Princípio de Cavalieri: um estudo através da matemática das abelhas[1]

Instruções iniciais: complete todas as fases para passar para a próxima. Ao todo são 6 fases.

1ª FASE (Motivação):

Você já deve saber que as abelhas constroem suas colmeias, de modo que os favos de mel possuam um formato hexagonal, mas você já se perguntou se existe alguma explicação para a escolha dessa forma geométrica para a construção?

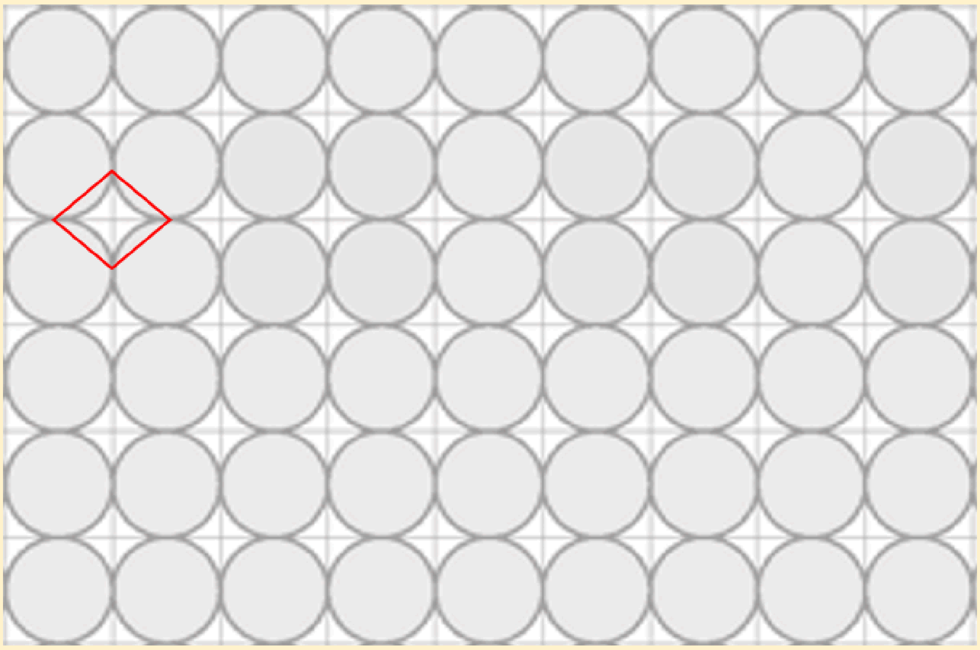
Partindo do fato de que o mel é o alimento das abelhas, ou seja, aquilo que lhes dá sustento e as mantém vivas, é lógico pensar que as abelhas precisam do maior espaço possível para armazenar seu alimento. No entanto, em muitos casos, não há na natureza à disposição uma quantidade infinita ou até mesmo relativamente grande de espaços para armazenar algo. Nesse sentido, a urgência de se armazenar a maior quantidade possível de alimento em um determinado espaço, é colocado em questão.

Digamos que as abelhas têm um determinado espaço plano β para armazenar o seu alimento. Neste espaço, as abelhas irão construir

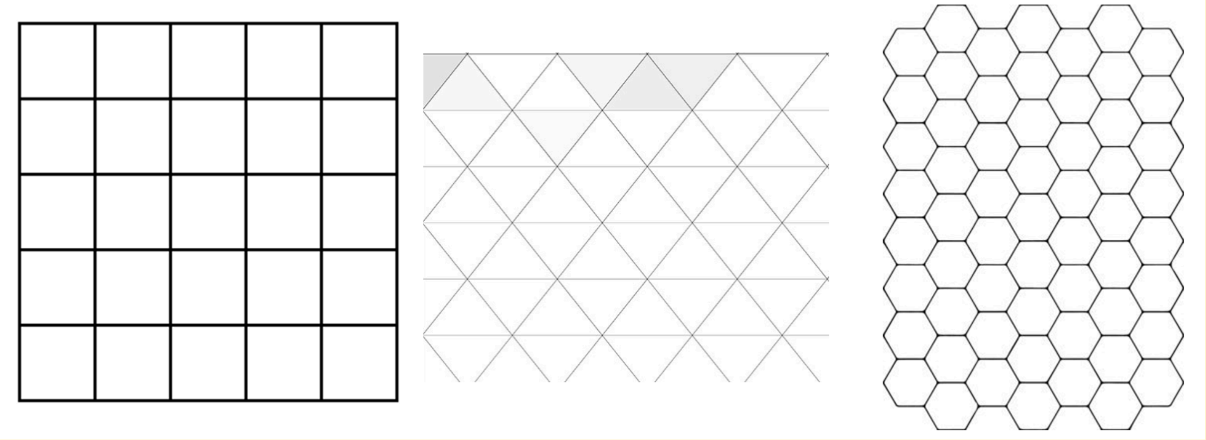
---

[1] Projeto desenvolvido pela discente Adriana Washington Henarejos, graduanda em Licenciatura em Matemática na UFSC (Universidade Federal de Santa Catarina) - campus Blumenau. Projeto desenvolvido na disciplina de Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem de Matemática II (2022.1), ministrado pela docente Cintia Rosa da Silva. Material produzido com o auxílio e orientação de Cintia Rosa da Silva e Luiz Fernando Bossa (técnico do LEMA - Laboratório de Ensino de Matemática - da UFSC Blumenau).
Regras/manual: o uso do material se dá com o respeito da sequência estabelecida a seguir
Conteúdos matemáticos explorados: Área de figuras planas, volume de prismas (Princípio de Cavalieri) e planificações.
Série que pode ser aplicado: Ensino médio
LINK e QR CODE para acesso do roteiro:
http://lema.paginas.ufsc.br/2022/06/07/principio-de-cavalieri-um-estudo-atraves-da-matematica-das-abelhas/

os favos, para conseguir estocar o mel. Perceba que há três figuras planas que conseguem preencher, sem deixar espaços vagos, um plano, são essas: as figuras quadrangulares, triangulares e hexagonais regulares. Se pensássemos em uma figura circular, não obteremos êxito, pois como vê-se a seguir, haveria espaços que ficariam “vagos”, que seriam um desperdício de armazenamento.



