

CONCOURS COMMUN MINES-PONT 2^{ème} épreuve

A/Equilibre relatif : champ des pressions :

Question 1 : $\rho d\vec{v}acc_{gal} = - grad \vec{P} dv + \rho dv \vec{g}$

L'accélération gal. est la somme de l'acc. dans R, de l'acc. d'entraînement, de l'acc. de Coriolis. Le fluide est statique dans R. $0 = - \rho acc_{ent} - grad \vec{P} + \rho \vec{g}$.

Remplaçant l'acc._{ent} on aboutit à : $grad \vec{P} = \rho (w^2 r \vec{u}_r + \vec{g})$

Question 2 : $P_A - P_{O'} = \int_{O'}^{coude} grad \vec{P} . d\vec{l} + \int_{coude}^A grad \vec{P} . d\vec{l}$

$$P_A - P_{O'} = \int_0^a \rho w^2 r dr + \int_{-h}^{-z} - \rho g dz = \rho w^2 \frac{a^2}{2} - \rho g(-z + h)$$

De même $P_B - P_{O'} = \rho w^2 \frac{(D-a)^2}{2} - \rho g(z + h)$

Question 3 : Les pressions en A et B valant la pression atmosphérique, les deux différences ci-dessus sont égales ce qui fournit la relation entre z et ω :

$$2gz = \frac{\omega^2}{2} [(D-a)^2 - a^2] \quad z \text{ toujours positif donc toujours baisse dans le tube}$$

proche. ω_{max} obtenu pour $z=h$. En remplaçant z par h et ω par ω_{max} dans $P_A - P_{O'}$ on obtient la valeur de $P_{O'}$ fournie par l'énoncé.

Question 4 : $\omega_{max} = 11,55 \text{ Rd/s}$.

Question 5 : Cas $x_A \in [-a, 0]$ Par le même calcul qu'à la deuxième question

$$P_A - P_{O'} = \rho w^2 \frac{x_A^2}{2} \quad P_B - P_{O'} \text{ est inchangé par rapport à la 2^e question.}$$

$$P_A - P_B = \rho w^2 \frac{x_A^2}{2} - \frac{\rho w^2}{2} (D-a)^2 + \rho g(z+h) \quad z = h + (x_A - (-a)) \quad \text{On tire donc } x_A \text{ que l'on remplace ci-dessus.}$$

$$P_A - P_B = \rho w^2 \frac{(h+a-z)^2}{2} - \frac{\rho w^2}{2} (D-a)^2 + \rho g(z+h) \quad \text{Le cas } x_A \in [-a, 0] \text{ fournit la même expression après calcul.}$$

Question 6 : L'égalité des pressions P_A et P_B fournit

$$w^2 = \frac{-2g(h+z)}{(z-h-a)^2 - (D-a)^2} = \frac{2g(h+z)}{(D+h-z)(z+D-h-2a)} \quad \text{Pour } z=h \text{ on retrouve } \omega_{max} \text{ de la}$$

question 3. Avec les variables réduites on a $\Omega^2 = \frac{2(h+u)}{(1+h-u)(u+1-h-2\alpha)}$

Question 7 : Calculons la dérivée de $\Omega^2/2$ en fonction de u :

$$\frac{1}{2} \frac{d(\Omega^2)}{du} = \frac{(1+h-u)(u+1-h-2\alpha) - (h+u)(-2u+1+h-1+2\alpha)}{(1+h-u)(1-h-2\alpha+u)}$$

La nullité du numérateur se traduit par l'équation de 2^e degré :

$$u^2 + u(2\eta) + (1+\eta)(1-\eta-2\alpha) - 2\eta(\eta+\alpha) = 0$$

Les racines en sont $u = -h \pm \sqrt{(1+2h)(2h+2\alpha-1)}$.

Seule la racine avec un signe + a la possibilité d'être entre η et $\eta+1$.

