialistas en Teoría de Juego. Entre las disciplinas donde hay aplicación de la Teoría de Juegos tenemos:

- En la Economía:

No debería sorprender que la Teoría de Juegos haya encontrado aplicaciones directas en economía. Esta triste ciencia se supone que se ocupa de la distribución de recursos escasos. Si los recursos son escasos es porque hay más gente que los quiere de la que puede llegar a tenerlos. Este panorama proporciona todos los ingredientes necesarios para un juego. Además, los economistas neoclásicos adoptaron el supuesto de que la gente actuará racionalmente en este juego. En un sentido, por tanto, la economía neoclásica no es sino una rama de la Teoría de Juegos.

Sin embargo, aunque los economistas pueden haber sido desde siempre especialistas camuflados en Teoría de Juegos, no podían progresar por el hecho de no tener acceso a los instrumentos proporcionados por Von Neumann y Morgenstern.

En consecuencia sólo se podían analizar juegos particularmente simples. Esto explica por qué el monopolio y la competencia perfecta se entienden bien, mientras a todas las demás variedades de competencia imperfecta que se dan entre estos dos extremos sólo ahora se les está empezando a dar el tratamiento detallado que merecen.

La razón por la que el monopolio es simple desde el punto de vista de la Teoría de Juegos, es que puede ser tratado como un juego con un único jugador. La razón por que la competencia perfecta es simple es que el número de jugadores es de hecho infinito, de manera que cada agente individual no puede tener un efecto sobre agregados de mercado si el o ella actúa individualmente.

- En la Ciencia Política:

La Teoría de Juegos no ha tenido el mismo impacto en la ciencia política que en economía. Tal vez esto se deba a que la gente se conduce menos racionalmente cuando lo que está en juego son ideas que cuando lo que está en juego es su dinero. Sin embargo, se ha convertido en un instrumento importante para clarificar la lógica subyacente de un cierto número de problemas más paradigmáticos.

- En la Biología:

En Biología se ha utilizado ampliamente la teoría de juegos para comprender y predecir ciertos resultados de la evolución, como lo es el concepto de estrategia evolutiva estable introducido por John Maynard Smith en su ensayo "Teoría de Juegos y la Evolución de la Lucha", así como en su libro "Evolución y Teoría de Juegos".

- En la Filosofía:

Los especialistas en Teoría de Juegos creen que pueden demostrar formalmente por qué incluso el individuo más egoísta puede descubrir que con frecuencia, cooperar con sus vecinos en una relación a largo plazo redundará en su propio interés ilustrado.

Con este fin estudian los equilibrios de juegos con repetición (juegos que los mismos jugadores juegan una y otra vez). Pocas cosas han descubierto en esta área hasta el presente que hubieran sorprendido a David Hume, quien hace ya unos doscientos años articuló los mecanismos esenciales. Estas ideas, sin embargo, están ahora firmemente basadas en modelos formales. Para avanzar más, habrá que esperar progresos en el problema de la selección de equilibrios en juegos con múltiples equilibrios. Cuando estos progresos se den, sospecho que la filosofía social sin Teoría de Juegos será algo inconcebible – y que David Hume será universalmente considerado como su verdadero fundador.

Objetivos de la Teoría de Juegos

El principal objetivo de la teoría de los juegos es determinar los papeles de conducta racional en situaciones de "juego" en las que los resultados son condicionales a las acciones de jugadores interdependientes.

Un juego es cualquier situación en la cual compiten dos o más jugadores. El Ajedrez y el Póker son buenos ejemplos, pero también lo son el duopolio y el oligopolio en los negocios. La extensión con que un jugador alcanza sus objetivos en un juego depende del azar, de sus recursos físicos y mentales y de los de sus rivales, de las reglas del juego y de los cursos de acciones que siguen los jugadores individuales, es decir, sus estrategias. Una estrategia es una especificación de la acción que ha de emprender un jugador en cada contingencia posible del juego.

Se supone que, en un juego, todos los jugadores son racionales, inteligentes y están bien informados. En particular, se supone que cada jugador conoce todo el conjunto de estrategias existentes, no solo para él, sino también para sus rivales, y que cada jugador conoce los resultados de todas las combinaciones posibles de las estrategias.

