Практичні заняття
за курсом «Сигнали та процеси»
осінній семестр, 2022-23 навч. рік

Практичне заняття № 2

Теорія.
Ряд Фур'є у формі, що **безпосередньо** випливає з узагальненого ряду Фур'є:

$$s(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(k\omega_1 t\right)+b_k\sin\left(k\omega_1 t\right)\right),\quad \omega_1=\frac{2\pi}{T},$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)\,dt,$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)\cos\left(k\omega_1 t\right)dt,$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)\sin\left(k\omega_1 t\right)dt.$$

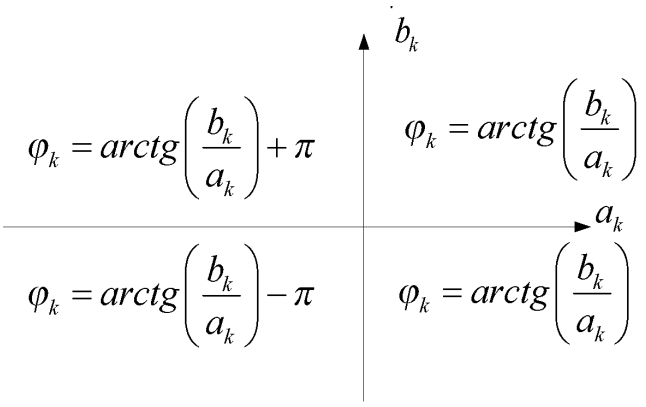
Зауважимо, що для парних функцій при розкладанні до ряду Фур'є всі коефіцієнти ряду $b_k=0$, для непарних функцій коефіцієнти $a_k=0$.

Ряд Фур'є у тригонометричній (**речовій**, у Сергієнко) формі:

$$s(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos\left(k\omega_1 t-\varphi_k\right),$$

$$A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2},\quad \varphi_k=arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

Точніше визначення φ_k необхідно виконувати, враховуючи знаки a_k та b_k.



Для НЕПАРНОЇ функції $a_k=0$.

Якщо $b_k>0\Rightarrow\varphi_k=-\frac{\pi}{2}$.

Якщо $b_k < 0 \Rightarrow \varphi_k = \frac{\pi}{2}$.

Для ПАРНОЇ функції $b_k = 0$.

Якщо $a_k > 0 \Rightarrow \varphi_k = 0$.

Якщо $a_k < 0 \Rightarrow \varphi_k = \pi$.

Ряд Фур'є у **комплексній** формі:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_1 t}, \quad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

Зауважимо: якщо є математичний спектр, побудований на основі комплексної форми ряду Фур'є, тобто спектр з негативними частотами, то спектр, відповідний тригонометричній формі, матиме такий самий вигляд, але розташований тільки в області позитивних частот, і всі гармоніки, крім нульової, матимуть амплітуди вдвічі більші, ніж у комплексному спектрі. У фазовому спектрі залишаться лише гармоніки в області позитивних частот, амплітуди їх не зміняться.

Задача 1.

Задано сигнал $s(t) = U\cos 2\pi t$, період $T = 1$ (рис. 1). **Розкласти** сигнал у ряд Фур'є у тригонометричній формі та зобразити амплітудний та фазовий спектри сигналу $A_k(f), \varphi_k(f)$.

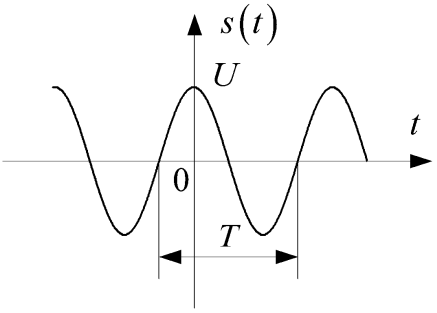


Рис. 1.

Рішення:

Ряд Фур'є у тригонометричній формі:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k),$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

Наша функція парна чи не парна?