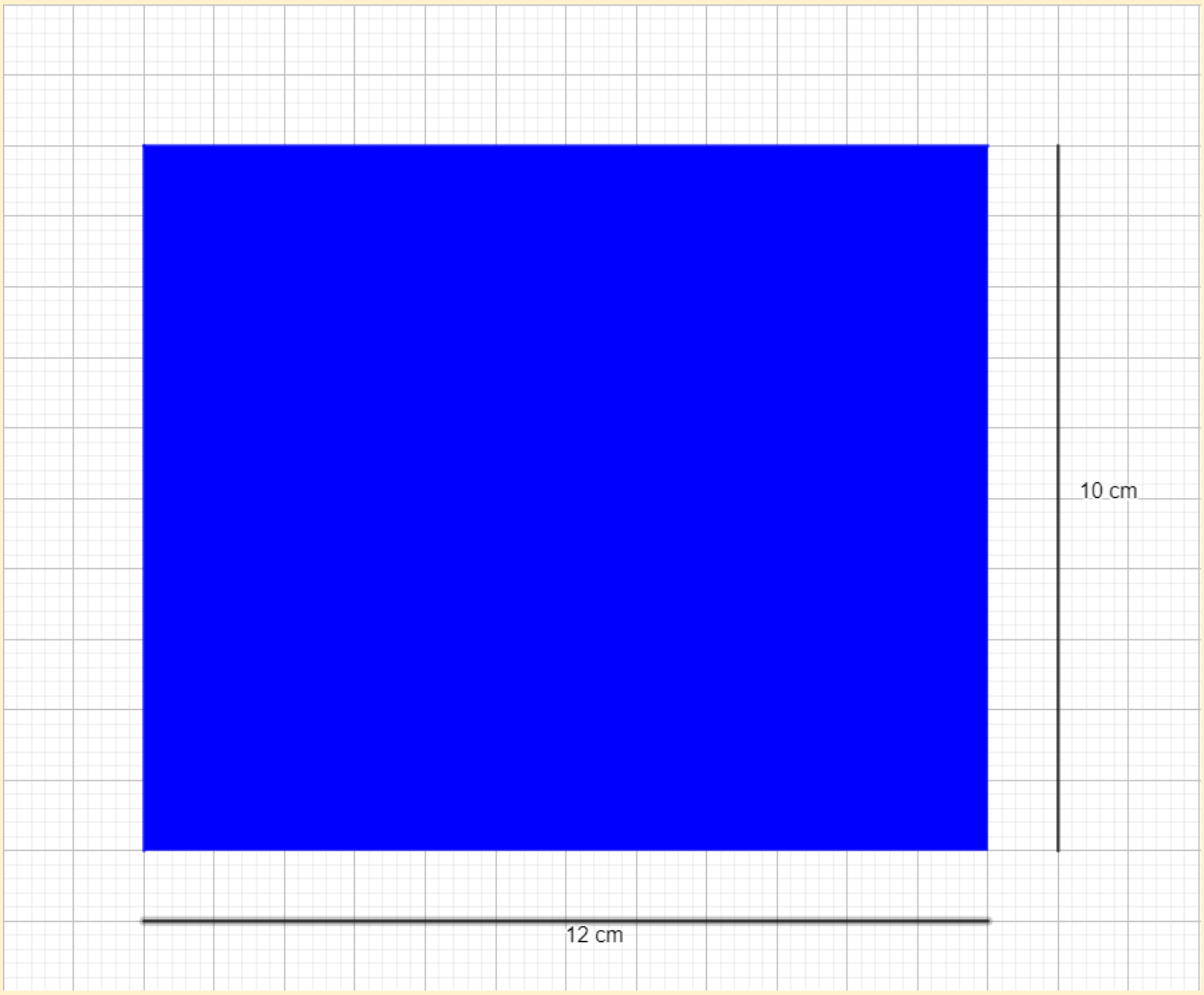
Por outro lado, se pensarmos em mosaicos formados por figuras quadrangulares, triangulares e hexagonais regulares teremos o seguinte:



Ou seja, não temos perda de espaço com essas três figuras. Isso já nos dá uma ideia intuitiva da motivação para a escolha da forma hexagonal: ela não desperdiça espaço em suas fronteiras. Mas então por qual motivo os favos não são triangulares ou quadrangulares?

