

Практичні заняття
за курсом «Сигнали та процеси»
осінній семестр, 2022-23 навч. рік

Практичне заняття № 2

Теорія.

Ряд Фур'є у формі, що **безпосередньо** впливає з узагальненого ряду Фур'є:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)) \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T},$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt,$$

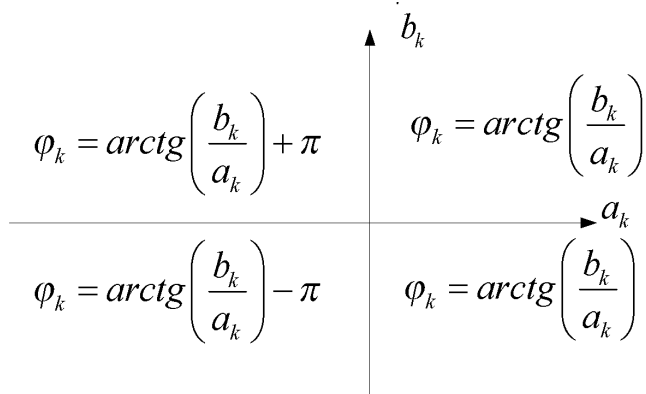
$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k\omega_1 t) dt.$$

Зауважимо, що для парних функцій при розкладанні до ряду Фур'є всі коефіцієнти ряду $b_k = 0$, для непарних функцій коефіцієнти $a_k = 0$.

Ряд Фур'є у тригонометричній (**речовій**, у Сергієнко) формі:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k)$$
$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

Точніше визначення φ_k необхідно виконувати, враховуючи знаки a_k та b_k .



Для НЕПАРНОЇ функції $a_k = 0$.

Якщо $b_k > 0 \Rightarrow \varphi_k = -\frac{\pi}{2}$.

Якщо $b_k < 0 \Rightarrow \varphi_k = \frac{\pi}{2}$

Для ПАРНОЇ функції $b_k = 0$

Якщо $a_k > 0 \Rightarrow \varphi_k = 0$

Якщо $a_k < 0 \Rightarrow \varphi_k = \pi$

Ряд Фур'є у **комплексній** формі:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_1 t} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

Зауважимо: якщо є математичний спектр, побудований на основі комплексної форми ряду Фур'є, тобто спектр з негативними частотами, то спектр, відповідний тригонометричній формі, матиме такий самий вигляд, але розташований тільки в області позитивних частот, і всі гармоніки, крім нульової, матимуть амплітуди вдвічі більші, ніж у комплексному спектрі. У фазовому спектрі залишаться лише гармоніки в області позитивних частот, амплітуди їх не зміняться.

Задача 1.

Задано сигнал $s(t) = U \cos 2\pi t$, період $T = 1$ (рис. 1). **Розкласти** сигнал у ряд Фур'є у тригонометричній формі та зобразити амплітудний та фазовий спектри сигналу $A_k(f), \varphi_k(f)$.

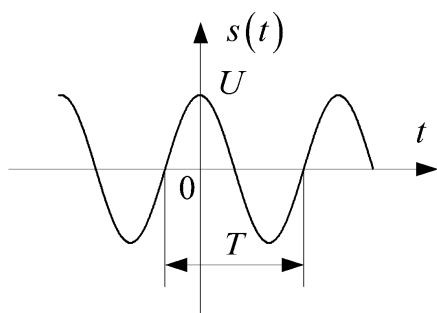


Рис. 1.

Рішення:

Ряд Фур'є у тригонометричній формі:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k)$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = \arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

Наша функція парна чи не парна?

Функція парна, тобто дорівнюють нулю коефіцієнти b_k чи a_k ?

тому всі коефіцієнти ряду $b_k = 0$, знайдемо коефіцієнти a_k .

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt =$$

Що я маю підставити замість $s(t)$?

