

Corrigé Physique Modélisation – E3A PSI 2016

Proposé par S. Laurette (lycée Robespierre – Arras).

Relu et corrigé par D. Despinasse.

Merci de signaler toute erreur ou coquille à simon.laurette@prepas.org

Peut-être diffusé librement auprès des étudiants.

Première Partie – Télémétrie par Ultrasons

A1. À l'aide des informations apportées par ce Cahier Technique, comparer les portées de ces deux détecteurs.

La portée d'un détecteur à ultrasons (jusque 10m) est nettement supérieure à celle d'un détecteur infrarouge (jusque 2m)

A2. Comparer les capacités de détection des deux capteurs en fonction de la nature du matériau et de la couleur de l'obstacle.

Le capteur ultrason est insensible à la couleur et à la forme de l'obstacle. En revanche, il détecte mal les matériaux souples ou déformables tels le coton... sur lesquels l'onde ultrasonore réfléchi est faible. Il est donc plus adapté à la détection de matériaux rigides.

Pour un détecteur optique, la rigidité ou souplesse du matériau a peu d'influence sur la détection ; mais la couleur de l'objet étudié devient ici un facteur à considérer.

A3. Relever au moins un facteur d'influence perturbant la détection par ultrasons et un perturbant la détection par infrarouges.

Facteur d'influence perturbant la détection par ultrasonore : vent fort (courant d'air)

Pour infrarouges : dans le cas d'un objet transparent, la modification de la couleur de fond derrière l'objet est perturbante.

A4. Pour obtenir des ultrasons, donner l'ordre de grandeur caractéristique de la fréquence f_0 de la tension alternative à laquelle il faut soumettre la lame de quartz. On précisera les limites du domaine des fréquences des signaux acoustiques audibles par l'homme.

Ultrasons $\Rightarrow f_0 > 20\text{kHz}$.

Usuellement en TP, on utilise des émetteurs à 40kHz.

Signaux acoustiques audibles : $20\text{Hz} < f < 20\text{kHz}$

A5. Quel est le nom du phénomène physique à l'origine de l'élargissement des ondes émises ? Dans le tableau, ce phénomène est caractérisé par le cône d'émission. Quelle(s) est (sont) le(s) grandeur(s) physique(s) qui permettent d'expliquer l'écart entre les cônes d'émission ?

C'est la diffraction qui est responsable de l'élargissement des ondes émises, et c'est la longueur d'onde (et donc, indirectement, la célérité) des différentes ondes qui explique l'écart entre les cônes d'émission. En effet :

$$\lambda_{\text{ultrason}} > \lambda_{\text{IR}}$$

A6. Nommer un autre exemple d'utilisation de détecteurs par ultrasons, ainsi qu'un autre exemple d'utilisation de détecteurs infrarouges.

Les ultrasons sont également utilisés pour du contrôle non destructif (détection de fissures...) ; et les infrarouges pour la transmission d'informations à faible distance (télécommandes) ou encore les caméras thermiques.

B1. L'air étant assimilé à un gaz parfait de masse molaire M_a , à la température T_0 supposée (dans un premier temps) constante, retrouver l'expression de la pression p de l'air en fonction de μ , M_a , T_0 et R . En déduire que l'approximation acoustique se traduit aussi par la relation $\mu_1 \ll \mu_0$.

Pour un gaz parfait :

$$p = \frac{nRT_0}{V} = \frac{mRT_0}{VM_a} = \frac{\mu RT_0}{M_a}$$

Avec $p = P_0 + p_1$, il vient :

$$\mu = \frac{(P_0 + p_1)M_a}{RT_0} = \frac{P_0 M_a}{RT_0} + \frac{p_1 M_a}{RT_0} = \mu_0 + \mu_1$$

Ainsi, si $p_1 \ll P_0$, alors $\mu_1 \ll \mu_0$

B2. Donner l'expression de la masse $dm(t)$ présente dans le volume dx à l'instant t . De même pour la masse $dm(t + dt)$ présente dans le volume dx à l'instant $t + dt$.

$$\begin{aligned} dm(t) &= \mu(x, t) dx \\ dm(t + dt) &= \mu(x, t + dt) dx \end{aligned}$$

B3. Exprimer la masse δm_e entrant dans dx pendant la durée dt par la surface située en x . Même question pour la masse δm_s sortant de dx pendant la durée dt par la surface située en $x + dx$.

