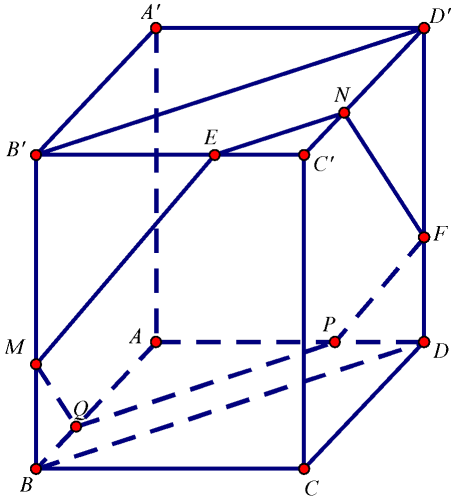
Câu 42. **[1H2-4.4-4] (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 1 MĐ 904 năm 2017-2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M,N,P theo thứ tự đó thuộc các cạnh BB', $C'D'$, DA sao cho $BM=C'N=DP=\dfrac{a}{3}$. Tìm diện tích thiết diện S của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).

A. $S=\dfrac{17\sqrt{3}a^2}{18}$. **B.** $S=\dfrac{5\sqrt{3}a^2}{18}$. **C.** $S=\dfrac{13\sqrt{3}a^2}{18}$. **D.** $S=\dfrac{11\sqrt{3}a^2}{18}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có $\dfrac{BM}{C'N}=\dfrac{MB'}{ND'}=\dfrac{BB'}{C'D'}=1$, do đó theo định lý ta-let trong không gian thì BC', MN, $B'D'$ lần lượt cùng song song với một mặt phẳng. Mà $B'D'//(BC'D)$ và $BC'\subset(BC'D)$ nên ta có $MN//(BC'D)$. Chứng minh tương tự ta có $NP//(BC'D)$. Do đó $(MNP)//(BC'D)$.

Qua P, kẻ $PQ//BD, Q\in AB$. Qua N, kẻ $NF//C'D, F\in D'D$.

Qua M, kẻ $ME//\mathrm{BC}', E\in B'C'$.

Khi đó ta có thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) với hình lập phương là lục giác $MENFPQ$.

Dễ thấy $EN=PF=MQ=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$, $NF=PQ=ME=\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$ và tam giác $BC'D$ là tam giác đều vì $BC'=BD=DC'=a\sqrt{2}$. Do đó $\widehat{ENF}=\widehat{NFP}=\widehat{FPQ}=\widehat{PQM}=\widehat{QME}=\widehat{MEN}=60^\circ$

Suy ra: $EF^2=EN^2+NF^2-2.EN.NF.\cos 60^\circ=\dfrac{2}{3}a^2\Rightarrow EF=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Tương tự thì $FQ=QE=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

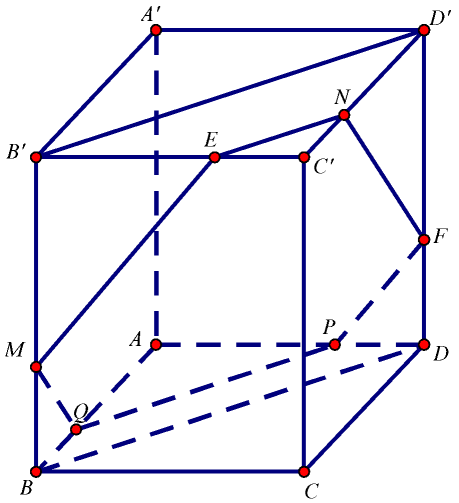
Ta có $S_{MENFPQ}=3.S_{ENF}+S_{EFQ}=3.\frac{1}{2}.\frac{2a\sqrt{2}}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{2a^2}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{18}a^2$.

Câu 42. **[1H2-4.4-4] (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC-LẦN 1-2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M,N,P theo thứ tự đó thuộc các cạnh $BB',\ C'D',\ DA$ sao cho $BM=C'N=DP=\frac{a}{3}$. Tìm diện tích thiết diện S của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).

A. $S=\frac{17\sqrt{3}a^2}{18}$. **B.** $S=\frac{5\sqrt{3}a^2}{18}$. **C.** $S=\frac{13\sqrt{3}a^2}{18}$. **D.** $S=\frac{11\sqrt{3}a^2}{18}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có $\frac{BM}{C'N}=\frac{MB'}{ND'}=\frac{BB'}{C'D'}=1$, do đó theo định lý ta-let trong không gian thì BC', MN, $B'D'$ lần lượt cùng song song với một mặt phẳng. Mà $B'D'//(BC'D)$ và $BC'\subset(BC'D)$ nên ta có $MN//(BC'D)$. Chứng minh tương tự ta có $NP//(BC'D)$. Do đó $(MNP)//(BC'D)$.

Qua P, kẻ $PQ//BD, Q\in AB$. Qua N, kẻ $NF//C'D, F\in D'D$.

Qua M, kẻ $ME//\mathrm{BC}', E\in B'C'$.

Khi đó ta có thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) với hình lập phương là lục giác $MENFPQ$.

Dễ thấy $EN=PF=MQ=\frac{a\sqrt{2}}{3}$, $NF=PQ=ME=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ và tam giác $BC'D$ là tam giác đều vì $BC'=BD=DC'=a\sqrt{2}$. Do đó $\widehat{ENF}=\widehat{NFP}=\widehat{FPQ}=\widehat{PQM}=\widehat{QME}=\widehat{MEN}=60^\circ$

Suy ra: $EF^2=EN^2+NF^2-2.EN.NF.\cos 60^\circ=\frac{2}{3}a^2\Rightarrow EF=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Tương tự thì $FQ=QE=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Ta có $S_{MENFPQ} = 3.S_{ENF} + S_{EFQ} = 3.\frac{1}{2}.\frac{2a\sqrt{2}}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{2a^2}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{18}a^2$.