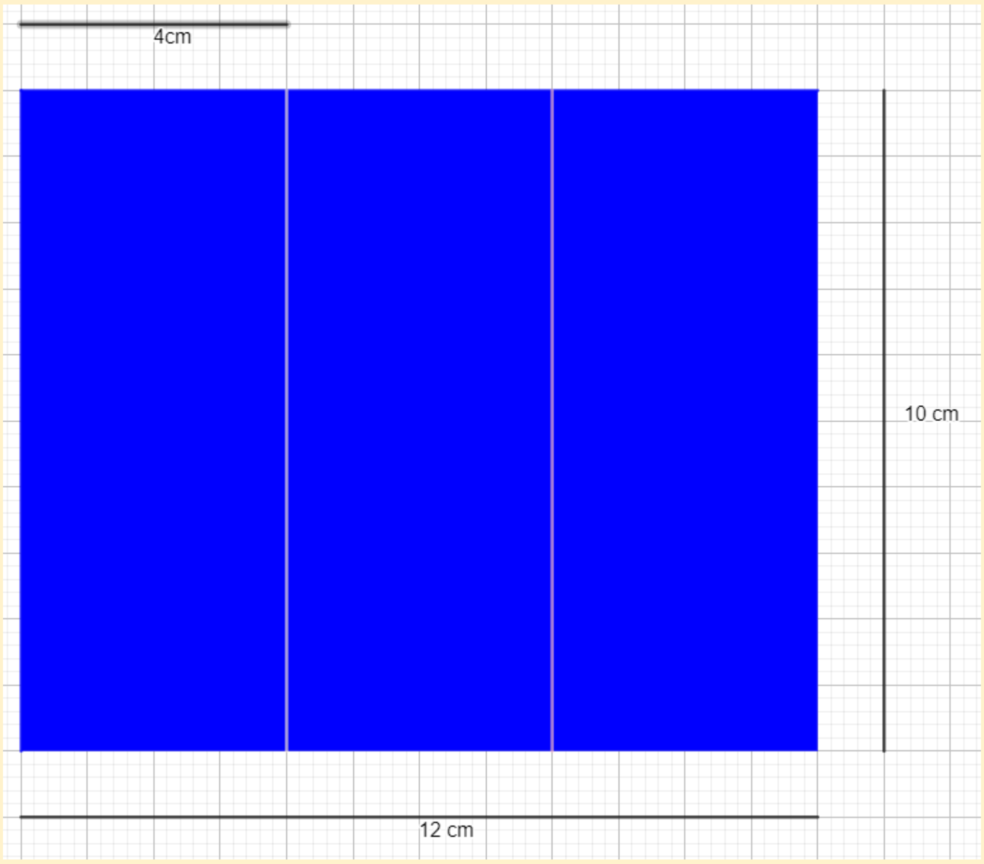
2ª FASE (Construção):

Continuando da premissa de que, se fôssemos abelhas iríamos desejar economizar o máximo de material possível na construção das colmeias, faremos agora a construção de alguns sólidos geométricos. Utilizando de uma folha de papel com 12cm de comprimento e 10cm de altura, como a da figura a seguir:

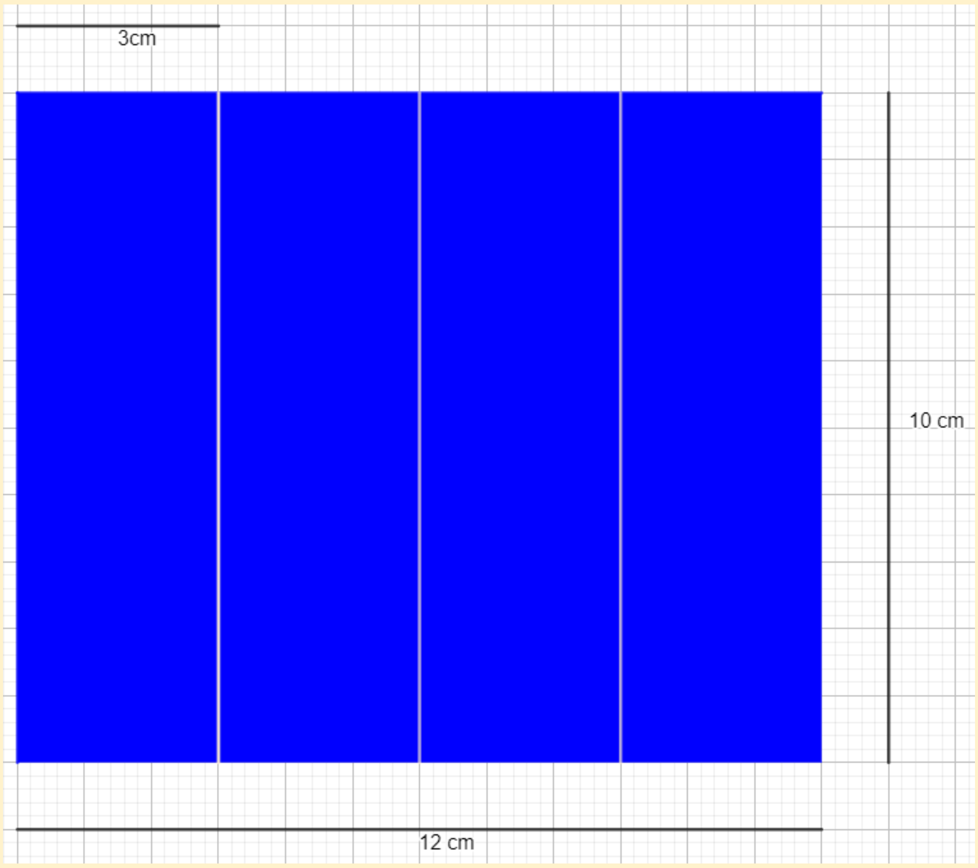


Iremos construir três sólidos. O primeiro sólido será obtido a partir da dobradura da folha de 12cmx10cm em três partes iguais de 4cm de comprimento por 10cm de altura, cada (gerando assim o prisma triangular). O segundo sólido será construído a partir da dobradura da folha em quatro partes iguais de 3cm de comprimento por 10cm de altura (prisma quadrangular). Por fim, o terceiro e último sólido será originado da dobradura do papel em seis partes iguais de 2cm de comprimento por 10cm de altura (prisma hexagonal).

