III) معادلة مستقيم

نشاط 1 : ينسب المستوي إلى معلم $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. لنعلم النقطتين $B(3 ; -4)$ ، $A(-2 ; 3)$.

1) بين أن الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\14\end{pmatrix}$ مرتبط خطيا مع الشعاع $\overrightarrow{AB}$. ماذا يعتبر الشعاع $\vec{u}$ بالنسبة للمستقيم (AB) .

2) $M(x ; y)$ نقطة من المستوي ، عين علاقة بين x و y بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا.

3) $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ شعاع من المستوي ، عين مجموعة النقط N بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AN}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا.
باعتبار $(x ; y)$ إحداثيتي النقطة N أكتب علاقة بين x و y في هذه الحالة ، ثم أكتب y بدلالة x .

4) $\vec{W}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ شعاع غير معدوم من المستوي ، أكتب علاقة بين x و y لمجموعة النقط $L(x ; y)$ بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{BL}$ و $\vec{W}$ مرتبطين خطيا.

حل النشاط :

1) بين أن الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\14\end{pmatrix}$ مرتبط خطيا مع الشعاع $\overrightarrow{AB}$. ماذا يعتبر الشعاع $\vec{u}$ بالنسبة للمستقيم (AB) .

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3+2\\-4-3\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$ ومنه : $\vec{u} = -2\overrightarrow{AB}$ إذن : $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا.
$\vec{u}$ هو شعاع التوجيه المستقيم (AB) .

2) $M(x ; y)$ نقطة من المستوي ، عين علاقة بين x و y بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا.

لدينا : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$ ؛ $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا معناه : $-7(x+2) = 5(y-3)$
ويكافئ أن : $7x + 5y - 1 = 0$. تسمى المعادلة الديكارتية للمستقيم (AB) .

3) $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ شعاع من المستوي ، عين مجموعة النقط N بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AN}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا.

مجموعة النقط N هي المستقيم الذي يشمل النقطة A ويوازي منحى الشعاع $\vec{v}$.
باعتبار $(x ; y)$ إحداثيتي النقطة N أكتب علاقة بين x و y في هذه الحالة ، ثم أكتب y بدلالة x .

لدينا : $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AN}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه أن : $3(x+2) = 2(y-3)$

ويكافئ أن : $3x - 2y + 12 = 0$ أي : $2y = 3x + 12$ ومعناه أن : $y = \frac{3}{2}x + 4$

4) $\vec{W}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ شعاع غير معدوم من المستوي ، أكتب علاقة بين x و y لمجموعة النقط $L(x ; y)$ بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{BL}$ و $\vec{W}$ مرتبطين خطيا.

لدينا : $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix} x-3 \\ y+4 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{W}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BL}$ و $\overrightarrow{W}$ مرتبطان خطيا معناه أن : $\beta(x-3)=\alpha(y+4)$
ويكافئ $\beta x-\alpha y-4\alpha-3\beta=0$

1. التعريف :

$\vec{v}$ شعاع غير معدوم من المستوي ، مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا ، هي مستقيم (Δ) يوازي منحى $\vec{v}$.

كل شعاع غير معدوم منحاه المستقيم (Δ) يسمى شعاع التوجيه للمستقيم (Δ) .

ملاحظات :

- إذا كان $\vec{v}$ شعاع التوجيه المستقيم (Δ) فإن من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم k ، $k.\vec{v}$ هو أيضا شعاع التوجيه للمستقيم (Δ) . (لمستقيم عدد غير منته من أشعة التوجيه)
- يعرف مستقيم بإعطاء نقطتين منه أو بإعطاء نقطة منه وأحد أشعة توجيهه.

مثال : A و B نقطتان متمايزتان من المستوي ، مجموعة النقط M بحيث يكون $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا هي المستقيم *(AB)* شعاع توجيهه كل شعاع $k.\overrightarrow{AB}$ حيث $k\in\mathbb{R}^*$

2. معادلة مستقيم :

مبرهنة : ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

- كل مستقيم له معادلة من الشكل $ax+by+c=0$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية معلومة و x ، y متغيرين حقيقيين ؛ شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$
- a ، b ، c أعداد حقيقية معلومة حيث : $a\neq 0$ أو $b\neq 0$.
مجموعة النقط *(M(x ; y* التي إحداثياتها *(x ; y)* تحقق المعادلة : $ax+by+c=0$ هي مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

تعريف : العلاقة $ax+by+c=0$ حيث : $a\neq 0$ أو $b\neq 0$ تسمى المعادلة الديكارتية لمستقيم.

إذا كان $b\neq 0$ فالمعادلة تصبح من الشكل $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ وتسمى المعادلة المبسطة ، العدد $-\dfrac{a}{b}$ يسمى معامل التوجيه للمستقيم.

