

EITPE 96. Physique 1 commune.

I.1. Dans l'A.R.Q.S. les lois vérifiées par sont

lois locales : $\Leftarrow \Rightarrow$ lois intégrales :

Les courants produisant ce champ doivent vérifier $\text{div } \mathbf{j} = 0$ (loi des noeuds).

L'équation de continuité s'écrit : $\text{div } \mathbf{j} + \frac{d\rho}{dt} = 0$.

Pour un conducteur ohmique $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss : $\text{div } \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$, on obtient d'o $\rho = \rho_0 e^{-t/\tau}$ de temps caractéristique $\tau = \epsilon_0 / \sigma$. Pour le cuivre $\tau = 1,7 \cdot 10^{-19} \text{ s}$. La décroissance de ρ est donc très rapide. L'équation de continuité peut donc s'écrire $\text{div } \mathbf{j} = 0$ ce qui est compatible avec $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$.

Equation de Maxwell-Ampère : $\text{curl } \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ (ϵ_0 et μ_0 constants). Pour un champ sinusoïdal de pulsation ω , on a $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, $\text{curl } \mathbf{E} = -\epsilon_0 \omega \mathbf{B}$, donc

Pour des fréquences usuelles ($f \approx 1 \text{ MHz}$) on aura $\omega \tau \ll 1$ donc on peut négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction.

I.2.1. Les plans contenant l'axe OM et perpendiculaires au plan de la spire sont des plans d'antisymétrie des courants donc appartient à ces plans. On en déduit que $\mathbf{B}$ est selon l'axe Oz. Le système étant inchangé par rotation d'un angle θ autour de Oz, B ne dépend pas de θ . Donc finalement $B = B(z)$ sur l'axe.



La loi de Biot et Savart donne = .

Si on note $\vec{B}$, $d\vec{B}_z = d'o B(z) =$ avec $r =$.

On obtient
(cf courbe ci-dessus)

I.2.2a. Le plan contenant Oz et OP est un plan d'antisymétrie des courants. est donc dans ce plan et n'a donc pas de composante orthoradiale. Le système étant inchangé par rotation d'un angle θ autour de Oz, B ne dépend pas de θ

donc $B_r(r,z) = B_z(r,z)$.

I.2.2b. $\text{div}=0$ donc $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$\mu_0 =$ aux environs de P donc $\mu_0 = 0$

I.2.2c. $\nabla^2 B_z = -\mu_0 j_z$ $\nabla^2 B_z = -\mu_0 j_z$

I.2.2d. $\nabla^2 B_z = -\mu_0 j_z$ $\nabla^2 B_z = -\mu_0 j_z$
d'o $B_z(r,z) dz = B_z(0,z) dz -$

I.2.2e. $B_r(r,z) =$

Application numérique : $B_z(r,0) = B_0 (1 - \frac{r^2}{R^2})$
 $\mu_0 = 0,01$ donne $r^2 = 0,1 R$ soit $r = 0,316 R$.

II.1. $R = 0,93 \Omega$.

II.2.1. μ_0

$\Delta = -\mu_0$ donc $\Delta = -\mu_0$

En régime alternatif sinusoïdal, en notation complexe, on obtient $\Delta = \sigma \mu_0 i \omega$.

Si ne dépend que de x, cette équation devient :

En posant $K^2 = \sigma \mu_0 i \omega$, on a la formule demandée.

II.2.2. $K = \pm \sqrt{\sigma \mu_0 i \omega}$ avec homogène une longueur. Les solutions sont de la forme $j(x) = A e^{-(1+i)x/\delta} + B e^{+(1+i)x/\delta}$.

f (Hz)	50	5000	$500 \cdot 10^3$	$50 \cdot 10^6$
δ	9,2mm	0,92mm	92μm	9,2μm

II.2.3. On ne retient que les solutions paires en x qui peuvent aussi s'écrire

$j(x) = A \cosh(1+i)x/\delta$

$I = a = A \sinh(1+i)x/\delta$

L'amplitude réelle est le module du complexe :

$I^2 = |A|^2 \cosh(1+i)x/\delta \cosh(1-i)x/\delta = |A|^2 a^2 \delta^2 (\cosh - \cos)$ ce qui donne A.