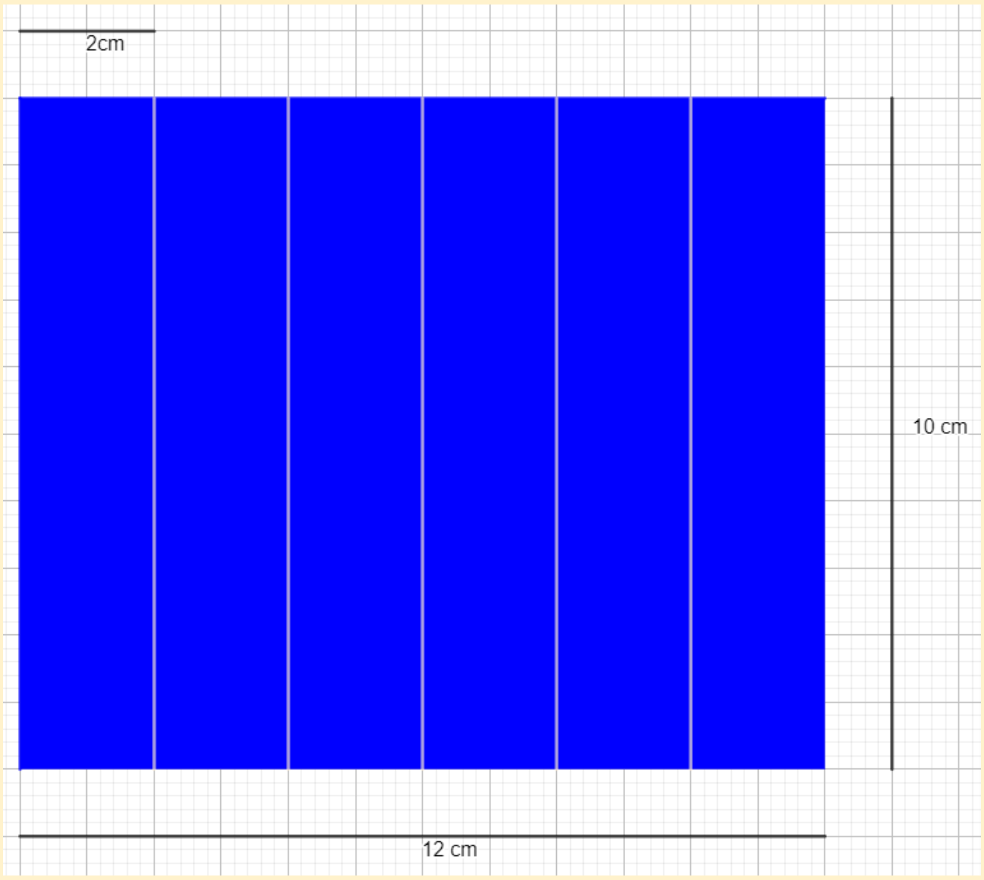
Construção 1 (primeiro sólido):



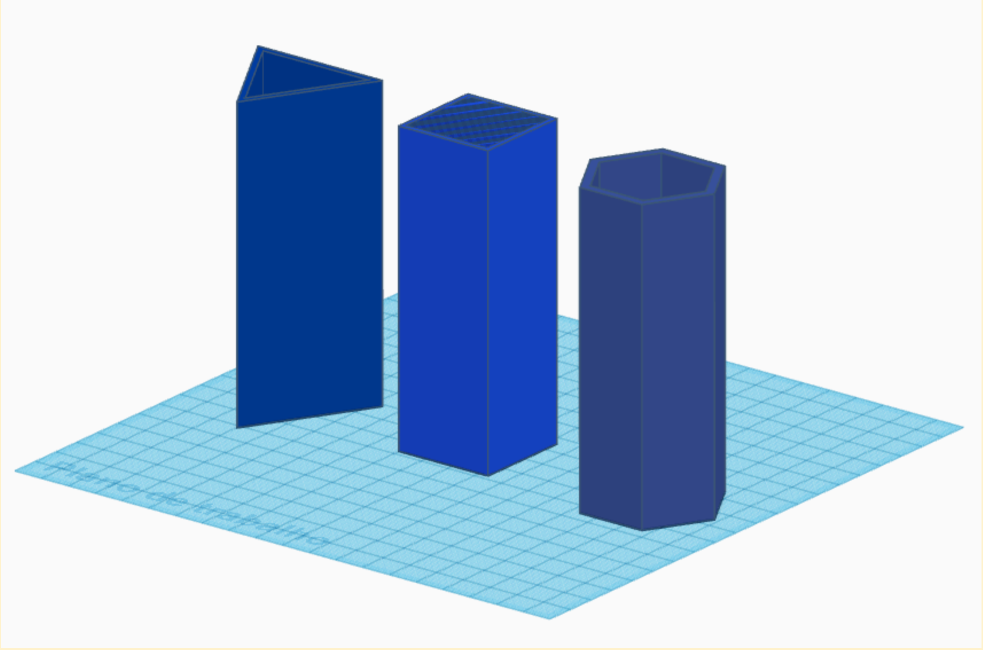
Construção 2 (segundo sólido):



Construção 3 (terceiro sólido):



Se dobrarmos os papéis nas dobraduras demarcadas pelos segmentos brancos na folha de papel representada pela figura azul e unirmos os dois lados da folha que representam a altura, note que obteremos as seguintes formas:



3ª FASE (Cálculo das Áreas e Princípio de Cavalieri):

Antes de darmos continuidade é importante que sejam revisadas as fórmulas para o cálculo de área de algumas figuras planas.

