

concours ECRIN 1996 (série M, durée : 4 heures)

PREMIER PROBLEME : STRUCTURE DE FILTRE DITE " A VARIABLE D'ETAT "

I.1) On obtient immédiatement :

montage	relation entrée(s)-sortie en régime variable	relation entrée(s)-sortie en régime sinusoïdal forcé
figure 1	$\frac{ds}{dt} = -\omega_0 e$	$\underline{H_1} = j \frac{\omega_0}{\omega}$
figure 2	$s(t) = -ae(t)$	$\underline{H_2} = -a$
figure 3	$s(t) = -e_1(t) - e_2(t) - e_3(t)$	$\underline{S} = -\underline{E_1} + \underline{E_2} + \underline{E_3}$

I.2) On obtient (par exemple par utilisation du théorème de Millman aux différentes bornes d'entrée (-) des AO) :

$$V_M = - (e + V_P + s)$$

$$\frac{dV_N}{dt} = -\omega_0 V_M$$

$$\frac{ds}{dt} = -\omega_0 V_N$$

$$V_P = -aV_N$$

par élimination de V_P , V_M , V_N , on obtient : $\frac{d^2 s}{dt^2} + a\omega_0 \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = -\omega_0^2 e(t)$

La fonction de transfert en régime sinusoïdal permanent est donc :

$$\underline{H_4} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{-\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + ja\omega_0\omega} = \frac{-1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + ja\frac{\omega}{\omega_0}}$$

et le gain logarithmique, en décibels, est donc, si on pose : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$:

$$H_{4dB} = 20 \log_{10} |\underline{H_4}| = 10 \log \left((1 - x^2)^2 + a^2 x^2 \right)$$

si on choisit : $a = \sqrt{2}$, on obtient alors : $H_{4dB} = -10 \log(1 + x^4)$



on a un filtre passe-bas du second ordre

I.3) Si on a un circuit RLC série, si e est la tension aux bornes de l'ensemble et si u_C est la tension aux bornes du condensateur, on obtient immédiatement , en régime sinusoïdal forcé et en notation complexe, avec des notations évidentes :

$$\frac{\underline{u}_C}{\underline{E}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

qui est bien de la forme : $\frac{\underline{u}_C}{\underline{E}} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + ja \frac{\omega}{\omega_0}}$ si l'on pose : $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$ et $RC = \frac{a}{\omega_0}$ (ou encore : $a = R\sqrt{\frac{C}{L}}$)

on peut vérifier que $\frac{\underline{u}_L}{\underline{E}}$ et $\frac{\underline{u}_R}{\underline{E}}$ n'ont pas la même forme : il faut donc choisir comme tension de sortie la tension aux bornes du condensateur

II.1) lorsque K est en A_1 : $q_1 = C_0 \cdot V_1$

lorsque K est en A_2 : $q_2 = C_0 \cdot V_2$

la charge transférée est donc : $Q = q_1 - q_2 = C_0 \cdot (V_1 - V_2)$

cette charge est transférée en un temps T_h ; le courant moyen est donc :

$$i = \frac{Q}{T_h} = \frac{C_0(V_1 - V_2)}{T_h} \quad (1)$$

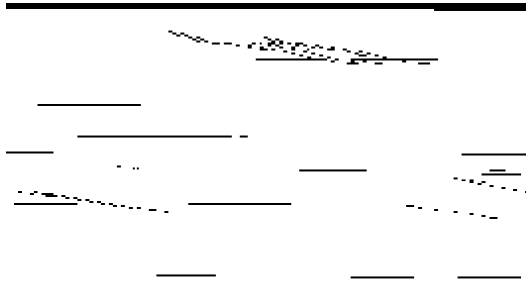
II.2) L'équation (1) montre que le dispositif simule une résistance R_e telle que : $i = \frac{V_1 - V_2}{R_e}$,

donc telle que : $R_e = \frac{T_h}{C_0}$

II.3) pour $0 < t < T_h$:

lorsque K est en A₁ : $q_1 = C_0 E_0$

lorsque K est en A₂ :