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U \cos(2\pi t) \cos(k\omega_1 t) dt =$$

(замінімо межі інтегрування на $[0, T]$)

$$= \left| \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \right| = \frac{2}{T} U \int_0^T \frac{1}{2} (\cos(2\pi t - k\omega_1 t) + \cos(2\pi t + k\omega_1 t)) dt =$$

$$= \frac{U}{T} \left[\int_0^T \cos((2\pi - k\omega_1)t) dt + \int_0^T \cos((2\pi + k\omega_1)t) dt \right] = \left| \omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \right| =$$

$$= \frac{U}{T} \left[\int_0^T \cos((2\pi - 2k\pi)t) dt + \int_0^T \cos((2\pi + 2k\pi)t) dt \right] =$$

$$= \frac{U}{T} \left[\int_0^T \cos(2\pi(1-k)t) dt + \int_0^T \cos(2\pi(1+k)t) dt \right] =$$

Чому дорівнює інтеграл від косинуса?

$$\left| \int \cos(\alpha t) dt = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha t \right|$$

$$= \frac{U}{T} \left[\int_0^T \cos(2\pi(1-k)t) dt + \int_0^T \cos(2\pi(1+k)t) dt \right] = \left| \int \cos(\alpha t) dt = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha t \right| =$$

$$= \frac{U}{T} \left[\frac{\sin(2\pi(1-k)t)}{2\pi(1-k)} \Big|_0^T + \frac{\sin(2\pi(1+k)t)}{2\pi(1+k)} \Big|_0^T \right] = \frac{U}{T} \left[\left(\frac{\sin(2\pi(1-k)T)}{2\pi(1-k)} - \frac{\sin 0}{2\pi(1-k)} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\sin(2\pi(1+k)T)}{2\pi(1+k)} - \frac{\sin 0}{2\pi(1+k)} \right) \right] = |T=1, \sin 0=0| = U \left(\frac{\sin(2\pi(1-k))}{2\pi(1-k)} + \frac{\sin(2\pi(1+k))}{2\pi(1+k)} \right)$$

$$a_k = U \left(\frac{\sin(2\pi(1-k))}{2\pi(1-k)} + \frac{\sin(2\pi(1+k))}{2\pi(1+k)} \right)$$

При $k=0$

$$a_0 = U \left(\frac{\sin(2\pi(1-0))}{2\pi(1-0)} + \frac{\sin(2\pi(1+0))}{2\pi(1+0)} \right) = U \left(\frac{\sin(2\pi)}{2\pi} + \frac{\sin(2\pi)}{2\pi} \right) = |\sin(n\pi) = 0| = 0$$

При $k = 1$

$$a_1 = U \left(\frac{\sin(2\pi(1-1))}{2\pi(1-1)} + \frac{\sin(2\pi(1+1))}{2\pi(1+1)} \right) = U \left(\frac{\sin(0)}{0} + \frac{\sin(4\pi)}{4\pi} \right) =$$

$$= \left| \sin(n\pi) = 0, \frac{\sin(0)}{0} = 1 \right| = U(1+0) = U$$

При $k = 2$

$$a_2 = U \left(\frac{\sin(2\pi(1-2))}{2\pi(1-2)} + \frac{\sin(2\pi(1+2))}{2\pi(1+2)} \right) = U \left(\frac{\sin(-2\pi)}{-2\pi} + \frac{\sin(6\pi)}{6\pi} \right) = U(0+0) = 0$$

Таким чином,

$$a_0 = 0, a_1 = U, a_2 = 0, \dots$$

$$a_k = \begin{cases} U, k = 1 \\ 0, k \neq 1 \end{cases}, \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = a_k, \quad A_1 = a_1 = U$$

Як знайти φ_k ?

$$\varphi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k} = |a_k = U > 0| = \arctg \frac{0}{a_k} = \arctg 0 = 0$$

$$\varphi_k = \begin{cases} 0, k = 1 \\ \text{відсутня}, k \neq 1 \end{cases}$$

Отже, отримуємо одну гармоніку a_1 при $k = 1$ с амплітудою $A_1 = U$ та фазою $\varphi_1 = 0$ на

частоті $f = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{T} = \frac{1}{1} = 1$ Гц. Амплітудний $A_k(f)$ та фазовий $\varphi_k(f)$ спектри показані на рис. 2, рис. 3.

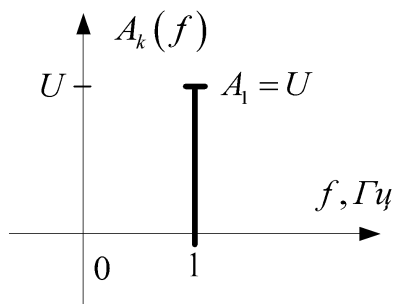


Рис. 2.

