

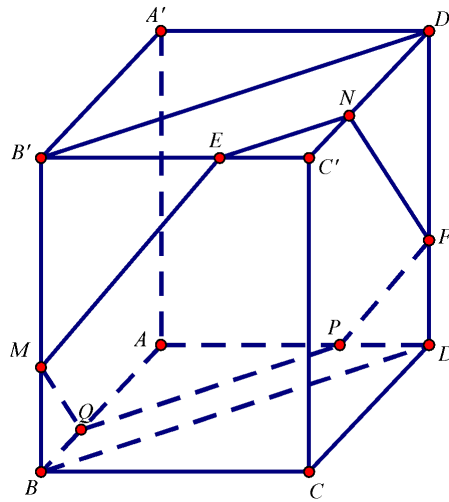
Câu 42. [1H2-4.4-4] (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 1 MĐ 904 năm 2017-2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các điểm M, N, P theo thứ tự đó thuộc các cạnh $BB', C'D', DA$

sao cho $BM = C'N = DP = \frac{a}{3}$. Tìm diện tích thiết diện S của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng (MNP) .

- A. $S = \frac{17\sqrt{3}a^2}{18}$. B. $S = \frac{5\sqrt{3}a^2}{18}$. C. $S = \frac{13\sqrt{3}a^2}{18}$. D. $S = \frac{11\sqrt{3}a^2}{18}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có $\frac{BM}{C'N} = \frac{MB'}{ND'} = \frac{BB'}{C'D'} = 1$, do đó theo định lý ta-let trong không gian thì $BC', MN, B'D'$ lần lượt cùng song song với một mặt phẳng. Mà $B'D' \parallel (BC'D)$ và $BC' \subset (BC'D)$ nên ta có $MN \parallel (BC'D)$. Chứng minh tương tự ta có $NP \parallel (BC'D)$. Do đó $(MNP) \parallel (BC'D)$. Qua P , kẻ $PQ \parallel BD, Q \in AB$. Qua N , kẻ $NF \parallel C'D, F \in D'D$. Qua M , kẻ $ME \parallel BC', E \in B'C'$.

Khi đó ta có thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) với hình lập phương là lục giác $MENFPQ$.

Dễ thấy $EN = PF = MQ = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, $NF = PQ = ME = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$ và tam giác $BC'D$ là tam giác đều vì $BC' = BD = DC' = a\sqrt{2}$. Do đó $\angle ENF = \angle FNP = \angle NPQ = \angle PQM = \angle QME = \angle MEN = 60^\circ$

Suy ra: $EF^2 = EN^2 + NF^2 - 2 \cdot EN \cdot NF \cdot \cos 60^\circ = \frac{2}{3}a^2 \Rightarrow EF = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Tương tự thì $FQ = QE = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Ta có $S_{MENFPQ} = 3.S_{ENF} + S_{EFQ} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2a^2}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{18} a^2$.

Câu 42. [1H2-4.4-4] (THPT CHUYÊN VINH PHÚC-LẦN 1-2018) Cho hình lập phương

$ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các điểm M, N, P theo thứ tự đó thuộc các cạnh $BB', C'D', DA$

sao cho $BM = C'N = DP = \frac{a}{3}$. Tìm diện tích thiết diện S của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng (MNP) .

A. $S = \frac{17\sqrt{3}a^2}{18}$.

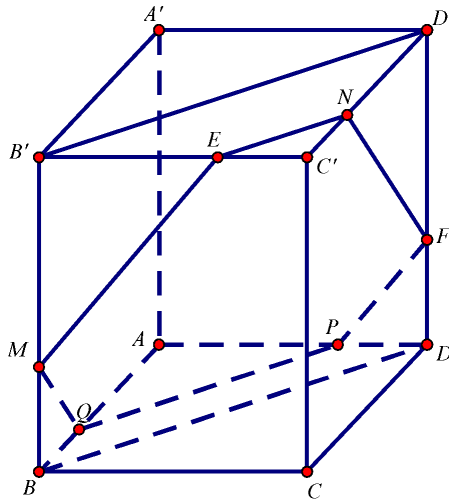
B. $S = \frac{5\sqrt{3}a^2}{18}$.

C. $S = \frac{13\sqrt{3}a^2}{18}$.

D. $S = \frac{11\sqrt{3}a^2}{18}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có $\frac{BM}{C'N} = \frac{MB'}{ND'} = \frac{BB'}{C'D'} = 1$, do đó theo định lý ta-let trong không gian thì $BC', MN, B'D'$ lần lượt cùng song song với một mặt phẳng. Mà $B'D' \parallel (BC'D)$ và $BC' \subset (BC'D)$ nên ta có $MN \parallel (BC'D)$. Chứng minh tương tự ta có $NP \parallel (BC'D)$. Do đó $(MNP) \parallel (BC'D)$. Qua P , kẻ $PQ \parallel BD, Q \in AB$. Qua N , kẻ $NF \parallel C'D, F \in D'D$. Qua M , kẻ $ME \parallel BC', E \in B'C'$.

Khi đó ta có thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) với hình lập phương là lục giác $MENFPQ$.

Dễ thấy $EN = PF = MQ = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, $NF = PQ = ME = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$ và tam giác $BC'D$ là tam giác đều vì $BC' = BD = DC' = a\sqrt{2}$. Do đó $\angle ENF = \angle FNP = \angle NPQ = \angle PQM = \angle QME = \angle MEN = 60^\circ$

Suy ra: $EF^2 = EN^2 + NF^2 - 2.EN.NF.\cos 60^\circ = \frac{2}{3}a^2 \Rightarrow EF = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Tương tự thì $FQ = QE = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Ta có $S_{MENFPQ} = 3.S_{ENF} + S_{EFQ} = 3.\frac{1}{2}.\frac{2a\sqrt{2}}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{2a^2}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{18}a^2$.