$V_- = V_+ = 0$; C₀ a perdu sa charge, qui est passée sur C ; on a alors : $\frac{q_1}{C} = -s$, donc :

$$s(T_h) = -\frac{C_0}{C} E_0$$

remarque : on peut aussi obtenir ce résultat en remplaçant le commutateur par la résistance R_e déterminée à la question II.2) et en utilisant l'intégrateur inverseur :

$$s(T_h) = -\frac{1}{R_e C} \int_0^{T_h} E_0 dt = -\frac{T_h}{R_e C} E_0 = -\frac{C_0}{C} E_0$$

pour $t = p.T_h$: $s(pT_h) = -p \frac{C_0}{C} E_0$

s est limité par la tension de saturation de l'amplificateur opérationnel :

$$s_{\text{extrema}} = -V_{\text{sat}} \quad (\text{si } E_0 > 0)$$

II.4) a) équation de conservation de la charge :

$$-C \cdot s(pT_h) = -C \cdot s((p-1)T_h) + C_0 \cdot e((p-1)T_h)$$

b) en régime sinusoïdal permanent, on a donc, en notation complexe :

$$-C \cdot \underline{S_0} \exp(j\omega p T_h) = -C \cdot \underline{S_0} \exp(j\omega (p-1) T_h) + C_0 \cdot E_0 \exp(j\omega (p-1) T_h)$$

d'où :

$$\frac{C_0}{C} E_0 \exp(j\omega (p-1) T_h) = \underline{S_0} (1 - \exp(j\omega T_h)) \gg \underline{S_0} (-j\omega T_h) \quad \text{si } \omega T_h \ll 1$$

1, c'est-à-dire si : $T \gg T_h$

$$\text{alors : } \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{S_0}}{E_0} = -\frac{C_0}{jC\omega T_h} = -\frac{1}{jR_e C\omega}$$

on retrouve un montage intégrateur inverseur

DEUXIEME PROBLEME : ETUDE DE DIPOLES ELECTRIQUES

A) DIPOLE ELECTROSTATIQUE DANS LE VIDE :

A.1) $\vec{p} = q\vec{NP} = qa\vec{u}_z$

A.2)



calcul classique : $V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} \right)$

où : $\frac{1}{PM} = \left(r^2 - arc\cos q + \frac{a^2}{4} \right)^{\frac{-1}{2}} \gg \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{2r} \cos q \right)$

$$\frac{1}{NM} = \left(r^2 + arc\cos q + \frac{a^2}{4} \right)^{\frac{-1}{2}} \gg \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{2r} \cos q \right)$$

donc : $V(M) = \frac{p \cos q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

A.3) $\vec{E}(M) = - \text{grad}(V(M)) = - \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial q} \vec{u}_q - \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial V}{\partial j} \vec{u}_j$

donc : $\vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2 \cos q}{r^3} \vec{u}_r + \frac{\sin q}{r^3} \vec{u}_q \right)$

or : $\frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} = \cos q \vec{u}_r - \sin q \vec{u}_q$

donc : $\sin \vec{u}_q = \cos \vec{u}_r - \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{\|\vec{p}\|} - \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|}$

d'où, par report dans l'expression obtenue pour le champ électrostatique :

$$\vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^3 \|\vec{p}\|} \vec{u}_r + \frac{1}{r^3} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{\|\vec{p}\|} - \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} \right) \vec{u}_q \right)$$

d'où, finalement : $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(3\vec{u}_r (\vec{p} \cdot \vec{u}_r) - \vec{p} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{3r(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^2} - \vec{p} \right)$