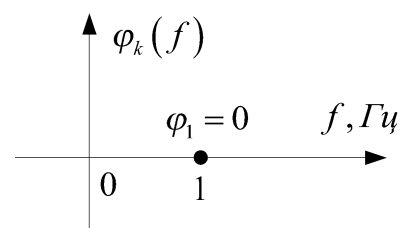


Рис. 3.

$$s(t) = U \cos 2\pi t$$

Відповідь: амплітудний спектр заданого гармонійного сигналу виду $s(t) = U \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$

це одна гармоніка на частоті $f = \frac{\omega_1}{2\pi}$ з амплітудою, що дорівнює амплітуді самого сигналу U , а фазовий спектр - один відлік на тій же частоті з амплітудою, що дорівнює φ_1 .

Задача 2.

Побудувати амплітудний та фазовий спектр сигналу

$$s(t) = 2 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{з періодом } T=1, \text{ частота } \omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi.$$

Рішення:

Скільки гармонік в цьому сигналі?

Заданий сигнал складається двох гармонійних сигналів, кожен із яких має у загальному вигляді таку структуру

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(2\pi f t + \varphi).$$

$$s(t) = 2 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Грунтуючись на цьому, і на результатах, отриманих у попередній задачі, можна сказати, що в спектрі заданого сигналу буде дві гармоніки на двох частотах:

$$1) \quad f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2 \quad \text{Гц, амплітуда } A_1 = 2, \text{ фаза } \varphi_1 = \frac{\pi}{3};$$

Яка частота, амплітуда та фаза другої гармоніки?

$$2) \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{6\pi}{2\pi} = 3 \quad \text{Гц, амплітуда } A_2 = 1, \text{ фаза } \varphi_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Зобразимо графічно:

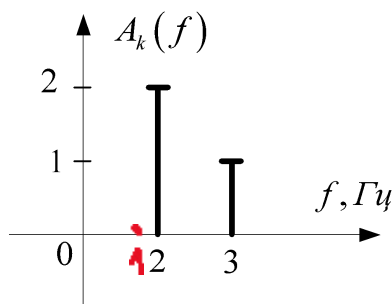


Рис. 4.

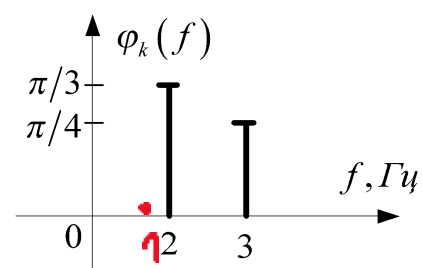


Рис. 5.

$$s(t) = 2 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Задача 3.

Побудувати амплітудний та фазовий спектр сигналу

$$s(t) = 3 + \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin(6\pi t)$$

, період $T = 1$. у речовій та комплексній формі. Записати всі коефіцієнти комплексного ряду Фур'є.

Рішення:

Скільки гармонік в цьому сигналі?