Функція парна, тобто дорівнюють нулю коефіцієнти b_k чи a_k?

тому всі коефіцієнти ряду $b_k = 0$, знайдемо коефіцієнти a_k.

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\cos(k\omega_1 t)\,dt =$$

Що я маю підставити замість $s(t)$?

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\cos(k\omega_1 t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U\cos(2\pi t)\cos(k\omega_1 t)\,dt =$$

(замінимо межі інтегрування на $[0,T]$)

$$= \left|\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)\right| = \frac{2}{T}U\int_0^T \frac{1}{2}\left(\cos(2\pi t - k\omega_1 t)+\cos(2\pi t + k\omega_1 t)\right)dt =$$

$$= \frac{U}{T}\left[\int_0^T \cos\left((2\pi - k\omega_1)t\right)dt + \int_0^T \cos\left((2\pi + k\omega_1)t\right)dt\right] = \left|\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\right| =$$

$$= \frac{U}{T}\left[\int_0^T \cos\left((2\pi - 2k\pi)t\right)dt + \int_0^T \cos\left((2\pi + 2k\pi)t\right)dt\right] =$$

$$= \frac{U}{T}\left[\int_0^T \cos\left(2\pi(1-k)t\right)dt + \int_0^T \cos\left(2\pi(1+k)t\right)dt\right] =$$

Чому дорівнює інтеграл від косинуса?

$$\left|\int \cos(\alpha t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha t\right|$$

$$= \frac{U}{T}\left[\int_0^T \cos\left(2\pi(1-k)t\right)dt + \int_0^T \cos\left(2\pi(1+k)t\right)dt\right] = \left|\int \cos(\alpha t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha t\right| =$$

$$= \frac{U}{T}\left[\frac{\sin\left(2\pi(1-k)t\right)}{2\pi(1-k)}\Bigg|_0^T + \frac{\sin\left(2\pi(1+k)t\right)}{2\pi(1+k)}\Bigg|_0^T\right] = \frac{U}{T}\left[\left(\frac{\sin\left(2\pi(1-k)T\right)}{2\pi(1-k)} - \frac{\sin 0}{2\pi(1-k)}\right) +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\sin\left(2\pi(1+k)T\right)}{2\pi(1+k)} - \frac{\sin 0}{2\pi(1+k)}\right)\right] = \left|T = 1, \sin 0 = 0\right| = U\left(\frac{\sin\left(2\pi(1-k)\right)}{2\pi(1-k)} + \frac{\sin\left(2\pi(1+k)\right)}{2\pi(1+k)}\right)$$

$$a_k = U\left(\frac{\sin\left(2\pi(1-k)\right)}{2\pi(1-k)} + \frac{\sin\left(2\pi(1+k)\right)}{2\pi(1+k)}\right)$$

При $k = 0$

$$a_0 = U\left(\frac{\sin\left(2\pi\left(1-0\right)\right)}{2\pi\left(1-0\right)}+\frac{\sin\left(2\pi\left(1+0\right)\right)}{2\pi\left(1+0\right)}\right)=U\left(\frac{\sin\left(2\pi\right)}{2\pi}+\frac{\sin\left(2\pi\right)}{2\pi}\right)=\left|\sin\left(n\pi\right)=0\right|=0$$

.

При $k=1$

$$a_1 = U\left(\frac{\sin\left(2\pi\left(1-1\right)\right)}{2\pi\left(1-1\right)}+\frac{\sin\left(2\pi\left(1+1\right)\right)}{2\pi\left(1+1\right)}\right)=U\left(\frac{\sin\left(0\right)}{0}+\frac{\sin\left(4\pi\right)}{4\pi}\right)=$$

$$=\left|\sin\left(n\pi\right)=0,\frac{\sin\left(0\right)}{0}=1\right|=U\left(1+0\right)=U$$

.