Soit $D_m = \mu v S$ le débit massique du fluide dans le cylindre :

$$\delta m_e = D_m(x) dt = \mu(x, t) v(x, t) S dt$$

$$\delta m_s = D_m(x + dx) = \mu(x + dx, t)v(x + dx, t)Sdt$$

B4. Montrer que, dans le cas de l'approximation acoustique, la conservation de la masse pour le système étudié se traduit par la relation (R1) :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0. \quad (R1)$$

Effectuons un bilan de masse sur le système ouvert compris entre x et $x+dx$, pendant la durée dt :

$$dm(t + dt) = dm(t) + \delta m_e - \delta m_s$$

Soit, en remplaçant et en factorisant :

$$(\mu(t + dt, x) - \mu(t, x))dt = (\mu(x, t)v(x, t) - \mu(x + dx, t)v(x + dx, t))Sdt$$

On reconnaît des développements de Taylor :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} dt d\tau = - \frac{\partial(\mu v)}{\partial x} dx S dt$$

Or $d\tau = S dx$

$$\frac{\partial(\mu_0 + \mu_1)}{\partial t} = - \frac{\partial(\mu_0 v)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu_1 v)}{\partial x}$$

Or μ_0 est constante, et $v = v_1$ infiniment petit d'ordre 1. Le terme $\mu_1 v_1$ est alors un infiniment petit d'ordre 2, que l'on néglige dans l'approximation acoustique :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = - \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x}$$

B5. Que devient l'expression précédente, dans le cas unidimensionnel et dans le cadre de l'approximation acoustique ? On appelle (R2) la relation ainsi obtenue.

L'opérateur gradient se simplifie en 1D cartésien :

$$(\mu_0 + \mu_1) \frac{\partial v_1}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (P_0 + p_1)$$

En négligeant le terme d'ordre 2, et avec P_0 constante :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial x}$$

B6. On considère que, pour des ondes ultrasonores se propageant dans des fluides, l'hypothèse adiabatique est adéquate. Justifier succinctement et sans calculs, la raison de cette hypothèse.

La perturbation engendrée par une onde sonore **est rapide**, ainsi la transformation thermodynamique subie par une particule de fluide atteinte par l'onde sonore s'effectue sans transfert thermique (qui n'ont pas le temps d'avoir lieu) : on la modélise alors par une adiabatique.

B7. Établir, dans le cas de l'approximation acoustique, la relation liant μ_1 à μ_0 , p_1 et χ_s . Cette relation constitue la relation (R3).

$$\chi_s = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial p} = \frac{1}{\mu_0 + \mu_1} \frac{\mu_1}{p_1}$$

$$\mu_1 = \chi_s (\mu_0 + \mu_1) p_1$$

Soit, en ne conservant que les termes d'ordre 1 :

$$\mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1$$

B8. En utilisant les relations (R1), (R2) et (R3), montrer que la surpression p_1 vérifie l'équation de d'Alembert à une dimension :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0.$$

On donnera l'expression de la célérité c de l'onde ultrasonore en fonction de μ_0 et χ_s .

Dérivons (R2) par rapport à x :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = - \mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = - \mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} = - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(- \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mu_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2}$$

En utilisant (R3), on déduit :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$$

B9. L'air étant assimilé à un gaz parfait de coefficient γ (rapport des capacités thermiques à pression et volume constant), exprimer χ_s en fonction de γ et P_0 et en déduire que l'expression de la célérité c est :

$$c(T_0) = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M_a}}$$

L'évolution étant adiabatique réversible pour l'air considéré comme gaz parfait, la loi de Laplace, dont on prend le logarithme, donne :

$$pV^\gamma = cste \Rightarrow \ln \ln(p) + \gamma \ln \ln(V) = cste$$

Différencions :