A.4) le long d'une ligne de champ : $d\vec{l}(M) // \{\vec{E}(M)\}$

donc : $\varphi = \text{constante}$ et $\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta}$; donc : $\frac{r^3 dr}{2 \cos \theta} = \frac{r^4 d\theta}{\sin \theta} \Rightarrow \ln r = 2 \ln |\sin \theta| + cte$

$$\Rightarrow r = k \cdot \sin^2 \theta$$

A.5) (cf. cours)

si le dipôle est placé en un point M, il subit :

la force $\vec{F} = (d_M) \vec{E}_{ext}$

le moment en A : $\vec{G}(M) = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}(M)$

$$\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{2p_1}{z_M^3} \vec{u}_z$$

A.6) la molécule acquiert un moment dipolaire : (si $z_M > 0$; le cas $z_M < 0$ se traite de manière analogue)

elle est alors soumise à la force : $\vec{F} = (d) \vec{E} = p \frac{\vec{E}(M)}{\|\vec{E}\|} = \frac{\alpha p_1}{2p z_M^3} \frac{\vec{E}}{\|\vec{E}\|} \left(\frac{p_1}{2p \epsilon_0 z_M^3} \right) \vec{u}_z$

donc : $\vec{F} = - \frac{3\alpha p_1^2}{4\pi^2 \epsilon_0 z_M^7} \vec{u}_z$ cette force, dirigée selon $-\vec{u}_z$, est une force attractive (force de Van der Waals)

B) MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE PLONGÉE DANS CHAMP ELECTROSTATIQUE D'UN DIPOLE :

B.1) Le principe fondamental de la dynamique s'écrit pour la particule : $m \vec{a} = Q \vec{E}$

où : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \right) \vec{u}_r + \left(2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi} \right) \vec{u}_\varphi$

et : $\vec{E} = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta$

donc, par projection :
)

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = 2k \frac{\cos \theta}{r^3} \quad (1) \quad \left(\text{où : } k = \frac{Qp}{4\pi\epsilon_0 m} \right)$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = k \frac{\sin \theta}{r^3} \quad (2)$$

B.2) Ecrivons la conservation de l'énergie mécanique de la particule :

l'énergie potentielle U de la particule de charge Q dans le champ électrostatique $\vec{E}$ est :
U(M) = Q.V(M), où V(M) est le potentiel électrostatique créé par le dipôle :

$$U(M) = Q.V(M) = \frac{Qp \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = km \frac{\cos \theta}{r^2}$$

l'énergie cinétique de la particule est :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right)$$

donc l'énergie mécanique E = E_c + U de la particule, qui se conserve au cours du temps, est :

$$E = E_c + U = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + km \frac{\cos \theta}{r^2} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{km}{r_0^2} \quad (3)$$

B.3) (3) $\Rightarrow \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{2k \cos \theta}{r^2} = \frac{2E}{m}$ (3')

$$(1) \Rightarrow \frac{2k \cos \theta}{r^2} = r \ddot{r} - r^2 \dot{\theta}^2 \quad (1')$$

par report de (1') dans (3'), on obtient :

$$\dot{r}^2 + r \ddot{r} = \frac{2E}{m} = v_0^2 + \frac{2k}{r_0^2} \quad (4)$$

on intègre alors (4) par rapport à t entre t = 0 et t :

$$r \dot{r} = \left(v_0^2 + \frac{2k}{r_0^2} \right) t \quad \left(\text{car } \dot{r}(t=0) = 0 \right)$$

on intègre alors de nouveau par rapport à t entre t = 0 et t :

$$\frac{1}{2} r^2 = \left(v_0^2 + \frac{2k}{r_0^2} \right) \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} r_0^2 = \frac{2E}{m} \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} r_0^2$$

donc :

$$r^2(t) = \frac{2E}{m} t^2 + r_0^2$$

conclusion qualitative :

* si E > 0 : r augmente de façon monotone

* si $E < 0$: r diminue de façon monotone (mais l'approximation dipolaire cesse d'être valable lorsque r tend vers zéro...)