Igualmente, en una gran variedad de juegos, el resultado es una variable aleatoria cuya distribución de probabilidades debe ser establecida para que pueda ser posible una solución para el juego. A este respecto, debe observarse que las decisiones de los jugadores interdependientes no se toman en un vacío y que los

pagos resultantes de estas decisiones dependen de las acciones emprendidas por todos los jugadores. Esta interdependencia implica que puede ser inapropiado suponer que los pagos están siendo generados por un proceso probabilista invariante que no es afectado por el curso de acción que uno escoja. En otras palabras, la acción que emprende un jugador puede dictar los actos de otros jugadores o influir en la probabilidad de que se comporten en una forma particular. Esta potencialidad de posibles efectos en los resultados es la que distingue la toma de decisiones en conflictos y la toma de decisiones en un medio incierto. La clase más sencilla de modelo de juego rigurosamente adversario, en el que los resultados posibles son calificados en orden opuesto por los jugadores.
Entre esta clase, él más común es el juego de suma constante, en el que la suma de las ganancias de los jugadores es igual, cualquiera que sea su distribución entre ellos. Un caso especial, y el único que consideraremos, de juegos de suma constante se llama juego de suma cero de dos personas.

PROGRAMACION LINEAL

Programación Lineal:
Es una técnica de decisión que ayuda a determinar la combinación óptima de recursos limitados para resolver problemas y alcanzar los objetivos organizacionales.
Para que sea aplicable, la Programación Lineal debe reunir los siguientes requisitos:
Tiene que optimizarse un objetivo.
Las variables o fuerzas que afectan los resultados poseen relaciones directas o en línea recta.
Hay obstáculos o restricciones sobre las relaciones de las variables.
Sin las restricciones de la Programación Lineal incluyen la maximización de la producción, minimizar los costos de distribución y determinar los niveles óptimos del inventario.

Muchas decisiones de Dirección de Operaciones incluyen el intentar conseguir utilizar los recursos de la organización de la manera más efectiva posible. Los recursos generalmente incluyen maquinarias (como los aviones), mano de obra (como los pilotos), dinero, tiempo y materias primas (como el combustible). Estos recursos se pueden utilizar para producir productos (como máquinas, muebles, alimentos y vestuario) o servicios (como listas de vuelos, campañas de publicidad o decisiones de inversión).

La programación lineal es un método determinista de análisis para elegir la mejor entre muchas alternativas. Cuando ésta mejor alternativa incluye un conjunto coordinado de actividades, se le puede llamar plan o programa.

Con frecuencia, seleccionar una alternativa incluye satisfacer varios criterios al mismo tiempo.

Por ejemplo, cuando se compra una pieza de pan se tiene el criterio de frescura, tamaño, tipo (blanco, de centeno u otro), costo, rebanado o no rebanado, etc.

Se pueden además dividir estos criterios en dos categorías: restricciones y objetivo.

Las restricciones son las condiciones que debe satisfacer una solución que está bajo consideración.

Si más de una alternativa satisface todas las restricciones, el objetivo se usa para seleccionar entre todas las alternativas factibles.

Cuando se elige una pieza de pan, puede quererse un kilo de pan blanco rebanado y hecho en el día. Si varias marcas satisfacen estas restricciones, puede aplicarse el objetivo de un costo mínimo y escoger el más barato.

Existen muchos problemas administrativos que se ajustan a este modelo de tratar de minimizar o maximizar un objetivo que está sujeto a una lista de restricciones.

- Un corredor de inversiones, por ejemplo, trata de maximizar el rendimiento sobre los fondos invertidos pero las posibles inversiones están restringidas por las leyes y las políticas bancarias.
- Un hospital debe planear que las comidas para los pacientes satisfagan ciertas restricciones sobre sabor, propiedades nutritivas, tipo y variedad, al mismo tiempo que se trata de minimizar el costo.
- Un fabricante, al planear la producción futura, busca un costo mínimo al mismo tiempo cómo cumplir restricciones sobre la demanda del producto, la capacidad de producción, los inventarios, el nivel de empleados y la tecnología.