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

$$\text{Or } \mu = \frac{m}{V} \Rightarrow \ln \ln(\mu) = \ln \ln(m) - \ln \ln(V) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = - \frac{dV}{V}$$

D'où :

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\mu}{\mu} \Rightarrow \frac{p_1}{p_0} = \gamma \frac{\mu_1}{\mu_0} = \gamma \chi_s p_1$$

Donc :

$$\chi_s = \frac{1}{\gamma p_0}$$

Or la loi des gaz parfaits donne :

$$p_0 = \frac{nRT_0}{V} = \frac{mRT_0}{M_a V} = \frac{\mu_0 RT_0}{M_a}$$

$$\Rightarrow \chi_s = \frac{M_a}{\gamma \mu_0 RT_0} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{M_a / \gamma RT_0}} = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M_a}}$$

B10. Sur l'intervalle envisagé de température (voir figure 2) l'évolution de la célérité des ultrasons est fonction de la température θ mesurée en degré Celsius suivant la relation : $c(\theta) = a \cdot \theta + b$. Déterminer graphiquement les valeurs de a et de b .

$$c(10^\circ) = 337 \text{ m.s}^{-1} \text{ et } c(30^\circ) = 348.5 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\Rightarrow a = 0.59 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\Rightarrow b = 331 \text{ m.s}^{-1}$$

B11. Sur l'intervalle envisagé de température de la figure 2, linéariser la relation obtenue à la question B9. Déterminer les expressions de a et de b en fonction de c_0 et $T_{273} = 273 \text{ K}$. Déduire de b les valeurs numériques de c_0 et γ , sachant que dans le cas de l'air, $M_a = 29,0 \text{ g.mol}^{-1}$.

Sur l'intervalle considéré, $T_0 = T_{273} + dT$ avec $10\text{K} < dT < 30\text{K} \ll T_{273}$

On peut donc écrire :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R}{M_a}} \sqrt{T_{273} + dT} = \sqrt{\frac{\gamma RT_{273}}{M_a}} \sqrt{1 + \frac{dT}{T_{273}}} = c_0 \sqrt{1 + \frac{dT}{T_{273}}}$$

Soit, en effectuant un DL à l'ordre 1 :

$$c \approx c_0 \left(1 + \frac{dT}{2T_{273}} \right) = \frac{c_0}{2T_{273}} dT + c_0$$

$$a = \frac{c_0}{2T_{273}}$$

$$b = c_0 = 331 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\gamma = \frac{c_0^2 M_a}{RT_{273}} = 1,4$$

B12. Justifier l'expression mathématique (lignes 13 et 14) du programme qui calcule la valeur de l'écart e . Quelle est la valeur de la température de référence θ_{ref} ?

Soit θ la température réelle et θ_{ref} la température de référence. Soit Δt le temps mis par l'onde pour effectuer l'aller retour.

$$e = d_m - d_T = c(\theta_{ref})\Delta t - c(\theta)\Delta t = c(\theta)\Delta t \left(-1 + \frac{c(\theta_{ref})}{c(\theta)} \right)$$

$$e = d_T \left(\frac{c(\theta_{ref})}{c(\theta)} - 1 \right)$$

On retrouve bien la formule codée, avec $\theta_{ref} = 20^\circ$.

B13. D'après le programme, quelle est l'unité de l'écart e qui devrait être précisée sur la figure 3 ? Quelles sont les valeurs numériques de θ_1 , θ_2 , θ_3 et θ_4 ? Pourquoi e est-il négatif pour θ_4 ?

La multiplication par 100 de la ligne 14 indique que e s'exprime **en centimètres**.

Les valeurs de ces quatre températures sont respectivement : **0, 10, 20 et 30°**.

e est négatif pour θ_4 car la vitesse réelle de l'onde est supérieure à celle de référence du robot. La distance mesurée est donc **inférieure** à la distance réelle.

B14. Que vaut l'écart relatif pour une distance réelle robot-obstacle de 1,5 m et une température $\theta = 30^\circ\text{C}$? Est-il pertinent d'intégrer un capteur de température au robot pour estimer les perturbations dues aux variations de température pouvant exister dans le domaine de détection ?