Fórmula para o cálculo de área do triângulo: $\frac{b \times h}{2}$, em que b é a base do triângulo e h é altura.

Fórmula para o cálculo de área do triângulo equilátero: $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, em que l é o lado do triângulo.

Fórmula para o cálculo de área do quadrado: l^2, em que l é o lado do quadrado.

Fórmula para o cálculo de área do hexágono regular: $\frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$, em que l é um dos lados do hexágono.

Agora, retome a última figura apresentada na fase anterior, observe que os três sólidos encontrados possuem bases distintas, correto? Esboce a seguir a base do primeiro, do segundo e do terceiro sólido:

Base primeiro sólido:	Base segundo sólido:	Base terceiro sólido:

Agora que ficou mais claro quais figuras planas representam as bases de cada um dos sólidos, calcule, usando as fórmulas apresentadas no início desta fase, a área de cada uma das bases:

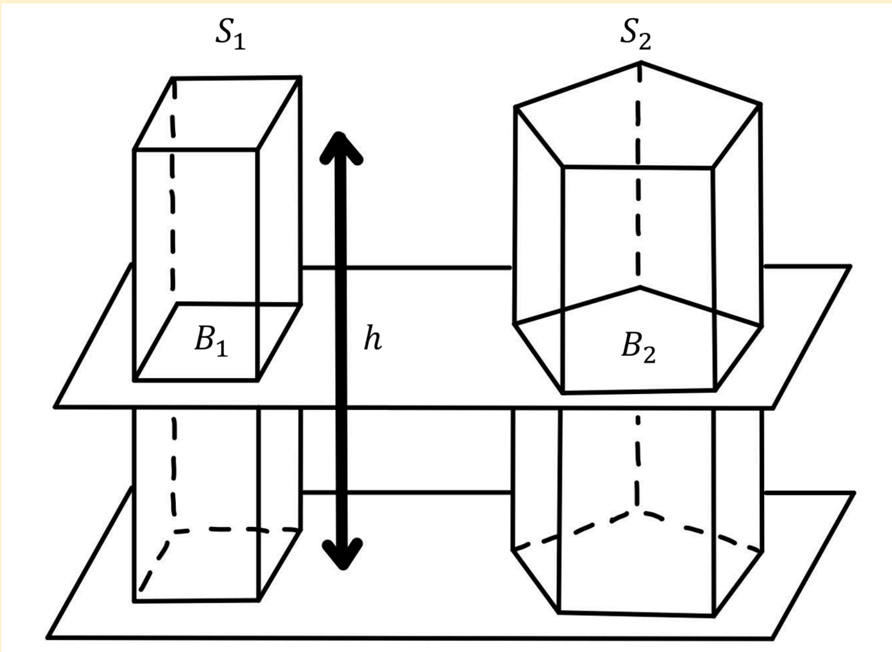
Área da base do primeiro sólido:	Área da base do segundo sólido:	Área da base do terceiro sólido:

Volume de um prisma qualquer

O volume de um prisma qualquer será dado pelo produto entre a área da base do prisma (A) e a sua altura (h), ou seja: $V = A \times h$.

Princípio de Cavalieri

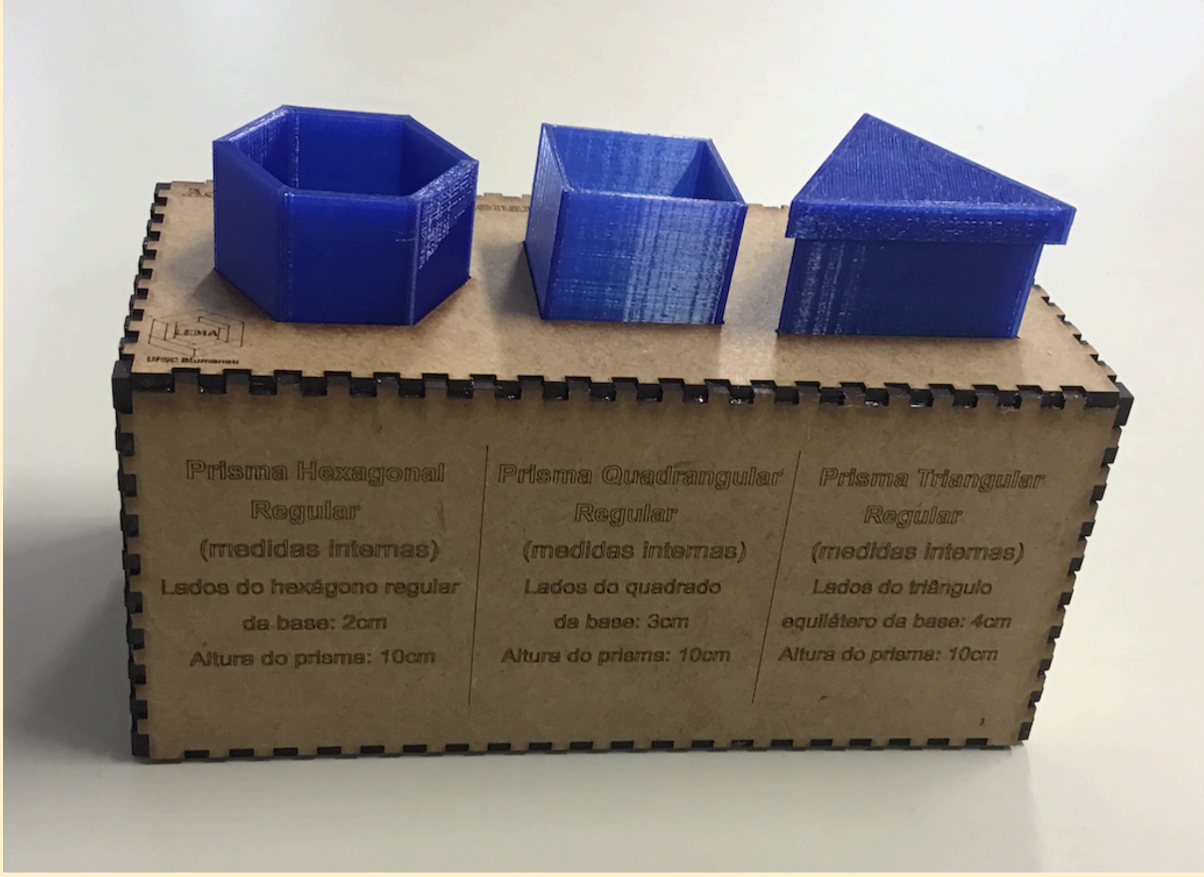
O Princípio de Cavalieri diz que: “dois sólidos geométricos de igual altura têm o mesmo volume se suas seções planas à mesma altura têm a mesma área”.