$-h + \sqrt{(1+2h)(2h+2\alpha-1)} \geq \eta$ ou $\sqrt{3}2h$. On élève au carré et l'inégalité se simplifie en $2\alpha(1+2h) \geq 1$ ou $2\alpha L^3 1$

$-h + \sqrt{(1+2h)(2h+2\alpha-1)} \leq 1+h$ ou $\sqrt{} \leq 1+2h$. On élève au carré pour trouver $2h(\alpha-1) + \alpha \leq 1$ toujours vérifié car $\alpha < 1/2$ et $\eta > 0$.

Donc une C.N.S. pour que la dérivée s'annule pour u entre η et $1+\eta$ est $2\alpha+2\alpha 2\eta \geq 1$.

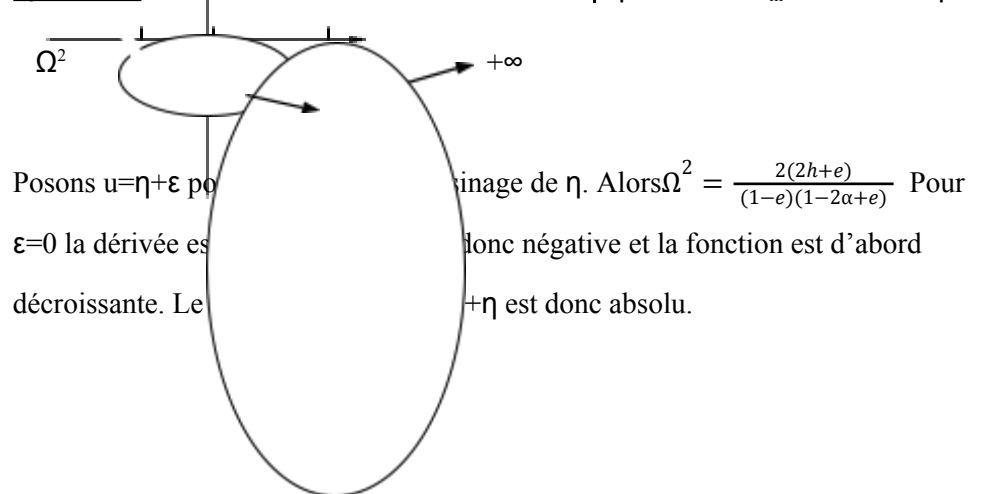
En fin de question 6, l'énoncé affirme que $2\alpha+2\eta > 1$ entraîne que la dérivée

s'annule pour une valeur de u entre η et $1+\eta$. Comme $2\alpha+2\eta > 1$ n'entraîne pas

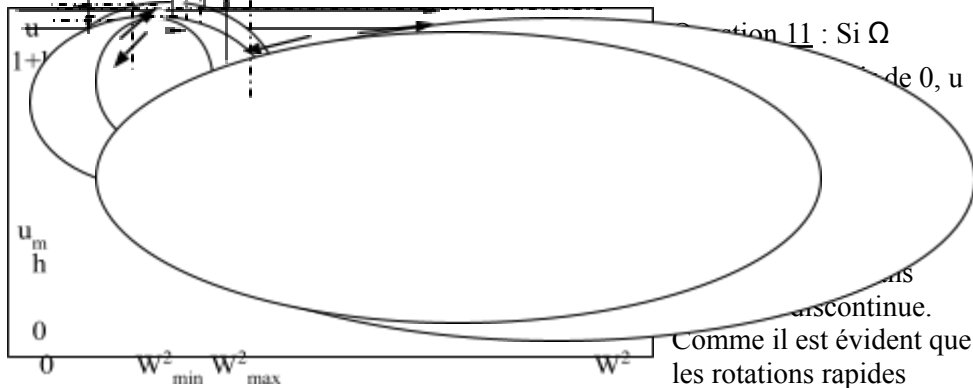
$2\alpha+2\alpha 2\eta \geq 1$, on peut dire que l'affirmation de l'énoncé est inexacte.

Question 8 : $\alpha = 1/3 \quad \eta = 1/3$ L'inégalité sur α et η se ramène à $\frac{2}{3}(1 + \frac{2}{3})^3 1$ qui est vérifiée. On calcule facilement $u_m = 0,412$ d'où l'on déduit $z_m = 12,36 \text{ cm}$, $\Omega^2 = 3,927$ et $\Omega_{min} = 1,982$. Avec $\omega_0 = 5,774 \text{ s}^{-1}$ on tire $\omega_{min} = 11,44 \text{ s}^{-1}$.

