CORRECTION CENTRALE TSI / PHYSIQUE II / 2002

Partie I. Bilans énergétiques

I.A Bilan énergétique d'un conducteur ohmique

1. a) α s'exprime en K^{-1}. La formule $R = \rho (l/s)$ est la résistance du conducteur ohmique cylindrique si le vecteur densité de courant volumique $\vec{j}$ est parallèle à l'axe du cylindre et uniforme dans la section s. A.N. $R_0 = 0{,}12\ \Omega$.

b) $\delta Q = P\,dt = -hS(T(t) - T_0)\,dt$. Si $T > T_0$, le transfert thermique se fait du corps le plus chaud vers le corps le plus froid donc $\delta Q < 0$ d'où le signe négatif dans la puissance thermique.

c) $\delta W_e = RI^2\,dt$. $\delta W_m = -P_{ext}dV \approx 0$ si on néglige la dilatation du solide.

d) A tout système fermé, on peut associer une fonction d'état extensive, l'énergie totale E qui est conservative : lors de toute transformation du système isolé, l'énergie totale se conserve. $E = E_{cmacro} + E_{pext} + U$ (U énergie interne)

Pour une transformation quelconque : $\Delta E = W + Q$ (W travail des forces appliquées à la surface du système).
Fonction d'état : grandeur qui ne dépend que des paramètres d'état
Extensive : grandeur qui est proportionnelle à la quantité de matière.

2. a) D'après le premier principe appliqué à la résistance entre t et t+dt :

$dE = dU = K\,dT = \delta Q + \delta W = -hS(T(t) - T_0)\,dt + RI^2\,dt$

avec $R = \rho_0(1 + \alpha(T - T_0))(l/s)$
En posant $X = T - T_0$:

$$\frac{dX}{dt} + \frac{hS - \rho_0(l/s)\alpha I^2}{K} X = \frac{\rho_0(l/s)I^2}{K}$$

de la forme $X'(t) + X/\tau = X_\infty/\tau$

avec $\tau = \dfrac{K}{hS - \rho_0(l/s)\alpha I^2}$ et $X_\infty = \dfrac{\rho_0(l/s)I^2}{hS - \rho_0(l/s)\alpha I^2}$

$\tau > 0$ si $I^2 < hS / R_0\alpha$

Si la puissance reçue par effet Joule est plus grande que la puissance évacuée vers l'extérieur, alors T va augmenter (donc X).

b) τ représente la constante de temps caractéristique de la décroissance exponentielle de X donc de T ; $T_\infty = X_\infty + T_0$ représente la limite mathématique de T quand t tend vers l'infini.

Application numérique : $\tau = 8{,}9$ s $\quad T_\infty = 302{,}15$ K

c) $T_\infty < T_{lim}$ donc $X_\infty < T_{lim} - T_0$

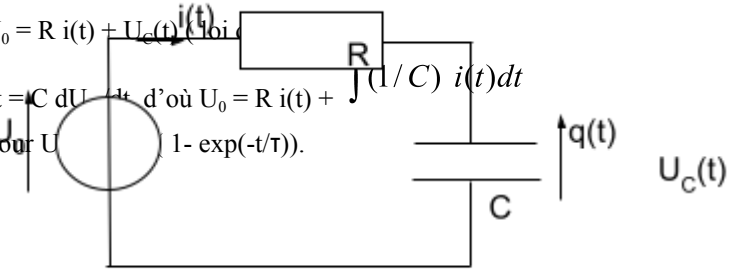
or $X_\infty = \dfrac{\rho_0(l/s)I^2}{hS - \rho_0(l/s)\alpha I^2}$ d'où $I^2 < \dfrac{hS(T_{lim} - T_0)}{R_0(1 + \alpha(T_{lim} - T_0))}$ et $I = j\,s$

d'où $j < \sqrt{\dfrac{hS(T_{lim} - T_0)}{R_0(1 + \alpha(T_{lim} - T_0))}}.(1/s) = j_{max}$

Application numérique : $j_{max} = 4{,}2\ 10^6\ A.m^{-2}$.

I.B. Un bilan énergétique pour un circuit série RC

1. a) Schéma du circuit :



b) $U_0 = R\,i(t) + U_c(t)$ (loi d

or $i(t) = dq/dt = C\,dU_c/dt$ d'où $U_0 = R\,i(t) + \int (1/C)\ i(t)dt$

La solution pour U (1- exp(-t/τ)).

Le temps théorique de charge du condensateur est infini. Mais en fait, $U_C^{\infty} = U_0$ est atteinte au bout d'environ $t_C = 5\tau = 5\ RC$ à 99%.