* si $E = 0$: $r(t) = r_0 = \text{constante}$: la trajectoire est circulaire

B.4) Lorsque la trajectoire est circulaire : $r(t) = r_0 = \text{constante}$ et $E = 0$; donc :

$$k = -\frac{v_0^2 r_0^2}{2}$$

alors : $(1) \Rightarrow \dot{q}^2 = -\frac{2k \cos q}{r_0^4} = \frac{v_0^2}{r_0^2} \cos q$

et : $\frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}} = \pm \frac{v_0}{r_0} dt$

or : $\cos \theta > 0$ car $\frac{v_0^2}{r_0^2} \cos \theta = \dot{\theta}^2$; donc : $q \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2} \right]$

en $\theta = \pm \frac{\pi}{2}, \dot{\theta} = 0$: θ est extrême : la particule oscille donc sur le demi-cercle de rayon r_0

entre $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et $\theta = +\frac{\pi}{2}$; la période d'oscillation correspond à quatre fois le temps mis pour

aller, par exemple, de $\theta = 0$ à $\theta = \frac{\pi}{2}$; donc : $T = 4 \int_{q=0}^{q=\frac{\pi}{2}} dt = 4 \int_{q=0}^{q=\frac{\pi}{2}} \frac{r_0}{v_0} \frac{dq}{\sqrt{\cos q}} = 4 \frac{r_0}{v_0} I$

C) RAYONNEMENT DIPOLAIRE :

C.1)

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_p}{\epsilon_0}$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

C.2) (cf. cours ou calcul immédiat)

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \text{rot} \vec{A} \\ \vec{E} &= -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

$\vec{A}$ n'est défini qu'au gradient d'une fonction scalaire près

équation aux dérivées partielles vérifiée par $\vec{A}$:

$$\vec{rot}(\vec{rot}\vec{A}) = \vec{rot}\vec{B} = \frac{-1}{c^2} \frac{1}{r} \left(dV + \frac{1}{r} \vec{A} \right) = \frac{-1}{c^2} \left(d \frac{1}{r} V + \frac{1}{r^2} \vec{A} \right) = gr \{ \vec{ad}(\) - D\vec{A} \}$$

$$\text{donc : } D\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{r^2} \vec{A} = gr \left\{ \vec{ad} \left(+ \frac{1}{c^2} \frac{1}{r} V \right) \right\} \quad (5)$$

$$\text{donc (5) est de la forme } \Delta A - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad \text{si, et seulement si :} \quad \text{div} \vec{A} + \frac{1}{C^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

(jauge de Lorentz)

équation aux dérivées partielles vérifiée par V :

on l'obtient en calculant :

$$DV = \text{div}(dV) = \text{div} \left(-\vec{E} - \frac{1}{r} \vec{A} \right) = -\text{div} \left\{ \vec{E} - \frac{1}{r} \vec{A} \right\} = 0 + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = + \frac{1}{c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\text{donc : } \Delta V - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

C.3) De la jauge de Lorentz on déduit $\frac{\partial V}{\partial t}$, puis, par intégration par rapport à t, en négligeant tout potentiel scalaire statique, on obtient V :

$$\text{div} \{ \vec{A} = -i\omega \frac{m_0}{4p} qz_0 \exp(-i\omega t) \text{div} \left(\frac{\exp(ikr)}{r} \vec{u}_z \right) \}$$

$$\text{or : } \text{div} \left(\frac{\exp(ikr)}{r} \vec{u}_z \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{\exp(ikr)}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{\exp(ikr)}{r} \right) \frac{1}{r} = \cos q \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \exp(ikr)$$

alors, d'après la jauge de Lorentz :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial t} = -C^2 \text{div} \{ \vec{A} = +i\omega C^2 \frac{m_0}{4p} p_0 \exp(-i\omega t) \cos q \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \exp(ikr) \}$$

$$\text{d'où, par intégration par rapport à t : } V(t) = \frac{p_0 \cos q}{4pe_0} \frac{1}{r^2} (1 - ikr) \exp(i(kr - \omega t))$$

$$\text{C.4) } \vec{B} = \vec{rot} \vec{A} ; \text{ or : } \vec{A} = A(r, t) \vec{u}_z = A(r, t) \left(\cos q \vec{u}_r - \sin q \vec{u}_q \right)$$