La programación lineal es una técnica determinista, no incluye probabilidades. El objetivo y cada una de las restricciones se deben expresar como una relación

lineal, de ahí el nombre de programación lineal.
Todos los problemas de PL (Programación Lineal) tienen cuatro propiedades en común:

Los problemas de PL buscan **maximizar o minimizar** una cantidad (generalmente beneficios o costos). Nos referimos a ello como la **Función Objetivo** de un PL. El principal objetivo de una empresa tipo es maximizar los beneficios a largo plazo. En el caso de un sistema de distribución, el objetivo puede ser minimizar los costos de transporte.

1. La presencia de **restricciones** limita el grado en que podemos perseguir el objetivo. Por ejemplo, decidir cuántas unidades se deben fabricar para una línea de productos de una empresa está restringido por la disponibilidad de horas de mano de obra y máquinas. Se quiere por tanto, maximizar o minimizar una cantidad (función objetivo) sujeta a las limitaciones de recursos (restricciones).
2. Deben existir **diferentes alternativas** donde poder elegir. Por ejemplo, si una empresa fabrica tres productos, los directivos pueden utilizar PL para decidir cómo asignar entre ellos sus recursos de producción limitados (trabajo, máquinas y demás). Si no existen alternativas evidentes que seleccionar, no necesitaremos la PL.
3. La función objetivo y las restricciones de un PL deben ser expresadas en términos de **ecuaciones lineales** o inecuaciones.

Una de las aplicaciones más comunes de la programación lineal es el problema del plan de producción. Do o más productos se fabrican con recursos limitados. La empresa desea saber cuántas unidades deben fabricarse de cada producto, maximizando los beneficios globales y teniendo en cuenta las limitaciones de recursos.

<u>Ejemplo</u>

Sony fabrica dos productos: (1) el Walkman un radiocasete portátil y (2) el Shader TV, un televisor en blanco y negro del tamaño de un reloj de pulsera. El proceso de producción de ambos productos se asemeja en que los dos necesitan un número de horas de trabajo en el departamento de electrónica, y un cierto número de horas de mano de obra en el departamento de montaje. Cada Walkman necesita cuatro horas de trabajo de electrónica y dos en el taller de montaje. Cada televisor necesita tres horas de electrónica y una en montaje. Durante el actual período de producción se dispone de doscientas cuarenta horas en el

departamento de electrónica y de cien horas en el de montaje. Cada Walkman vendido supone un beneficio de 7 dólares, mientras que para un televisor el beneficio unitario es de cinco dólares.
El problema de Sony es determinar la mejor combinación posible de Walkmany televisores que debe producir para alcanzar el máximo beneficio.
Esta situación puede formularse como un programa lineal.
Empezaremos resumiendo la información necesaria para formular y resolver este problema.

	Horas necesarias para producir una unidad		
Departamento	(x_1) Walkman	(x_2) Televisores	Hrs. disponibles
Electrónica	4	3	240
Montaje	2	1	100
Beneficios	7	5	

Una vez hecho esto, utilizaremos la siguiente notación:
Sea :

X_1= número de Walkman a producir.
X_2= número de televisores a producir

Ahora podemos escribir la función objetivo en términos de x_1 y x_2:

Maximizar Beneficio = $7x_1 + 5x_2$

Nuestro siguiente paso es desarrollar relaciones matemáticas que describan las dos limitaciones del problema. Una relación de carácter general sería que la cantidad de recursos utilizados sea menor o igual (≤)que la cantidad de recursos disponibles.

Primera restricción: tiempo de electrónica utilizado ≤ tiempo de electrónica disponible.

4x1 + 3x2 ≤ 240 (horas de trabajo en electrónica)

Segunda restricción: tiempo de montaje utilizado ≤ tiempo de montaje disponible.

2x1 + 1x2 ≤ 100 (horas de trabajo en montaje)

Ambas restricciones representan las limitaciones de capacidad y, por supuesto, afectan al beneficio total. Por ejemplo, Sony no puede producir 70 Walkman durante el período de producción porque si x_1=70, ambas restricciones se incumplen.
Tampoco puede hacer 50 Walkman y 10 televisores (x_1 = 50, x_2 = 10), porque en

este caso se incumpliría la segunda restricción.
Estas restricciones nos llevan a otro aspecto importante de la programación lineal: existirán interacciones entre variables. Cuantas más unidades se realicen de un producto menos se fabricarán de otros.