Question 9 :



Question 10 : Avec du liquide dans les deux branches, on avait trouvé $z = \frac{D(D-2a)}{4g} w^2$ qui se réécrit avec les variables réduites $u = \frac{1-2\alpha}{4} \Omega^2$ pour u variant de 0 à η et Ω variant de 0 à $\Omega_{\max}$.



Comme il est évident que les rotations rapides chasseront tout le liquide dans la branche éloignée, on observera une constance provisoire de u , puis quand l'instabilité sera trop forte, on « sautera » sur la branche normale. Au retour on aura le même phénomène en parvenant à la valeur u_m .

Comme vu à la question 3, $\frac{P_{(O')}}{P_o} = 1 - \frac{2\alpha^2}{1-2\alpha} \frac{\rho g h}{P_o}$ Pour $\alpha \rightarrow 1/2$ la pression en O' tend vers $-\infty$ d'où l'existence d'une valeur maximale de

α pour que l'eau ne descende pas au dessous de sa pression max de vapeur à la température de l'expérience.

Question 12 : En arrondissant le tube à proximité de son coude, on ferait disparaître la discontinuité de la dérivée dans $u_{(\Omega^2)}$

B Etude énergétique de l'équilibre relatif :

Question 13 : $E_g^{(1)}$ s'obtient par l'addition des valeurs dans les deux parties verticales à gauche et à droite.

$$E_g^{(1)} = \rho(h-z)sg\left(\frac{h-z}{2}\right) + \rho(h+z)sg\left(\frac{h+z}{2}\right) \text{ d'où finalement}$$

$$E_g^{(1)} = \rho g s(h^2 + z^2)$$

Question 14 : Force d'inertie d'entraînement sur la masse dm : $dm w^2 r u_r \rightarrow$ L'énergie potentielle massique pour ces forces satisfait donc à $w^2 r u_r \rightarrow = - \text{grad} E$ d'où

$$E_{\text{massique}} = - w^2 \frac{r^2}{2}$$

E_i dans la partie horizontale courte est $-\frac{w^2}{2} \int r^2 \rho s dr = -\frac{\rho s w^2}{2} \frac{a^3}{3}$ Pour la partie horizontale longue, on remplace a par $D-a$. Pour le tube vertical proche on a $\rho s(h-z) \frac{-w^2 a^2}{2}$ et pour le vertical lointain $\rho s(h+z) \left(-\frac{w^2}{2}\right) (D-a)^2$ E_i s'obtient par l'addition de ces 4 termes.

$$E_i^{(1)} = -\frac{\rho s \omega^2}{2} \left[\frac{a^3}{3} + \frac{(D-a)^3}{3} + (h-z)a^2 + (h+z)(D-a)^2 \right]$$

Question 15 : $E_p^{(1)}$ s'obtient en ajoutant l'en. pot. de pesanteur à celle due aux forces d'inertie. Avec les variables réduites proposées, on trouve

$$e_p^{(1)} = u^2 - \frac{\Omega^2}{2} (-2\alpha + 1)u + h^2 - \frac{\Omega^2}{2} \left[\frac{\alpha^3 + (1-\alpha)^3}{3} + h\alpha^2 + h(1-\alpha)^2 \right]$$

Question 16 : $\epsilon_p^{(1)}$ considérée comme une fonction de u et Ω a une dérivée par rapport à u nulle dans les positions d'équilibre. $2u - \frac{\Omega^2}{2}(1-2\alpha) = 0$ et on retrouve le résultat de la question 3.