При $k=2$

$$a_2 = U\left(\frac{\sin\left(2\pi\left(1-2\right)\right)}{2\pi\left(1-2\right)}+\frac{\sin\left(2\pi\left(1+2\right)\right)}{2\pi\left(1+2\right)}\right)=U\left(\frac{\sin\left(-2\pi\right)}{-2\pi}+\frac{\sin\left(6\pi\right)}{6\pi}\right)=U\left(0+0\right)=0$$

.

Таким чином,

$$a_0=0, a_1=U, a_2=0,...$$

$$a_k=\begin{cases}U, k=1\\0, k\neq 1\end{cases}, \qquad A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}=a_k, \; A_1=a_1=U.$$

Як знайти φ_k ?

$$\varphi_k = arctg\frac{b_k}{a_k}=\left|a_k=U>0\right|=arctg\frac{0}{a_k}=arctg0=0,$$

$$\varphi_k=\begin{cases}0, k=1\\відсутня, k\neq 1\end{cases}.$$

Отже, отримуємо одну гармоніку a_1 при $k=1$ с амплітудою $A_1=U$ та фазою $\varphi_1=0$ на частоті $f=\frac{\omega_1}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{T}=\frac{1}{T}=\frac{1}{1}=1$ Гц. Амплітудний $A_k\left(f\right)$ та фазовий $\varphi_k\left(f\right)$ спектри показані на рис. 2, рис. 3.

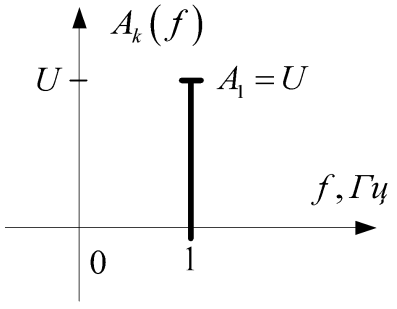


Рис. 2.

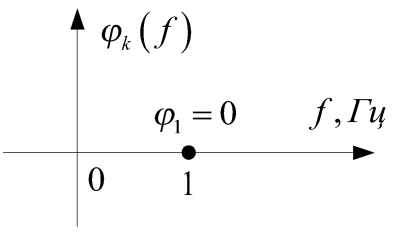


Рис. 3.

$$s\left(t\right)=U\cos 2\pi t$$

Відповідь: амплітудний спектр заданого гармонійного сигналу виду $s(t)=U\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$ це одна гармоніка на частоті $f=\frac{\omega_1}{2\pi}$ з амплітудою, що дорівнює амплітуді самого сигналу U, а фазовий спектр - один відлік на тій же частоті з амплітудою, що дорівнює φ_1.

Задача 2.
Побудувати амплітудний та фазовий спектр сигналу
$s(t)=2\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(6\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$ з періодом $T=1$, частота $\omega_1=\frac{2\pi}{T}=2\pi$.

Рішення:
Скільки гармонік в цьому сигналі?
Заданий сигнал складається двох гармонійних сигналів, кожен із яких має у загальному вигляді таку структуру
$s(t)=A\cos(\omega t+\varphi)=A\cos(2\pi ft+\varphi)$.

$$s(t)=2\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(6\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$$

Ґрунтуючись на цьому, і на результатах, отриманих у попередній задачі, можна сказати, що в спектрі заданого сигналу буде дві гармоніки на двох частотах:

1) $f_1=\frac{\omega_1}{2\pi}=\frac{4\pi}{2\pi}=2$ Гц, амплітуда $A_1=2$, фаза $\varphi_1=\frac{\pi}{3}$;

Яка частота, амплітуда та фаза другої гармоніки?

2) $f_2=\frac{\omega_1}{2\pi}=\frac{6\pi}{2\pi}=3$ Гц, амплітуда $A_2=1$, фаза $\varphi_1=\frac{\pi}{4}$.