- La forma más fácil de solucionar un pequeño problema de PL, como por ejemplo el de Sony, es la solución gráfica. El procedimiento gráfico puede utilizarse cuando existen dos variables de decisión, como el número de Walkman a producir (1) y el número de televisores a producir (x_2).
- Cuando existen más de dos variables, es imposible dibujarlo en un gráfico de dos dimensiones, por lo que habrán de adoptarse otros métodos de resolución más complejos que se describirán más adelante.

Representación gráfica de las restricciones

Para encontrar la solución óptima de un problema PL, en primer lugar debemos identificar el conjunto o región de soluciones posibles (valores de las variables que cumplen las restricciones del problema**).**

El primer paso para conseguirlo es dibujar las restricciones del problema en un gráfico.

Retomemos el problema de ejemplo de Sony:

Maximizar Beneficio = $7x_1 + 5x_2$

S.A. $4x_1 + 3x_2 \leq 240$ **(horas de trabajo en electrónica)**

$2x_1 + 1x_2 \leq 100$ **(horas de trabajo en montaje)**

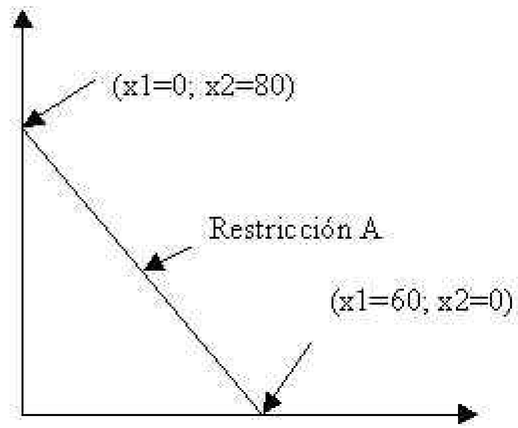
$x_1, x_2 \geq 0$ **(número de unidades no debe ser negativo)**

Para dibujar las restricciones en un gráfico, debemos transformar las desigualdades en igualdades:

Restricción A: $4x_1 + 3x_2 = 240$

Restricción B: $2x_1 + 1x_2 = 100$

La variable x1 (Walkman) generalmente se dibuja en el eje horizontal y la variable x2 (televisores) en el eje vertical.



Programación Lineal

Problemas y Soluciones

1. Un frutero necesita 16 cajas de naranjas, 5 de plátanos y 20 de manzanas. Dos mayoristas pueden suministrarle para satisfacer sus necesidades, pero sólo venden la fruta en contenedores completos. El mayorista A envía en cada contenedor 8 cajas de naranjas, 1 de plátanos y 2 de manzanas. El mayorista B envía en cada contenedor 2 cajas de naranjas, una de plátanos y 7 de manzanas. Sabiendo que el mayorista A se encuentra a 150 km de distancia y el mayorista B a 300 km, calcular cuántos contenedores habrá de comprar a cada mayorista, con objeto de ahorrar tiempo y dinero, reduciendo al mínimo la distancia de lo solicitado.

- **MATEMATIZACIÓN DEL PROBLEMA**

	MAYORISTA A	MAYORISTA B	Necesidades mínimas
Naranjas	8	2	16 cajas
Plátanos	1	1	5 cajas
Manzanas	2	7	20 cajas
Distancia	150 Km	300 Km	