ملاحظات :

01. إذا كان $b=0$ فإن $a\neq 0$ والمعادلة الديكارتية للمستقيم تكون من الشكل : $ax+c=0$ أي : $x=-\dfrac{c}{a}$
شعاع التوجيه لهذا المستقيم هو $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ ولدينا : $\vec{u}=a.\vec{i}$ معناه أن هذا المستقيم يوازي حامل محور التراتيب.

نتيجة :

يكون مستقيم موازيا لحامل محور التراتيب إذا وفقط إذا كانت له معادلة من الشكل $x=a$ حيث a ثابت حقيقي.

02.إذا كان $b \neq 0$ لدينا شعاع توجيهه المستقيم هو $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ و ولدينا : $\vec{u} = -b\vec{v}$ حيث $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{a}{b}\end{pmatrix}$

نتيجة : $y=\alpha x+\beta$ معادلة للمستقيم (Δ) معناه أن $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix}$ هو شعاع التوجيه للمستقيم (Δ)

03.إذا كان المعلم متعامد ومتجانس معامل التوجيه لمستقيم يدعى كذلك ميل هذا المستقيم

تمرين 68 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

(D) مستقيم معادلته $3x-5y=7$ ، أوجد شعاع توجيه للمستقيم *(D)* ، وعين معامل توجيهه.

الحل :

شعاع التوجيه المستقيم *(D)* هو $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix}$ ومعامل توجيهه : $\frac{3}{5}$ يمكن أن نعتبر $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ \frac{3}{5}\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه .

تمرين 70 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

(D) مستقيم معادلته $3x=-7$ ، أوجد شعاع توجيه للمستقيم *(D)* ، هل للمستقيم *(D)* معامل توجيه ؟

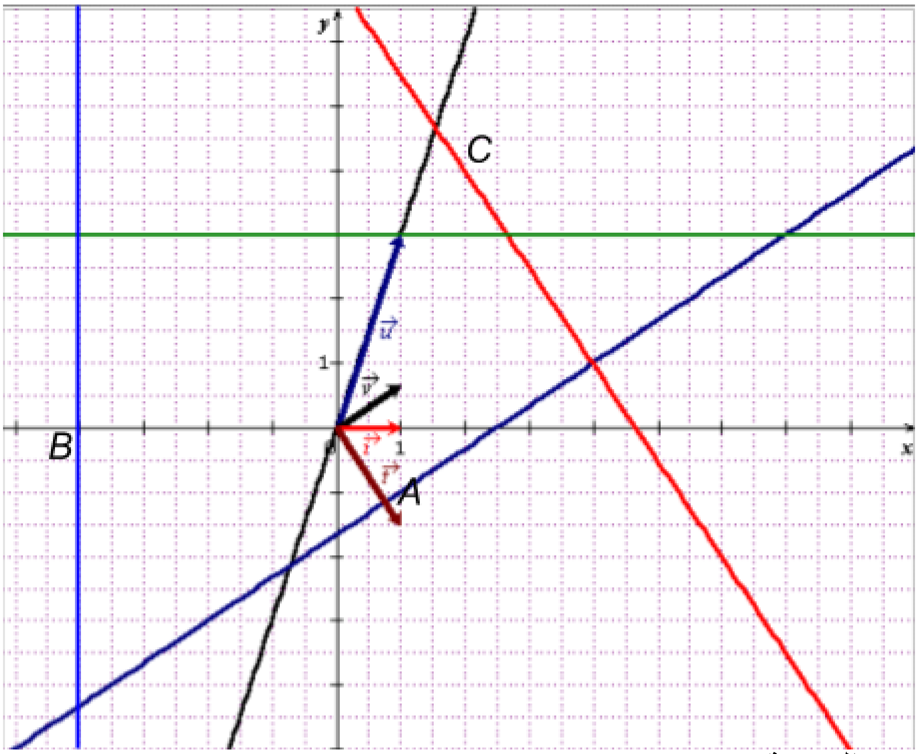
الحل :

شعاع التوجيه المستقيم *(D)* هو $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}$ و يمكن أن نعتبر $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه .

المستقيم *(D)* يوازي حامل محور التراتيب ليس له معامل توجيه.

تمرين 71 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. أرسم المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) ، (D_4) ، (D_5) حيث: (D_1) : $y = 3x$ ؛ (D_2) : $y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ ؛ (D_3) : $x = -4$ ؛ (D_4) : $y=-\frac{3}{2}x+7$ ؛ (D_5) : $y=3$

الحل :



(D_1) : $y = 3x$

شعاع توجيهه : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$

ويشمل النقطة $(O(0\,;\,0$

(D_2) : $y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$

شعاع توجيهه : $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

ويشمل النقطة $(A(1\,;\,-1$

(D_3) : $x = -4$

شعاع توجيهه : $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $B(-4\ ;\ 0)$

(D_4) : $y=-\frac{3}{2}x+7$ شعاع توجيهه : $\vec{t}\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $C(2\ ;\ 4)$

(D_5) : $y=3$ شعاع توجيهه : $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $D(0\ ;\ 3)$

تمرين 73 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

لتكن النقطة $A(3\ ;\ -2)$ والشعاع $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$.