Ou seja, de acordo com a figura acima, tendo S_1 e S_2 a mesma altura, S_1 e S_2 terão o mesmo volume se a área de B_1 for igual a área de B_2.

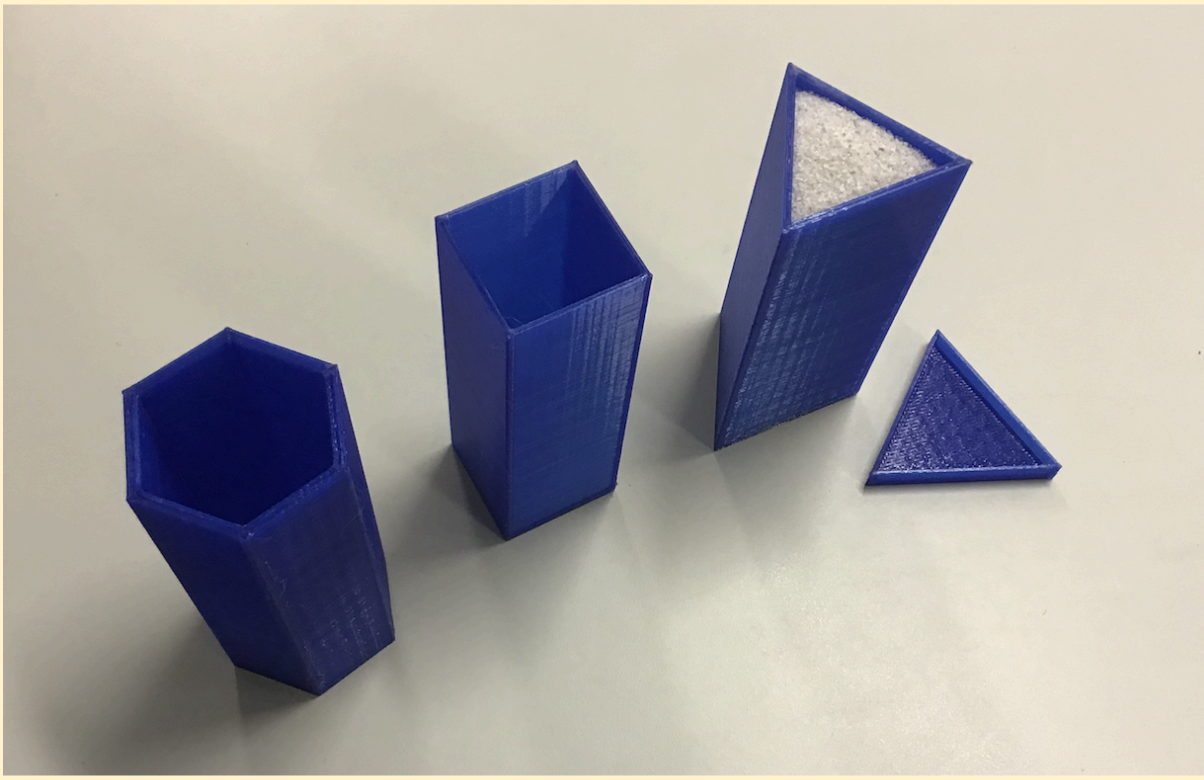
4ª FASE (Conhecendo o material):

Iremos agora conhecer o material que evidenciará de maneira clara os conceitos e situações com as quais estamos lidando.