- **VARIABLES INSTRUMENTALES**

Llamamos *x* al número de contenedores del mayorista A

Llamamos *y* al número de contenedores del mayorista B

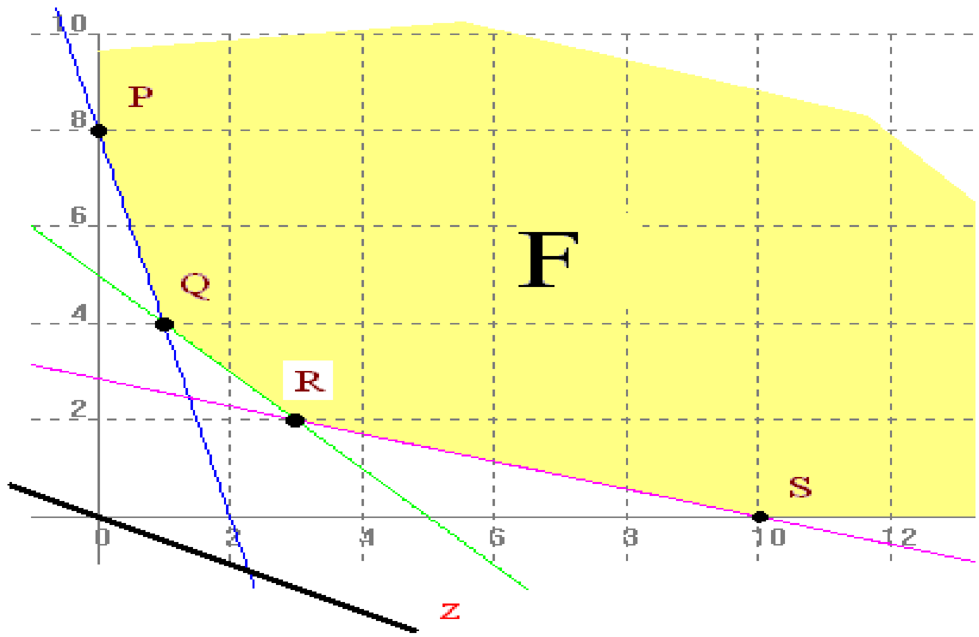
- **FUNCIÓN OBJETIVO** (**Minimizar**)

F(X) = 150x + 300y

- **RESTRICCIONES**

$$\left.\begin{array}{r} 8x+2y \geq 16 \\ x+y \geq 5 \\ 2x+7y \geq 20 \\ x \geq 0\ ;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

- **REGIÓN DE SOLUCIONES FACTIBLES**



- **SOLUCIÓN FACTIBLE ÓPTIMA**

Observamos que el mínimo se alcanza en el punto R(3,2) (*solución óptima*)
Por tanto el frutero solicitará 3 contenedores del mayorista A y 2 contenedores del mayorista B.

2. Una compañía tiene dos minas: la mina A produce diariamente 1 tonelada de carbón de antracita de alta calidad, 2 toneladas de carbón de calidad media y 4 toneladas de carbón de baja calidad; la mina B produce 2 toneladas de cada una de las tres clases. La compañía necesita 70 toneladas de carbón de alta calidad, 130 de calidad media y 150 de baja calidad. Los gastos diarios de la mina A ascienden a 150 dólares y los de la mina B a 200 dólares. ¿Cuántos días deberán trabajar en cada mina para que la función de coste sea mínima?

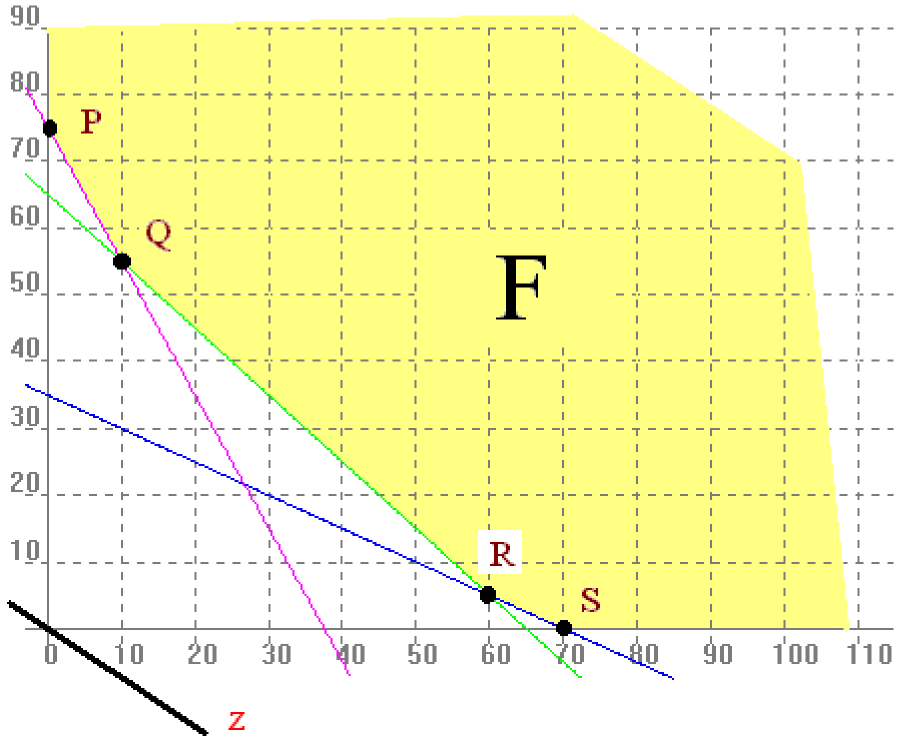
- **MATEMATIZACIÓN DEL PROBLEMA**

	Mina A	Mina B	Necesidades mínimas
Alta	1	2	70
Media	2	2	130
Baja	4	2	150
Costo diario	\$ 150	\$ 200	