2. a) $U_0\ i\ dt = R\ i^2\ dt + U_C\ i\ dt = R\ i^2\ dt + U_C\ .C\ d(U_C)/dt.dt$
$= R\ i^2 dt + d(1/2\ CU_C^2)$
Bilan énergétique : l'énergie fournie par le générateur se retrouve sous forme de chaleur dissipée par effet Joule et d'énergie stockée par le condensateur.

b) $E_{cond} = \int_0^{\infty} d((1/2)CU_C^2)/dt.dt = (1/2)CU_C^2(\infty)$ $=(1/2)Q^2/C$

L'énergie est localisée dans le condensateur. Elle peut être considérée comme une énergie potentielle car elle sert de réservoir d'énergie au condensateur.

I.C Un bilan énergétique pour le condensateur.

1. Le flux du champ électrique sortant d'une surface fermée est égal au rapport de la charge intérieure à la surface par ε_0 , la permittivité du vide. Ce théorème est valable pour tous les régimes temporels (conséquence de l'équation de Maxwell-Gauss).

Par symétrie, $\vec{E}$ est un vecteur donc appartient aux plans de symétrie de la distribution contenant M soit les plans (M, $\vec{e}_r, \vec{e}_z$) et (M, $\vec{e}_\theta, \vec{e}_z$) si on néglige les effets de bord (armatures « infinies ») : $\vec{E}$ s'écrit $E(r,\theta,z)\ \vec{e}_z = E(r,z)\ \vec{e}_z$ par invariance de rotation autour de Oz.

L'application de l'équation de Maxwell-Gauss (div $\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$) permet d'affirmer que E ne dépend pas de z mais ne prouve pas E uniforme.

Pour écrire $\vec{E} = (\sigma(t)/\varepsilon_0)\vec{e}_z$, il faut se placer dans l'approximation des régimes quasi-permanents c'est-à-dire négliger le phénomène d'induction .

2. a) équation locale de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t)$$

pour M intérieur au condensateur, $\vec{j} = 0$ d'où $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t$

En utilisant le théorème de Stokes, on obtient :

$$\oint_\Gamma \vec{B}.d\overrightarrow{OM} = \iint_S \mu_0\varepsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t.d\vec{S}$$

b) – la source de champ magnétique est le courant de déplacement correspondant à la variation du champ électrique avec le temps

- $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur : il appartient aux plans d'antisymétrie de la distribution contenant M et est perpendiculaire aux plans de symétrie contenant M, comme par exemple le plan (M, $\vec{e}_r$, $\vec{e}_z$) : il est donc porté par $\vec{e}_\theta$.
- Du fait de la symétrie cylindrique, le problème est invariant par rotation autour de z'z : le champ est donc indépendant de θ : $\vec{B}(M,t) = B(r,z)\vec{e}_\theta$

c) En appliquant le théorème d'Ampère à un cercle de rayon r orienté comme $\vec{e}_\theta$,

$\oint_\Gamma \vec{B}.d\overrightarrow{OM} = B(r,z)\ 2\pi r = \iint_S \mu_0\varepsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t.d\vec{S} = \mu_0\ (d\sigma/dt)\ \pi r^2$ (r<a)

d'où $\vec{B}_{int}(M,t) = \mu_0(d\sigma/dt)(r/2)\vec{e}_\theta$

pour M extérieur , $\iint_S \mu_0\varepsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t.d\vec{S} = \mu_0\ (d\sigma/dt)\ \pi a^2$

d'où $\vec{B}_{ext}(M,t) = \mu_0(d\sigma/dt)(a^2/2r)\vec{e}_\theta$

Relation de passage du champ magnétique : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0(\vec{i}_s \wedge \vec{n}_{12})$ ($\vec{i}_s$ vecteur densité surfacique de courant). On doit avoir ici continuité du champ magnétique (pas de courants surfaciques) en r = a ce que l'on vérifie.

3. a) $\vec{\Pi} = (\vec{E} \wedge \vec{B})/\mu_0 = -\sigma(d\sigma/dt)(r/2\varepsilon_0)\vec{e}_r$

b) La puissance électromagnétique rayonnée à travers la surface Σ est égale au flux du vecteur de Poynting à travers la surface Σ.

D'où $P_{em}(t) = -\sigma(d\sigma/dt)(a/2\varepsilon_0)2\pi ae = -\sigma(d\sigma/dt)(\pi a^2/\varepsilon_0)$

Le signe de la puissance rayonnée correspond à une puissance rentrante dans le condensateur.

$E_{em} = \int_{Q=0}^{Q} P_{em}\,dt$ or $\sigma(t) = q(t)/\pi a^2$ d'où $E_{em} = (1/2)Q^2/C$ avec $C = \varepsilon_0\pi a^2/e$.

L'énergie est positive et est stockée dans le condensateur sous forme d'énergie électrique..