Гармонійний процес можна записати як через косинус

$$u = U \cos(\omega t + \psi),$$

так і через синус

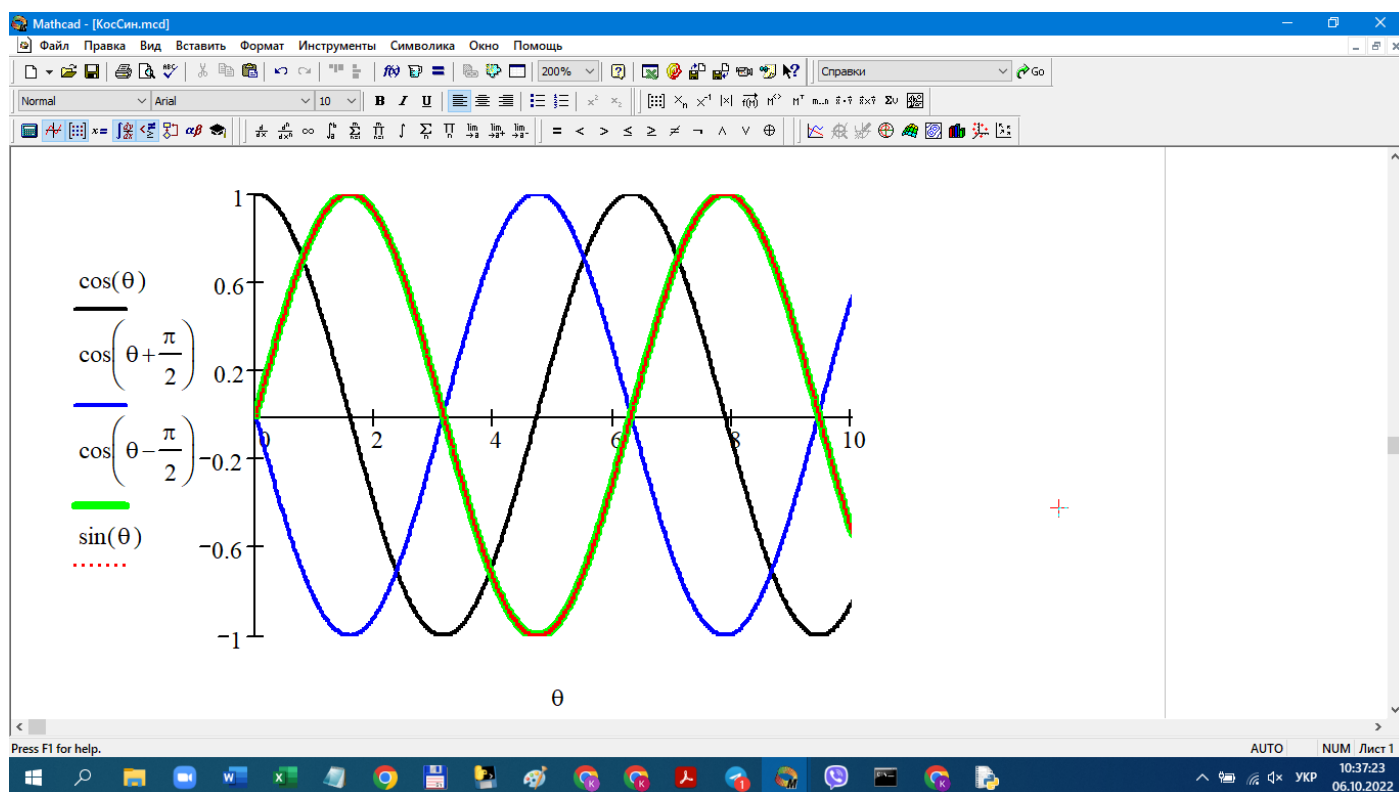
$$u = U \sin(\omega t + \psi')$$

Обидва ці процеси є гармонійними та мають однакову форму, відрізняються вони лише положенням початку координат (початком відліку часу). Тобто можна перейти від синусного

запису до косинусного, якщо покласти $\psi' = \frac{\pi}{2} + \psi$ та навпаки $\psi = \psi' - \frac{\pi}{2}$, тобто можемо переписати наш вираз у вигляді

$$s(t) = 3 + \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin(6\pi t)$$

$$s(t) = 3 + \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(6\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$



Таким чином, отримуємо

$$s(t) = 3 + \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(6\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Яка амплітуда нульової, першої та другої гармоніки?

Яка частота нульової, першої та другої гармоніки?

Яка фаза нульової, першої та другої гармоніки?

або

$$s(t) = 3 \cdot 1 + \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(6\pi t - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 3 \cos(0) + \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(6\pi t - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 3 \cos(0 \cdot t + 0) + \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(6\pi t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Сигнал містить три компоненти:

1) постійну складову, $f = 0$, амплітуда $A_0 = 3$;

2) на частоті $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$ Гц, амплітуда $A_1 = 1$, фаза $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$;

3) на частоті $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{6\pi}{2\pi} = 3$ Гц, амплітуда $A_2 = 1$, фаза $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$.

Побудуємо амплітудний та фазовий спектр сигналу у речовій формі

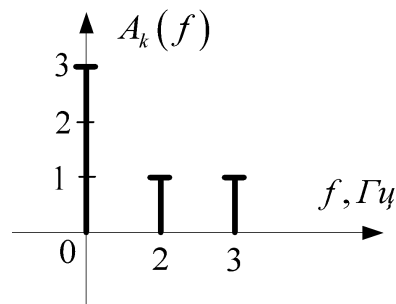


Рис. 6.