جد معادلة للمستقيم الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}$ شعاع توجيه له .

الحل :

الطريقة 1 : لتكن $M(x\ ;\ y)$ نقطة من المستوي . لدينا : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y+2\end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$M\in(AB)$ معناه أن : $-(x-3)=2(y+2)$ ومعناه أن : $x+2y+1=0$.

الطريقة 2 : معادلة المستقيم هي من الشكل $ax+by+c=0$ شعاع التوجيه $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

ومنه : $b=-2$ و $a=-1$ إذن : $-x-2y+c=0$ بما أن المستقيم يشمل A فإن : $-3+4+0=c$

ومنه : $c=-1$ إذن : المعادلة هي : $-x-2y-1=0$

الطريقة 3 : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه للمستقيم كذلك $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه لهذا المستقيم ومنه : معادلته هي :

$y=-\frac{1}{2}x+b$ بما أن المستقيم يشمل A فإن : $-2=-\frac{1}{2}\times3+b$ أي : $b=-\frac{1}{2}$ ومنه : $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

تمرين 76 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

1) جد معادلة للمستقيم (D) الذي معامل توجيهه $-\frac{3}{2}$ ويشمل النقطة $A(-2\ ;\ -3)$.

2) عين إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل وكذا إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .

الحل :

1) جد معادلة للمستقيم (D) الذي معامل توجيهه $-\frac{3}{2}$ ويشمل النقطة $A(-2\ ;\ -3)$.

(D) : $y=-\frac{3}{2}x+b$ ولدينا : $A\in(D)$ معناه : $-3=-\frac{3}{2}\times(-2)+b$ أي : $b=-6$

ومنه : (D) : $y=-\frac{3}{2}x-6$

2) عين إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل وكذا إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .
إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل: $(-4 ; 0)$ و إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب: $(0 ; -6)$

3. شرط توازي مستقيمين

نشاط 2 :

(1 $(D) : ax + by + c = 0$ و $(D') : a'x + b'y + c' = 0$. بين أن $(D) // (D')$ يكافئ : $ab' = a'b$

(2 $(D) : y = \alpha x + \beta$ و $(D') : y = \alpha' x + \beta'$. بين أن $(D) // (D')$ يكافئ : $(\alpha = \alpha')$

حل النشاط :

(1 $(D) // (D')$ معناه : $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا ويكافئ أن : $-ab' = -a'b$ أي $ab' = a'b$:

(2 $(D) // (D')$ معناه : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha' \end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا ويكافئ أن $(\alpha = \alpha')$

مبرهنة 1 : (D) و (D') مستقيمان معادلتاهما $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ على الترتيب.
يكون المستقيمان (D) و (D') متوازيين إذا وفقط إذا كان $ab' = a'b$

مبرهنة 2 : (D) و (D') مستقيمان معادلتاهما $y = \alpha x + \beta$ و $y = \alpha' x + \beta'$ على الترتيب.
يكون المستقيمان (D) و (D') متوازيين إذا وفقط إذا كان لهما نفس معامل التوجيه (أي : $\alpha = \alpha'$)

تمرين 75 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. (D) مستقيم معادلته $y = \sqrt{2}x - 3$
أكتب معادلة للمستقيم (D') الذي يوازي المستقيم (D) ويقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها 4 .

الحل :

المستقيمان (D) و (D') متوازيان إذن لهما نفس معامل التوجيه $\sqrt{2}$ ومنه: معادلة (D') هي : $y = \sqrt{2}x + b$
إحداثيتي نقطة تقاطع (D') و محور الفواصل هما : $(4 ; 0)$ إذن : $0 = \sqrt{2} \times 4 + b$ أي : $b = -4\sqrt{2}$
ومنه معادلة (D') هي : $y = \sqrt{2}x - 4\sqrt{2}$

تمرين 77 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
بين في كل من الحالتين الآتيتين أن المستقيمين (D) و (D') متوازيان .

(1 $(D) : 2x - 3y = 1$ ؛ $(D') : -x + \frac{3}{2}y = 0$

(2 $(D) : -3x + 7 = 0$ ؛ $(D') : x - \frac{\sqrt{3}}{5} = 0$

الحل :

(1 $(D) : 2x - 3y = 1$ ؛ $(D') : -x + \frac{3}{2}y = 0$

$(D) // (D')$ يكافئ : $2 \times \frac{3}{2} = (-1) \times (-3)$ أي : $3 = 3$ و هذا صحيح

(2 $(D) : -3x + 7 = 0$ ؛ $(D') : x - \frac{\sqrt{3}}{5} = 0$

لدينا : $ab' = (-3)\times 0 = 0$ و $ba' = 0 \times 1 = 0$ إذن : $ab' = a'b$ معناه : $(D) // (D')$