O material PRINCÍPIO DE CAVALIERI: UM ESTUDO ATRAVÉS DA MATEMÁTICA DAS ABELHAS, possui uma base dada por uma caixa quadrangular (feita de MDF, desenvolvida com auxílio da impressora laser), nessa base/suporte há três recortes: um de um triângulo, um de um quadrado e um de um hexágono regular, nesses espaços dos recortes são encaixadas as representações dos sólidos. Nesta base, estão presentes também algumas informações a respeito das medidas **internas** dos lados e da altura dos sólidos que nela são encaixados. Há também três prismas: um triangular, um quadrangular e um hexagonal regular (todos feitos utilizando a impressora 3D). O prisma triangular está preenchido com areia, por este motivo é o único prisma que possui tampa (para evitar o escape da areia). Além disso, há um roteiro de estudos, que contextualiza, através da escolha da forma hexagonal para a construção das colmeias de abelhas, o conteúdo acerca do Princípio de Cavalieri e apresenta atividades e construções para melhor compreensão do problema.


Adriana Washington Henarejos - 2022/1
LEMA
UFSC Blumenau



5ª FASE (Uso do material e cálculo de volume):

Com base em tudo que fora visto até então, gostaria que refletisse acerca do seguinte questionamento: você acredita que algum dos três prismas irá suportar um volume maior de areia? Se sim, qual será?

RESPOSTA: ____

Para termos certeza que a resposta acima está correta ou errada, devemos calcular os volumes dos três prismas. Na terceira fase vimos como fazer o cálculo, então agora é sua vez de colocar a mão na massa e encontrar:

Volume Prisma Triangular:	Volume Prisma Quadrangular:	Volume Prisma Hexagonal:

Explique, com suas palavras, por qual motivo não podemos aplicar o princípio de Cavalieri para o cálculo do volume desses prismas:

RESPOSTA:____

____

____

____

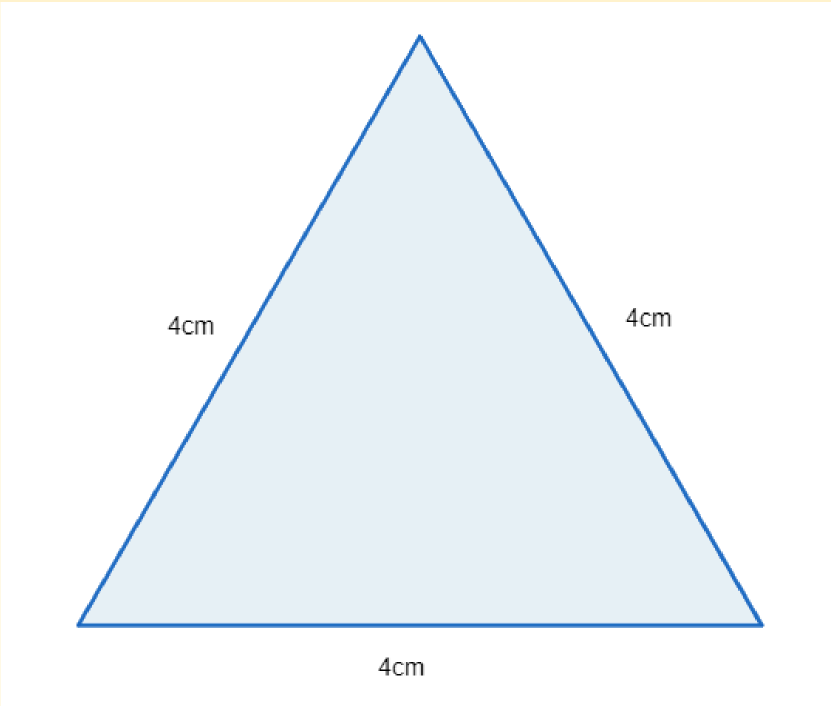
Agora que já foram calculados os volumes dos prismas, qual deles suportará um maior volume de areia?

RESPOSTA:____

6ª FASE (Respostas dos problemas anteriores):

Como construímos os prismas com o mesmo material (a folha azul com 12cm x 10cm), pode ser que se espere que os volumes comportados por tais prismas sejam iguais. Porém, como veremos, isso não ocorre de fato.

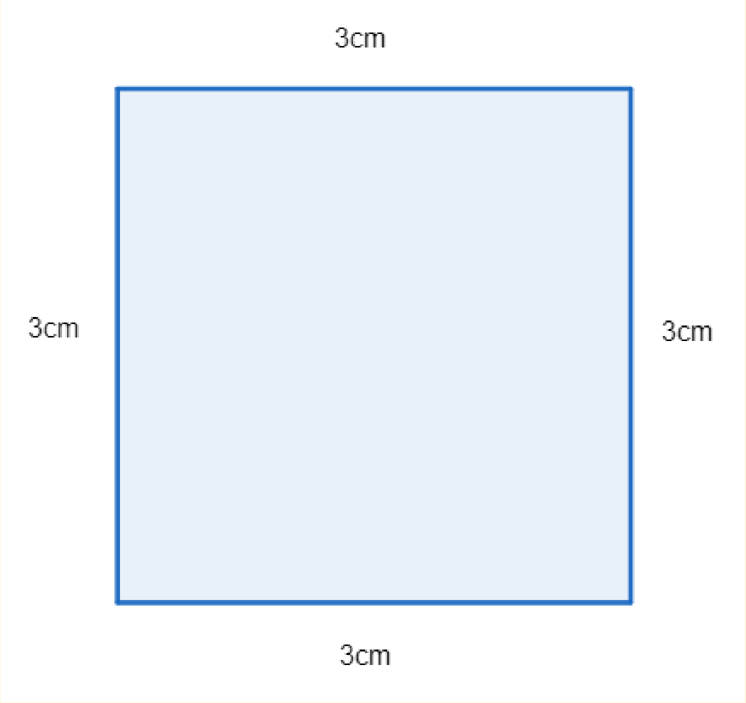
Note que a base do prisma triangular regular será da seguinte forma:



Usando a fórmula para cálculo de área de um triângulo regular (equilátero), obtemos que: $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = \frac{16\sqrt{3}}{4} \cong 6,93cm^2$.