$|j(x)|^2 =$

L'amplitude réelle de j est donc et $E(x) = j(x)/\sigma$.

■



$$= RI^2$$

Pour une longueur unitaire $P =$

La résistance par unité de longueur est donc

En régime continu $\omega \rightarrow 0$ donc $\delta \rightarrow \infty$

$$\text{Ch}(e/\delta) \approx 1+; \cos(e/\delta) \approx 1-; \text{Sh}(e/\delta) \approx; \sin(e/\delta) \approx$$

D'où : on retrouve la formule usuelle.

III.1. La charge q du condensateur vérifie : $e(t) = L + (R+R') + [1]$

L'intensité i vérifie $= L + (R+R') + [2]$

En multipliant [1] par i on a $e i = Li + (R+R')i^2 +$

d'où :

c'est à dire $P_{\text{général}} = P_{\text{Joule}} +$

III.2.1. En régime sinusoïdal forcé en notant $q = q_0 e^{j\omega t}$

$$[1] E_0 = q_0 (-L\omega^2 + (R+R')j\omega + 1/C) = q_0/C (1 - LC\omega^2 + (R+R')Cj\omega)$$

Si on pose $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $Q = 1/(R+R')C\omega_0$, [1] s'écrit

et [2]

Interprétation énergétique : $Q =$

Résonance en charge : $q(\omega)$ a une amplitude maximale

Résonance en intensité : $i(\omega)$ a une amplitude maximale

On peut écrire $i_0 = \omega_0 C E_0 Q / (1 + jQ(-))$.

On a donc pour tout Q une résonance en intensité pour $\omega = \omega_0$.

Par contre q sera maximale pour $f(X) = (1-X)^2 + X$ minimale (avec $X =$)

$$f'(X) = 2(1-X) + 1 = 0 \text{ pour } X = 1/2.$$

On a donc une résonance pour une pulsation non nulle seulement si $Q > 1/2$.

III.2.2. $VR' = R'i$ donc $H(j\omega) = R'\omega_0 C Q / (1 + jQ(-))$ soit

$$|H| =$$

$$\omega \rightarrow 0 \quad |H| \approx \text{et } G_{dB} \approx 20\log + 20\log\omega$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad |H| \approx \text{et } G_{dB} \approx 20\log - 20\log\omega$$

Les deux asymptotes se croisent en ω_0 pour $G = 20\log - 20 \log Q$

$$G(\omega_0) = 20\log < 0 \text{ dB}$$





La phase est donnée par avec $\cos \varphi > 0$ (cf courbe ci-dessus)

III.2.3. Détermination expérimentale :
A l'aide d'un oscillo

On mesure $2V_R'$ crête-crête en Y,

$2E_o$ crête-crête en X, d'où le calcul de G. ω est donné par l'indication du GBF ou lue sur la base de temps de l'oscillo. φ est lue sur la base de temps de l'oscillo.

Avec un multimètre utilisé en dBmètre on peut déterminer directement GdB.

IV.1.1.

En négligeant l'impédance d'entrée de l'oscillo on a $v_2 = M$ et $v_1 = R_{i1} + L$

L'allure des traces obtenues montre que le système est dérivateur

donc $v_1 \approx R_{i1}$ et $v_2 \approx$

Pour le signal triangulaire de période T , d'amplitude crête-crête E_0 , l'amplitude crête-crête du crête obtenu est $\Delta v_2 =$
d'o

d(cm)	4	5	6	7	8	10	12	16	20
M(mH)	0,77	0,59	0,46	0,385	0,3	0,21	0,14	0,075	0,043



IV.1.2. Flux de la première bobine à travers la seconde :

$$\Phi = N^2 B_0 [\pi R^2 (1+u^2)^{-3/2} + \dots] \text{ où } u=d/R, B_0 =$$

$$\Phi = N^2 B_0 \pi R^2 (1+u^2)^{-3/2} (1 + \dots) = M I \text{ d'où}$$

A.N. $M(d=10\text{cm}) = 4,27 \cdot 10^{-5} \text{H}$ ce qui correspond à la valeur expérimentale.