Partie II. Etude du mouvement d'un satellite

II.A. Partie qualitative

1. a) - Force de gravitation exercée par la terre sur le satellite :

$$\vec{F} = -k\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$$

- Analyse dimensionnelle : F a la dimension $M.L.T^{-2}$ masse par accélération)

D'où k a comme dimension $M^{-1}L^3T^{-2}$: $\alpha = -1$; $\beta = 1$; $\gamma = -2$

- Le mouvement de G est un mouvement à force centrale car $\vec{F}$ = f(r) $\vec{e}_r$ et son support passe par O.

- Conséquences : conservation du moment cinétique en O le mouvement est plan, il suit la loi des aires – les aires balayées pendant le même intervalle de temps sont égales-, on définit la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$ (coordonnées polaires dans le plan du mouvement)), conservation de l'énergie mécanique le système est conservatif, la seule force centrale dérive d'une énergie potentielle)

b) Référentiel géocentrique : référentiel d'origine le centre de la Terre en translation par rapport au référentiel de Copernic (centre du Soleil, trois axes dirigés vers trois étoiles fixes). Il n'est pas solidaire de la Terre dans son mouvement de rotation autour des pôles, mais dans sa rotation autour du soleil : il n'est pas en toute rigueur galiléen son mouvement n'étant pas rectiligne uniforme par rapport au référentiel considéré comme galiléen de Copernic ; Pour pouvoir le considérer comme galiléen, il suffit de raisonner sur une échelle de temps très petite devant la période du mouvement de la Terre soit devant 365 jours environ.

2. a) $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(Ep) = -(dE_p/dr)\vec{e}_r$

d'où E_p = -kMm/r + cte (on peut prendre E_p nulle à l'infini donc la cte =0) ; avec z = r –R , $E_p(z)$ = -kMm/(R+z)

- La seule force agissant sur le système est conservative : le système est conservatif, l'énergie mécanique se conserve.

- Pour un état libre, r (ou z) peut devenir infini(hyperbole ou parabole)) : $E_m(\infty) = E_c = E_m$ donc Em doit donc être positive ou nulle

Pour un état lié , $r \in [r_1, r_2]$ (ellipse ou cercle): E_m est négative .

b) L'atmosphère a une hauteur de l'ordre de 100 km. L'action de l'atmosphère sur le satellite serait une force de frottement, non conservative . Or d'après le théorème de l'énergie mécanique, $dEm/dt = P_{\text{non conservative}} < 0$: l'énergie mécanique diminuerait, serait encore plus négative .

Pour un satellite à une altitude z=r-R, sur une trajectoire circulaire, v = $\sqrt{kM/r}$

E_c = kMm/2r , E_m = -kMm/2r : si E_m diminue, r ou z diminue mais v augmente !

II.B. Etude de la trajectoire circulaire du satellite

1. a) En appliquant le théorème du moment cinétique en O au satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F} = 0$$

d'où $\vec{L}_O(t) = \vec{L}_O(t=0)$: le moment cinétique du satellite se conserve

Si $\vec{L}_O(t=0) \neq 0$, alors comme $\vec{L}_O(t) = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v}$, les vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\vec{v}$ restent toujours perpendiculaires à une direction constante, et donc appartiennent au même plan perpendiculaire à $\vec{L}_O(t) = \vec{L}_O(t=0)$.

b) Dans le plan du mouvement, dans la base polaire, on a :

$\overrightarrow{OG} = r\vec{e}_r$ d'où $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$

or $2\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = d(r^2\dot{\theta})/dt$ d'où $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (1/r)d(r^2\dot{\theta})\vec{e}_\theta$

En appliquant le théorème du centre d'inertie : m $\vec{a}(G/R) = \vec{F}_{ext}$

Sur $\vec{e}_r$: $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -kM/r^2$; sur $\vec{e}_\theta$: $r^2\dot{\theta} = cte = C$

2. a) $r^2\dot{\theta} = cte = C$ donc $\dot{\theta} = cte$: le mouvement est uniforme.

$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -kM/r^2$ donc $\dot{\theta} = \omega_0 = (kM/r_0^3)^{1/2}$ et $C = (kMr_0)^{1/2}$.

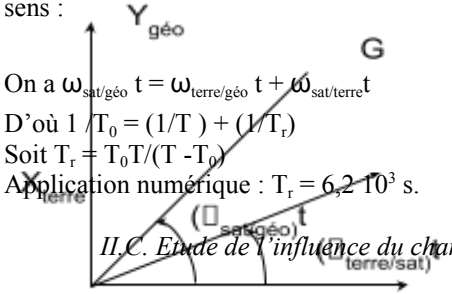
b) Application numérique :

$T_0 = 2\Pi(r_0^3/kM)^{1/2} = 5{,}79\ 10^3$ s ($\approx$ 1,6 heure)

$E_m = -kMm/2r_0 = -2{,}86\ 10^{10}$ J.