Зобразимо графічно:

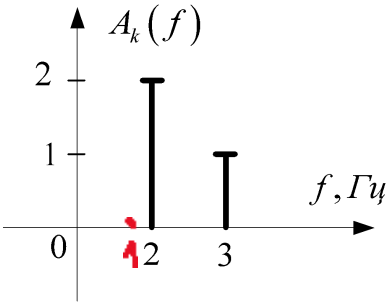


Рис. 4.

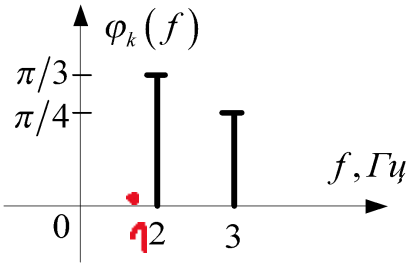


Рис. 5.

$$s(t)=2\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(6\pi t+\frac{\pi}{4}\right).$$

Задача 3.
Побудувати амплітудний та фазовий спектр сигналу

$s(t)=3+\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+\sin(6\pi t)$, період $T=1$. у речовій та комплексній формі. Записати всі коефіцієнти комплексного ряду Фур'є.

Рішення:

Скільки гармонік в цьому сигналі?

Гармонійний процес можна записати як через косинус

$$u=U\cos(\omega t+\psi),$$

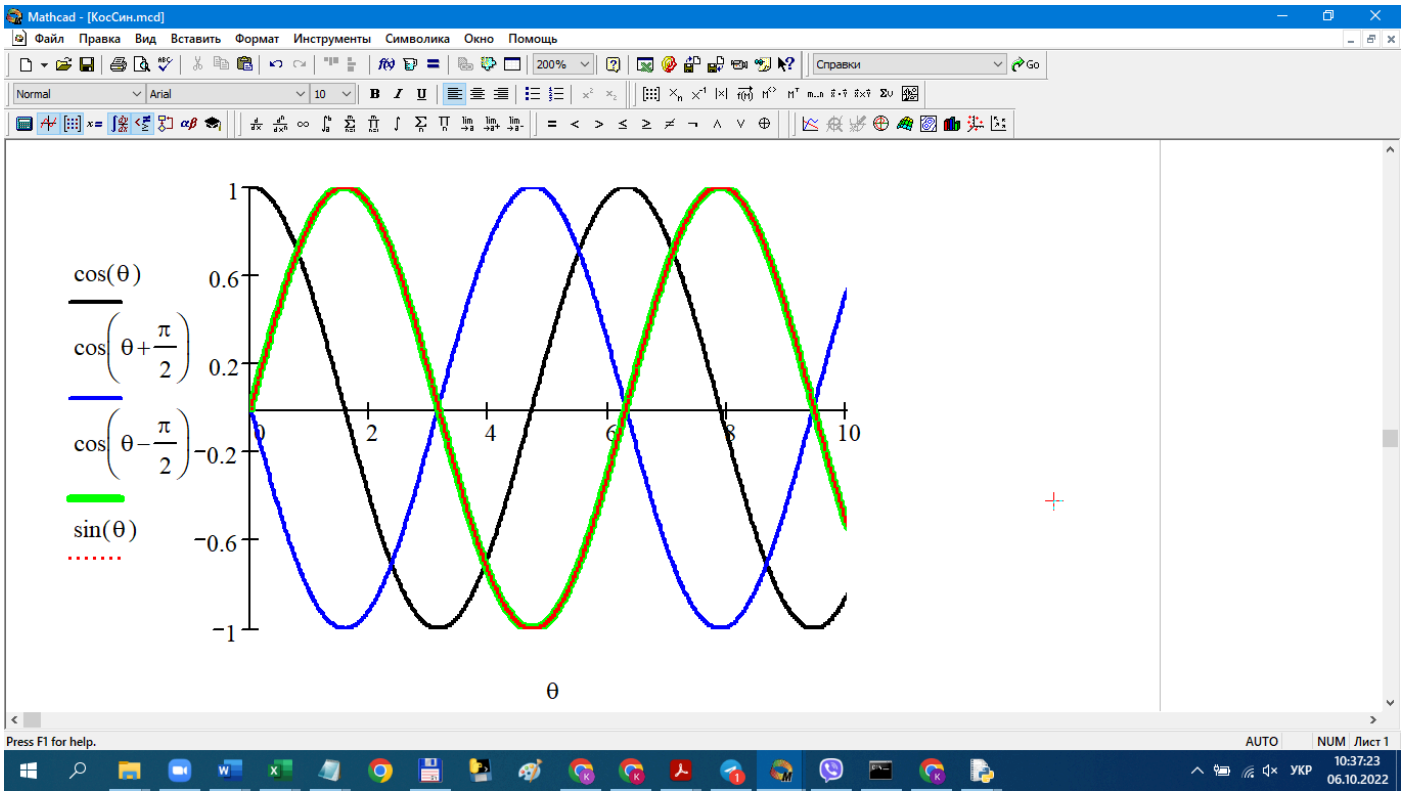
так і через синус

$$u=U\sin(\omega t+\psi').$$

Обидва ці процеси є гармонійними та мають однакову форму, відрізняються вони лише положенням початку координат (початком відліку часу). Тобто можна перейти від синусного запису до косинусного, якщо положити $\psi'=\frac{\pi}{2}+\psi$ та навпаки $\psi=\psi'-\frac{\pi}{2}$, тобто можемо переписати наш вираз у вигляді

$$s(t)=3+\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+\sin(6\pi t)$$