- **VARIABLES INSTRUMENTALES**
  Llamamos x al número de días trabajados en la mina A
  Llamamos y al número de días trabajados en la mina B
- **FUNCIÓN OBJETIVO** (**Minimizar**)
  F(X) = 150x + 200y
- **RESTRICCIONES**

$$\left.\begin{array}{r} x+2y\geq 70 \\ 2x+2y\geq 130 \\ 4x+2y\geq 150 \\ x\geq 0\ ;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

- **REGIÓN DE SOLUCIONES FACTIBLES**



- **SOLUCIÓN FACTIBLE ÓPTIMA**
  El mínimo se obtiene en el punto R(60,5) es decir, la compañía debe trabajar 60 días en la mina A y 5 días en la mina B para que el costo sea mínimo.
- **VALOR DEL PROGRAMA LINEAL**
  Como la función objetivo es F(X) = 150x + 200y el valor del programa lineal (gasto) es F(X) = 150·60 + 200·5 = $10.000 diarios.

3. Imaginemos que las necesidades semanales mínimas de una persona en proteínas, hidratos de carbono y grasas son, respectivamente, 8, 12 y 9 unidades. Supongamos que debemos obtener un preparado con esa composición mínima mezclando dos productos A y B, cuyos contenidos por Kg son los que se indican en la siguiente tabla:

	Proteínas	Hidratos	Grasas	Costo/kg
A	2	6	1	600
B	1	1	3	400

a) ¿Cuántos Kg de cada producto deberán comprarse semanalmente para que el costo de preparar la dieta sea mínimo?

b) ¿Cuántos Kg de cada producto deberíamos comprar si el precio de A subiera a 1.000 pesos/Kg ?

- **MATEMATIZACIÓN DEL PROBLEMA**

	A	B	Necesidades
Proteínas	2	1	8
Hidratos	6	1	12
Grasas	1	3	9
Costo	600	400	

- **VARIABLES INSTRUMENTALES**

  Llamamos x al número de Kg. usados del producto A

  Llamamos y al número de Kg. usados del producto B

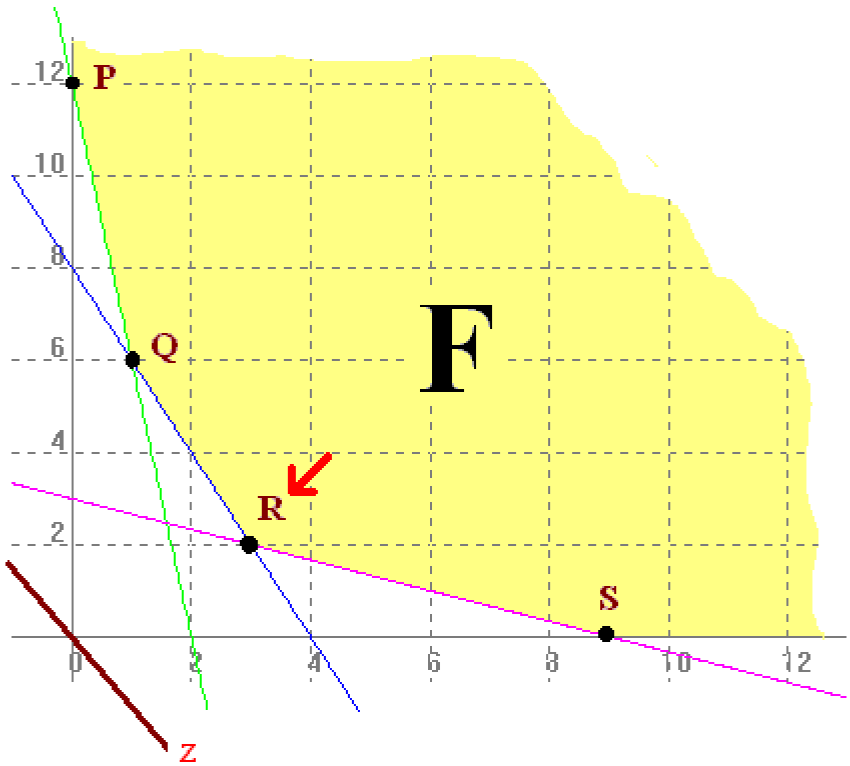
- **FUNCIÓN OBJETIVO** (**Minimizar**)