Logo, o volume do prisma triangular será: $V = A \times h = 6,93 \times 10 = 69,30cm^3$.

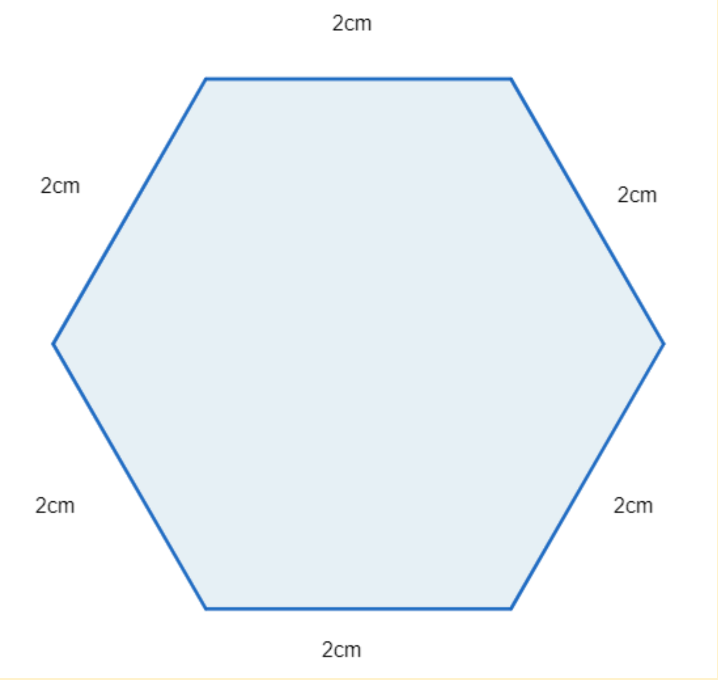
Já a base do prisma quadrangular será dada por:



Usando a fórmula para cálculo de área de quadrado, obtemos que: $A = l^2 = 3^2 = 9cm^2$.

Logo, o volume do prisma quadrangular será: $V = A \times h = 9 \times 10 = 90cm^3$.

Por fim, a base do prisma hexagonal será:



Usando a fórmula para cálculo de área do hexágono regular, obtemos que: $A = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\times2^2\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} \cong 10,39cm^2$.

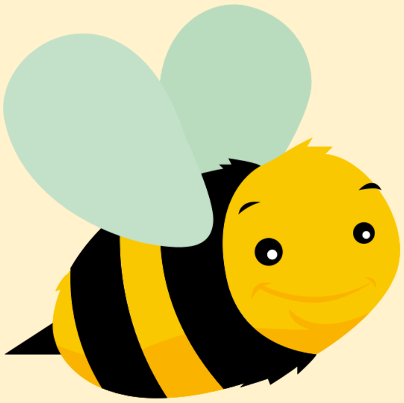
Logo, o volume do prisma hexagonal regular será: $V = A \times h = 10,39 \times 10 = 103,90cm^3$.

Se calculássemos somente as áreas, já poderíamos afirmar, com o Princípio de Cavalieri, que, apesar dos prismas serem construídos com o mesmo material e possuírem a mesma altura, estes, não comportam volumes iguais, por terem as áreas das bases distintas.

Ou seja, obtemos que:

$$Volume\ Prisma\ Hexagonal\ Regular > Volume\ Prisma\ Quadrangular$$
$$Volume\ Prisma\ Quadrangular > Volume\ Prisma\ Triangular$$
$$Volume\ Prisma\ Hexagonal\ Regular > Volume\ Prisma\ Triangular$$

USANDO O MATERIAL: Fazendo uso do material apresentado na fase 4, passando a areia que está contida no prisma triangular para os outros prismas, perceba como a diferença de volume comportado entre os prismas é evidente.



Tendo consciência disso, ou não, as abelhas praticam a matemática em sua escolha para o formato dos favos. Com a escolha da forma hexagonal, as abelhas constroem, com o mesmo material que poderiam construir outros prismas, um prisma que armazena mais mel. E aí, vocês acham que as abelhas fazem cálculos, ou a escolha é pura coincidência?[2]

[2] Referências para melhor compreensão e aprimoramento do material:
DA SILVA, Jairo José. Filosofias da matemática. Unesp, 2007.
MENEZES, Felipe Ramos et al. A geometria das abelhas na construção de seus alvéolos. 2017.
OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. "Princípio de Cavalieri"; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/principio-cavalieri.htm. Acesso em 10 de junho de 2022.
RAFAEL, Deborah Martins; SALLUN, Élvia Mureb. OFICINA 3 AS ABELHAS CONHECEM GEOMETRIA?. 2015.
SANTANA, Selma. MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE GEOMETRIA POR MEIO DA MATEMÁTICA DAS ABELHAS. Universidade Estadual do Norte do Paraná - UENP. 2013.
SILVA, Alex. Modelagem Matemática: uma sequência didática utilizado a "geometria do favo de mel" para o estudo dos Prismas na 3ª série do Ensino Médio. Universidade Federal da Paraíba. 2018.
SILVA, Rômulo Alexandre et al. A MATEMÁTICA NA VIDA DAS ABELHAS: EXPLORANDO O TEMA NA EDUCAÇÃO BÁSICA. 2016.