$$s(t)=3+\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(6\pi t-\frac{\pi}{2}\right).$$



Таким чином, отримуємо

$$s(t)=3+\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(6\pi t-\frac{\pi}{2}\right)$$

Яка амплітуда нульової, першої та другої гармоніки?

Яка частота нульової, першої та другої гармоніки?

Яка фаза нульової, першої та другої гармоніки?

$$s(t)=3\cdot 1+\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(6\pi t-\frac{\pi}{2}\right)=$$

або

$$=3\cos(0)+\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(6\pi t-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=3\cos(0\cdot t+0)+\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(6\pi t-\frac{\pi}{2}\right).$$

Сигнал містить три компоненти:

1) постійну складову, $f=0$, амплітуда $A_0=3$;

2) на частоті $f_1=\frac{\omega_1}{2\pi}=\frac{4\pi}{2\pi}=2$ Гц, амплітуда $A_1=1$, фаза $\varphi_1=\frac{\pi}{3}$;

3) на частоті $f_2=\frac{\omega_2}{2\pi}=\frac{6\pi}{2\pi}=3$ Гц, амплітуда $A_2=1$, фаза $\varphi_2=-\frac{\pi}{2}$.

Побудуємо амплітудний та фазовий спектр сигналу у речовій формі

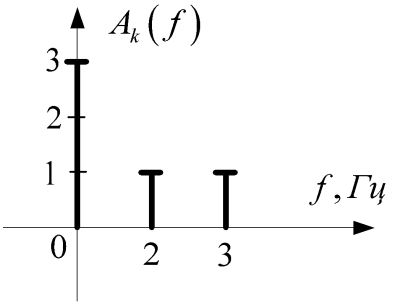


Рис. 6.