$C = (kMr_0)^{1/2} = 5{,}27\ 10^{10}\ m^2s^{-1}$.

3. Soit t=0, l'instant où le satellite est à l'aplomb d'un observateur terrestre. A l'instant t, le satellite et l'observateur ont tourné dans le même plan, dans le même sens :



On a $\omega_{sat/géo}\ t = \omega_{terre/géo}\ t + \omega_{sat/terre} t$

D'où $1/T_0 = (1/T) + (1/T_r)$

Soit $T_r = T_0 T/(T - T_0)$

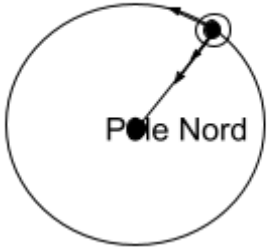
Application numérique : $T_r = 6{,}2\ 10^3$ s.

II.C. Etude de l'influence du champ magnétique terrestre sur le satellite.

1. Le module du champ magnétique terrestre est de $2\ 10^{-5}$ T. L'une des sources du champ magnétique terrestre est le mouvement du noyau liquide conducteur du centre de la Terre.

Les champs magnétiques continus les plus intenses sont de l'ordre de quelques dizaines de Tesla (avec des supraconducteurs).

2. On a $\vec{F} = Q(\vec{v} \wedge \vec{B}_0)$ avec Q<0 :



3. Les charges négatives vont se déplacer dans le sens de la force $\vec{F}$ d'où un déficit de charges négatives de l'autre côté : en régime permanent, il apparaît un champ électrique dans le conducteur tel que $Q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}_0) = 0$.

$\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B}_0 = -vB_0\vec{e}_r$

Dimension caractéristique d'environ 1m

soit $U = E\ d = v\ B_0\ d = r_0\ (2\pi/T_r)\ B_0\ d = 0{,}14$ V .

Valeur plutôt faible(?)

II.D. Etude de la stabilité de la trajectoire circulaire

1. a) $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -kM/r^2$ avec $r = r_0(1+\varepsilon)$ et $r^2\dot{\theta} = C = (kMr_0)^{1/2}$

d'où $r_0\ddot{\varepsilon} = -kM/r_0^2(1+\varepsilon)^3 = -kM/r_0^2(1+\varepsilon)^2$

b) $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ d'où l'équation précédente devient :

$\ddot{\varepsilon} + \omega_1^2\varepsilon = 0$ avec $\omega_1^2 = kM/r_0^3 = \omega_0^2$

Il s'agit de la même pulsation que celle du mouvement circulaire : la trajectoire se déforme de façon elliptique entre $r_0(1+\varepsilon_0)$ et $r_0(1-\varepsilon_0)$. La trajectoire circulaire n'est pas stable.

$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega_0 t)$ compte tenu des conditions initiales.

2. a) $\dot{\theta} = C/r^2 = C/r_0^2\ (1-2\varepsilon) = \omega_0(1-2\varepsilon_0\cos(\omega_0 t))$

On retrouve bien $\dot{\theta} = \omega_0$ si $\varepsilon_0 = 0$.

b) On a $r = r_0(1+\varepsilon_0\cos(\omega_0 t))$ et $\theta = \omega_0 t - 2\varepsilon_0 \sin(\omega_0 t)$ +cte (on peut prendre cte =0)

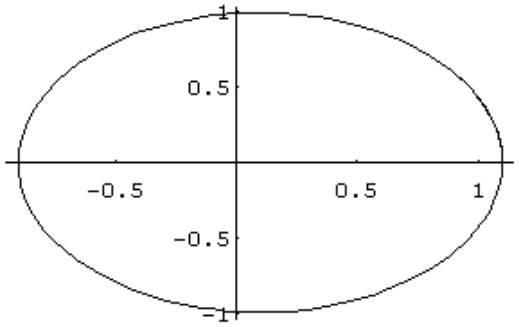
Pour t=0, $r = r_0(1+\varepsilon_0)$ et $\theta = 0$

Pour $t=T_0/4$, $r = r_0$ et $\theta = \pi/2 - 2\varepsilon_0$

Pour $t = T_0/2$, $r = r_0(1 - \varepsilon_0)$ et $\theta = \pi$

Pour $t = 3T_0/4$, $r = r_0$ et $\theta = \pi/2 + 2\varepsilon_0$

D'où l'allure de la trajectoire ($r_0 = 1$, $\varepsilon_0 = 0{,}1$) :



La trajectoire circulaire n'est pas stable, elle se déforme en une ellipse mais le phénomène n'est plus visible si ε_0 est très faible (de l'ordre de 0,01).
Un dispositif interne sera nécessaire si on veut maintenir une trajectoire circulaire.