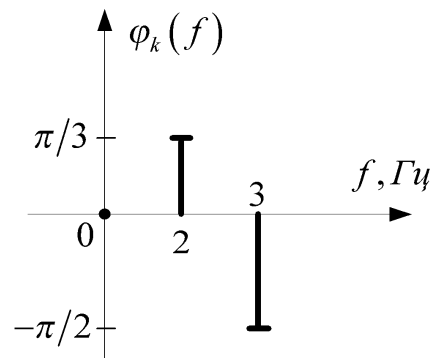


Рис. 7.

$$s(t) = 3 + \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin(6\pi t)$$

У комплексній формі на нульовій частоті ($k=0$) A_0, φ_0 залишаються без змін. Для інших гармонік $k \neq 0$ з'являються негативні частоти. Усі амплітуди діляться на 2, фази для $k \geq 1$ залишаються без змін, для $k \leq -1$ фази змінюють знак

протилежний. Таким чином, амплітудний і фазовий спектр у комплексній формі набуде вигляду:

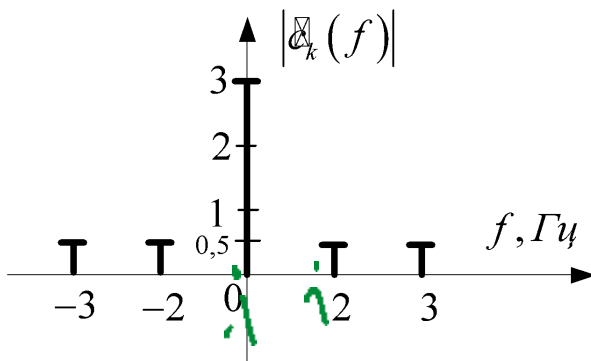


Рис. 8.

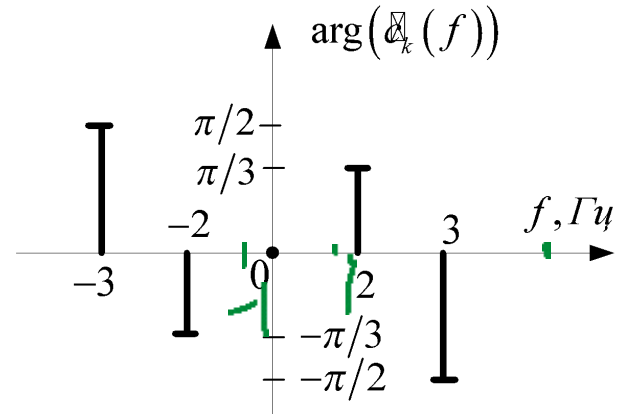


Рис. 9.

$$s(t) = 3 + \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin(6\pi t)$$

Запишемо коефіцієнти комплексного ряду.

Ряд Фур'є у комплексній формі:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \text{ коефіцієнти ряду – комплексні числа } c_n = |c_n| e^{j\varphi_n}.$$

Для нашого випадку:

$$1) \ n=0 \text{ постійна складова при } f=0 \quad |c_0|=3, \arg(c_0)=0 \Rightarrow c_0 = c_0 = 3$$

$$2) \ n=1 \text{ при } f=1 \text{ Гц } |c_1|=0;$$

$$3) \ n=-1 \text{ при } f=-1 \text{ Гц } |c_{-1}|=0;$$

$$4) \ n=2 \text{ при } f=2 \text{ Гц } |c_2|=0.5, \arg(c_2)=\frac{\pi}{3} \Rightarrow c_2 = 0.5e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$5) \ n=-2 \text{ при } f=-2 \text{ Гц } |c_{-2}|=0.5, \arg(c_{-2})=-\frac{\pi}{3} \Rightarrow c_{-2} = 0.5e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

$$6) \ n=3 \text{ при } f=3 \text{ Гц } |c_3|=0.5, \arg(c_3)=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow c_3 = 0.5e^{-j\frac{\pi}{2}};$$

$$7) \ n=-3 \text{ при } f=-3 \text{ Гц } |c_{-3}|=0.5, \arg(c_{-3})=\frac{\pi}{2} \Rightarrow c_{-3} = 0.5e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

Всі інші значення при $n = 4, -4, 5, -5, \dots$ не існують, оскільки наш сигнал складається з постійної складової та двох гармонік.

$$\text{Тобто } c_4 = c_{-4} = c_5 = c_{-5} \dots = 0.$$