  F(X) = 600x + 400y

- **RESTRICCIONES**

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y\geq 8 \\ 6x+y\geq 12 \\ x+3y\geq 9 \\ x\geq 0\,;\,y\geq 0 \end{array}\right\}$$

- **REGIÓN DE SOLUCIONES FACTIBLES**



- **SOLUCIÓN FACTIBLE ÓPTIMA**

  Todos los puntos que forman la región *F* son soluciones factibles, y por paralelismo con la recta de beneficio nulo *z* vemos que R(3,2) es el punto mínimo. Por tanto, deben comprarse 3 kg. de A y 2 kg. de B para que el gasto sea mínimo.

- **VALOR DEL PROGRAMA LINEAL**

  Cuando la función objetivo es F(X) = 600x + 400y el valor del programa lineal (gasto) es $2.600

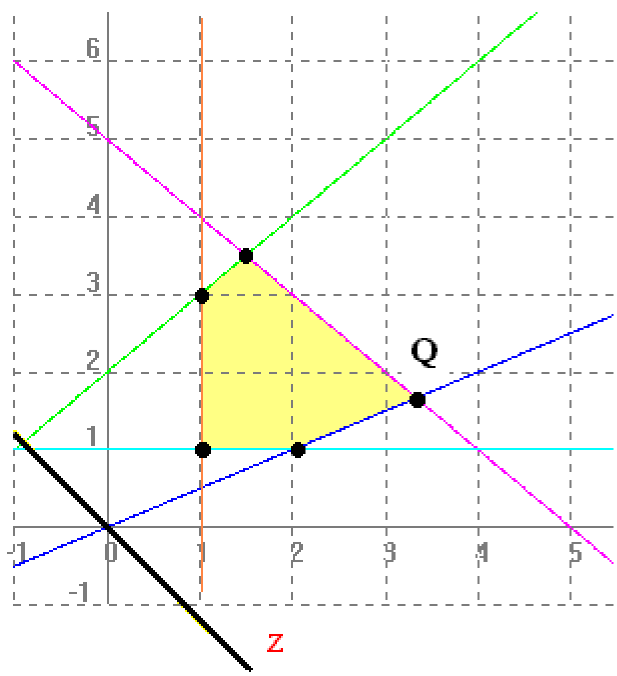
  Si la función objetivo es F(X) = 100x + 400y la solución óptima está en el punto Q(1,6) y el valor del programa lineal (gasto) es $ 3.400

4. En la elaboración de un producto A se necesita una sustancia B. La cantidad de A obtenida es menor o igual que el doble de B utilizada, y la diferencia entre las cantidades del producto B y A no supera los 2g mientras que la suma no debe sobrepasar los 5g.
Además se utiliza por lo menos 1g de B y se requiere 1 g de A. La sustancia A se vende a 5 millones y la B cuesta 4 millones el gramo. Calcular la cantidad de sustancia B necesaria para que el beneficio sea máximo.

- **VARIABLES INSTRUMENTALES**
  Llamamos x a la cantidad de sustancia A
  Llamamos y a la cantidad de sustancia B
- **FUNCIÓN OBJETIVO** (**Maximizar**)
  F(X) = 5x + 4y
- **RESTRICCIONES**

$$\left.\begin{array}{r} x \le 2y \\ y - x \le 2 \\ y + x \le 5 \\ x \ge 1 \; ; \; y \ge 1 \end{array}\right\}$$

- **REGIÓN DE SOLUCIONES FACTIBLES**



- **SOLUCIÓN FACTIBLE ÓPTIMA**
  Se encuentra en el punto Q(10/3, 5/3), es decir la cantidad de sustancia B para que el beneficio sea máximo debe ser 5/3 g.