le formulaire permet alors de calculer : $\vec{B} = B_\phi \vec{u}_\phi$, où :

$$B_j = -i\omega \frac{m_0}{4p} \frac{p_0 \exp(-i\omega t)}{r} \left[-\sin q \frac{1}{r} \exp(ikr) + \sin q \frac{\exp(ikr)}{r} \right] = -i\omega \frac{m_0}{4p} \frac{p_0}{r^2} (1 - ikr) \sin q \exp(i(kr - \omega t))$$

$$\text{donc : } \vec{B} = -i\omega \frac{m_0}{4p} \frac{p_0}{r^2} (1 - ikr) \sin q \exp(i(kr - \omega t)) \vec{u}_j$$

$$C.5) \quad \vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \text{ où :}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -i\omega \vec{A}$$

$$\text{grad}V = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \exp(i(kr - \omega t)) \left[\left(\frac{\cos q}{r^3} (-2 + 2ikr + k^2 r^2) \right) \vec{u}_r - \frac{\sin q}{r^3} (1 - ikr) \vec{u}_q \right]$$

après calculs, on obtient : $\vec{E} = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta$, où :

$$E_r = \frac{2p_0 \cos q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (1 - ikr) \exp(i(kr - \omega t))$$

$$E_q = \frac{p_0 \cos q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (1 - ikr - k^2 r^2) \exp(i(kr - \omega t))$$

C.6) Si $kr \gg 1$, c'est-à-dire : $r \gg \lambda$, alors les expressions des champs électrique et magnétique se simplifient selon :

$$\vec{E} \gg -\frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{k^2 \sin q}{r} \exp(i(kr - \omega t)) \vec{u}_q$$

$$\vec{B} \gg -\frac{m_0 p_0}{4\pi} \frac{\omega k \sin q}{r} \exp(i(kr - \omega t)) \vec{u}_j$$

alors : $\vec{E} \perp \vec{B}$ et $\vec{B} = \frac{\omega}{k} \vec{u}_r \wedge \vec{E} = \frac{\vec{u}_r}{C} \wedge \vec{E}$: l'onde a localement une structure d'onde plane se propageant dans la direction et le sens de $\vec{u}_r$

$$\vec{R} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{E^2}{\mu_0 C} \vec{u}_r$$

C.7) vecteur de Poynting :

il faut ici revenir à la notation réelle ; en utilisant les résultats obtenus pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ (sous

l'hypothèse $kr \gg 1$), on obtient : $\vec{R} = \frac{1}{m_0 C} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 p_0^2 k^4 \frac{\sin^2 q}{r^2} \cos^2(kr - \omega t) \vec{u}_r$

la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting est donc :

$$\vec{R} \gg = \frac{1}{m_0 C} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 p_0^2 k^4 \frac{\sin^2 q}{r^2} \cdot \frac{1}{2} \vec{u}_r$$

la puissance P_m rayonnée à travers une sphère de centre 0 et de rayon r, en valeur moyenne temporelle, est le flux de la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting sortant de cette surface :

$$P_m = \iint_{sphre(S)} \vec{R} \cdot \vec{u}_r dS = \iint_{sphre(S)} \left(\frac{1}{m_0 c} \left(\frac{1}{4pe_0} \right)^2 p_0^2 k^4 \frac{\sin^2 q}{r^2} \cdot \frac{1}{2} \vec{u}_r \right) \cdot \vec{u}_r r^2 \sin q dq dj$$

$$P_m = \frac{1}{2m_0 c} \left(\frac{1}{4pe_0} p_0 k^2 \right)^2 \cdot 2p \int_0^p \sin^3 q dq = \frac{1}{3} \frac{p_0^2}{4pe_0} \frac{w^4}{c^3} = \frac{p_0^2 c}{12pe_0} \left(\frac{2p}{\lambda} \right)^4 \quad (\text{ formule$$

de Larmor)