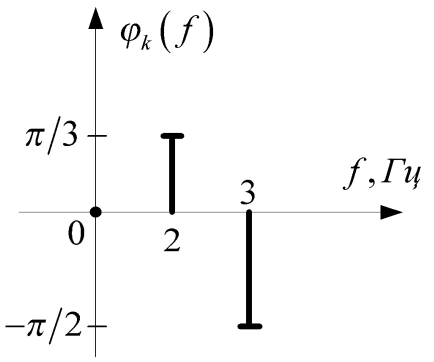


Рис. 7.

$$s(t)=3+\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+\sin(6\pi t)$$

У комплексній формі на нульовій частоті ($k=0$) A_0,φ_0 залишаються без змін. Для інших гармонік $k\neq 0$ з'являються негативні частоти. Усі амплітуди діляться на 2, фази для $k\geq 1$ залишаються без змін, для $k\leq -1$ фази змінюють знак

протилежний. Таким чином, амплітудний і фазовий спектр у комплексній формі набуде вигляду:

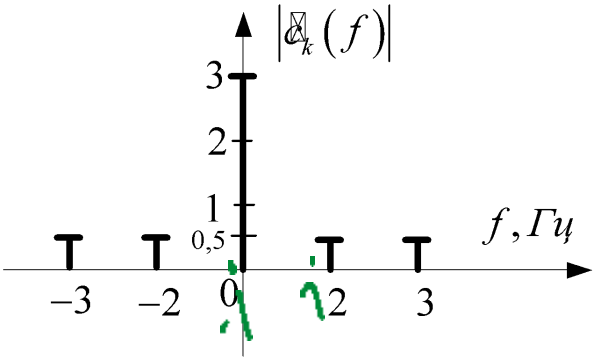


Рис. 8.

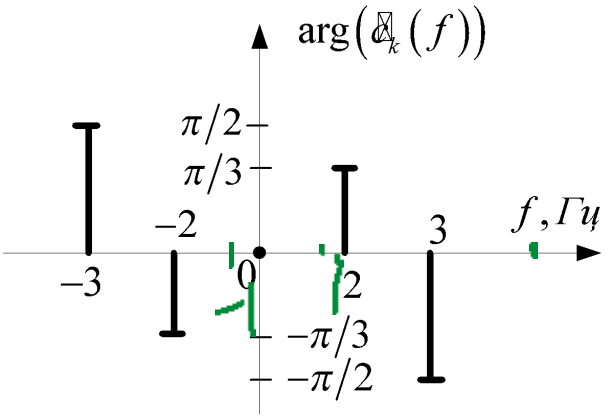


Рис. 9.

$$s(t)=3+\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+\sin(6\pi t)$$

Запишемо коефіцієнти комплексного ряду.
Ряд Фур'є у комплексній формі:

$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{jn\omega_1 t}$, коефіцієнти ряду – комплексні числа $c_n=|c_n|e^{j\varphi_n}$.

Для нашого випадку:

1) $n=0$ постійна складова при $f=0$ $|c_0|=3, \mathbf{arg}(c_0)=0\Rightarrow \dot{c}_0=c_0=3$.

2) $n=1$ при $f=1$ Гц $|c_1|=0$;

3) $n=-1$ при $f=-1$ Гц $|c_{-1}|=0$;

4) $n=2$ при $f=2$ Гц $|c_1|=0.5, \mathbf{arg}(c_2)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow \dot{c}_2=0.5e^{j\frac{\pi}{3}}$

5) $n=-2$ при $f=-2$ Гц $|c_{-2}|=0.5, \mathbf{arg}(c_{-2})=-\frac{\pi}{3}\Rightarrow \dot{c}_{-2}=0.5e^{-j\frac{\pi}{3}}$

6) $n=3$ при $f=3$ Гц $|c_3|=0.5, \mathbf{arg}(c_3)=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow \dot{c}_3=0.5e^{-j\frac{\pi}{2}}$;

7) $n=-3$ при $f=-3$ Гц $|c_{-3}|=0.5, \mathbf{arg}(c_{-3})=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \dot{c}_{-3}=0.5e^{j\frac{\pi}{2}}$.

Всі інші значення при $n=4,-4,5,-5,\ldots$ не існують, оскільки наш сигнал складається з постійної складової та двох гармонік.

Тобто $\dot{c}_4=\dot{c}_{-4}=\dot{c}_5=\dot{c}_{-5}\ldots=0$.