IV.2.1. Soient i_1 et i_2 les courants dans les deux circuits. On a les équations électriques :

On cherche des solutions sinusoïdales du type $i_1 = I_1 e^{j\omega t}$ et $i_2 = I_2 e^{j\omega t}$, ce qui donne

$$(1 - k) I_1 - k I_2 = 0 \text{ et } (1 - k) I_2 - k I_1 = 0 \text{ avec } \omega_0 = 1/\text{et } k = M/L.$$

Les solutions sont non nulles si le déterminant du système est nul :

$$(1 - k)^2 - k^2 = 0 \text{ donc } 1 - k = \pm k$$

D'où deux solutions

Le mode propre ω_1 correspond à $I_1 = I_2$.

La solution correspondante est $i_1 = i_2 = a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t$

Le mode propre ω_2 correspond à $I_2 = -I_1$.

La solution correspondante est $i_1 = -i_2 = a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t$

La solution générale du système s'écrit :

Pour ω_1 , $u_1 = L + M = jL\omega_1 i_1 = u_2$

Pour ω_2 , $u_1 = L + M = jL\omega_2 i_1 = -u_2$





IV.2.2. En tenant compte des résistances on obtient le système d'équations :

$$L \dot{I}_1 + R \dot{I}_1 + M \dot{I}_2 = 0 \text{ et } L \dot{I}_2 + R \dot{I}_2 + M \dot{I}_1 = 0$$

En posant $S = i_1 + i_2$ et $D = i_1 - i_2$ le système s'écrit

$$(L+M) \dot{S} + R \dot{S} = 0 \text{ et } (L-M) \dot{D} + R \dot{D} = 0$$

$$\text{ou encore } \omega_1^2 S = 0 \text{ et } \omega_2^2 D = 0$$

Si on pose $1/\tau_1 = \dots$ et $1/\tau_2 = \dots$, l'amortissement étant faible, les solutions seront de la forme $S = (a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t)$

$$e^{-t/\tau_1} \text{ et } D = (a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t) e^{-t/\tau_2}$$

A $t=0$ $S=0$ et $D=0$ donc $a_1=0$ et $a_2=0$.

$$\text{Finalement } i_1 = B_1 \sin \omega_1 t e^{-t/\tau_1} + B_2 \sin \omega_2 t e^{-t/\tau_2} \text{ et } i_2 = B_1 \sin \omega_1 t e^{-t/\tau_1} - B_2 \sin \omega_2 t e^{-t/\tau_2}$$

$$q_1(0) = C E_0 - L C - R C i_1 - M C = 0$$

$$q_2(0) = -M C - R C i_2 - L C = 0$$

En remplaçant les i_i , la solution du système donne $B_1 = \dots$ et $B_2 = \dots$

$$u_1 = L + M = [(\cos \omega_1 t - \sin \omega_1 t) e^{-t/\tau_1} + (\cos \omega_2 t - \sin \omega_2 t) e^{-t/\tau_2}]$$

$$u_2 = [(\cos \omega_1 t - \sin \omega_1 t) e^{-t/\tau_1} - (\cos \omega_2 t - \sin \omega_2 t) e^{-t/\tau_2}]$$

qu'on peut encore écrire ($\omega \tau \ll 1$)

$$u_1 = [\cos(\omega_1 t + \varphi_1) e^{-t/\tau_1} + \cos(\omega_2 t + \varphi_2) e^{-t/\tau_2}]$$

$$u_2 = [\cos(\omega_1 t + \varphi_1) e^{-t/\tau_1} - \cos(\omega_2 t + \varphi_2) e^{-t/\tau_2}]$$