Question 17 : Stabilité de l'équilibre trouvé si l'annulation de la dérivée

correspondant à un minimum de l'én. potentielle. $\frac{d^2 e_p^{(1)}}{du^2} = 2 > 0$ donc équilibre stable.

$$\text{Question 18 : } E_g^{(2)} = \rho(h+z)sg \frac{h+z}{2}$$

Question 19 : Cas x_A entre $-a$ et 0 :

$$\text{Partie horizontale côté proche : } -\frac{\rho s w^2}{2} \frac{(-x_A)^3}{3}$$

$$\text{côté lointain : } -\frac{\rho s w^2}{2} \frac{(D-a)^3}{3}$$

Avec $z=h+(x_A-(-a))$ on obtient un total pour les deux parties horizontales de

$$-\frac{\rho s w^2}{6} [(h+a-z)^3 + (D-a)^3] \text{ . Le cas } x_A \text{ entre } 0 \text{ et } D-a \text{ fournit la même}$$

contribution pour les parties horizontales. Il reste à ajouter la contribution verticale du tube vertical lointain d'où

$$E_i^{(2)} = -\frac{\rho s w^2}{6} [(h+a-z)^3 + (D-a)^3] - \frac{\rho s w^2}{2} (h+z)(D-a)^2$$

Question 20 : $E_p^{(2)}$ s'obtient en sommant $E_i^{(2)}$ et $E_g^{(2)}$. En introduisant les variables réduites et ordonnant selon les puissances de u , on obtient :

$$e_p^{(2)} = \frac{\Omega^2}{6} u^3 + \left[\frac{1}{2} + 3(h + \alpha) \left(-\frac{\Omega^2}{6} \right) \right] u^2 + \left[h - 3(h + \alpha)^2 \left(-\frac{\Omega^2}{6} \right) + \left(-\frac{\Omega^2}{6} \right) 3(1 - \alpha)^2 \right] u + \frac{h^2}{2} - \frac{\Omega^2}{6} (1 - \alpha)^3 - \frac{\Omega^2}{6} (h + \alpha)^3 - \frac{\Omega^2}{6} 3h(1 - \alpha)^2$$

Question 21 : Dérivons partiellement l'expression ci-dessus relativement à u avec Ω fixé. En annulant la dérivée, on réobtient alors la réponse à la question 6.

Question 22 : Pour cette position d'équilibre, $\Omega = \Omega_{\max}$ et $u = \eta$. Il faut calculer la dérivée seconde de $\epsilon_p^{(2)}$ par rapport à u pour $u = \eta$ afin de tester la stabilité. Une dérivée positive correspondra à un équilibre stable.

$$\frac{d^2 e_p^{(2)}}{du^2} = \Omega_{\max}^2 h + 1 - \Omega_{\max}^2 (h + \alpha) \text{ Avec } \Omega_{\max}^2 = \frac{4h}{1+2\alpha} \text{ on obtient}$$

$$\frac{d^2 e_p^{(2)}}{du^2} = \frac{1+2\alpha-4\alpha h}{1+2\alpha} \text{ La solution est donc instable quand le num. est négatif, donc}$$

quand η est trop grand. Avec les valeurs numériques de la question 4, la solution est stable car num = 1 - 2/3 - 4/9. La stabilité des solutions autour du bec de la courbe valide la courbe trouvée mais ne remet pas en cause le phénomène non quasi-statique qui se produira si Ω^2 est augmenté de façon continue.

Question 23 : Il faut utiliser un tube fin, mais pas trop cependant pour que les phénomènes de tension superficielle restent négligeables.

Question 24 : Le calcul de $\frac{\mathbb{T}_p}{\mathbb{T}_u}$ fournit 5/3 donc effectivement une valeur

indépendante de Ω . $\forall \Omega$ $\frac{\mathbb{T}_p}{\mathbb{T}_u}$ ne s'annule jamais pour $u = 4/3$ et cela est conforme à nos résultats puisque la courbe $u_{(\Omega^2)}$ a une asymptote pour $u = 4/3$.

Si $\frac{\mathbb{T}_p}{\mathbb{T}_u}$ est indépendant de Ω évaluons cette valeur pour $\Omega = 0$, auquel cas, $\epsilon_p = \epsilon_g$ Avec $E_g^2 = \frac{\rho s g}{2} (h + z)^2$ $e_p^{(2)} = \frac{1}{2} (h + u)^2$ et on retrouve que $\frac{\mathbb{T}_p}{\mathbb{T}_u}$ vaut 5/3 pour $u = 4/3$.