$d_T = 1.5\text{m} \Rightarrow e = -2.5\text{cm}$ d'après le graphique. L'écart relatif est donc :

$$\varepsilon_r = \left| \frac{e}{d_T} \right| = 1.7\%$$

Si le cahier des charges de la détection n'est pas trop exigeant, on peut se passer alors d'intégrer le capteur de température.

C1. Expliciter la condition aux limites à l'interface pour la pression et montrer qu'elle conduit à la relation :

$$p_{i0} + p_{r0} = p_{t0} \quad (\text{R4})$$

Continuité de la pression au niveau de l'interface :

$$p(0^-, t) = p(0^+, t) \Rightarrow p_{i(0,t)} + p_r(0, t) = p_t(0, t)$$

$$\Rightarrow p_{i0} \exp \exp(j\omega_0 t) + p_{r0} \exp \exp(j\omega_0 t) = p_{t0} \exp(j\omega_0 t)$$

$$p_{i0} + p_{r0} = p_{t0}$$

C2. Expliciter la condition aux limites à l'interface pour la vitesse et montrer qu'elle conduit à la relation :

$$v_{i0} + v_{r0} = v_{t0} \quad (\text{R5})$$

Le même raisonnement que précédemment, partant de la continuité de la vitesse de part et d'autre de l'interface, donne la relation annoncée.

C3. Dédurre des relations (R4) et (R5) les expressions des coefficients de réflexion $r = \frac{v_{r0}}{v_{i0}}$ et de transmission $t = \frac{v_{t0}}{v_{i0}}$ en amplitude, en fonction de Z_1 et de Z_2 .

(R4) :

$$1 + \frac{p_{r0}}{p_{i0}} = \frac{p_{t0}}{p_{i0}} \Rightarrow 1 - \frac{Z_1 v_{r0}}{Z_1 v_{i0}} = \frac{Z_2 v_{t0}}{Z_1 v_{i0}} \Rightarrow 1 - r = \frac{Z_2}{Z_1} t$$

(R5) :

$$1 + \frac{v_{r0}}{v_{i0}} = \frac{v_{t0}}{v_{i0}} \Rightarrow 1 + r = t$$

En sommant les deux expressions précédentes :

$$\left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right)t = 2$$

$$t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$r = t - 1 = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

C4. Quelle est la signification physique du vecteur de Poynting $\vec{\pi}$? Quelle est son unité usuelle ?

Il traduit le déplacement de l'énergie acoustique, et s'exprime en $W \cdot m^{-2}$.

C5. Exprimer R et T en fonction de Z_1 et de Z_2 .

$$\| < \vec{\pi}_r > \| = \left\| \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p_{r0} \exp(j\omega_0 t) v_{r0} \exp(-j\omega_0 t)) \right\| = \frac{1}{2} Z_1 v_{r0}^2$$

De même :

$$\| < \vec{\pi}_i > \| = \frac{1}{2} Z_1 v_{i0}^2 \quad \text{et} \quad \| < \vec{\pi}_t > \| = \frac{1}{2} Z_2 v_{t0}^2$$

Ainsi :

$$R = \frac{v_{r0}^2}{v_{i0}^2} = r^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$$

Et :

$$T = \frac{Z_2}{Z_1} \frac{v_{t0}^2}{v_{i0}^2} = \frac{Z_2}{Z_1} t^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

C6. En déduire que $R + T = 1$. Que traduit cette relation ?

$$R + T = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 - 2Z_1 Z_2 + 4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = 1$$

Qui traduit la conservation de l'énergie acoustique : toute l'énergie incidente est soit réfléchi, soit transmise.

C7. En utilisant les figures 5 et 6, et en expliquant votre raisonnement, déterminer le milieu que le robot autonome détectera le moins. Pour ce milieu, déterminer les valeurs des coefficients de réflexion et de transmission. L'onde est-elle bien réfléchi par les matériaux usuels rencontrés dans une maison ?

Le robot détectera le moins les milieux pour lesquels R sera faible (ie : T proche de 1), c'est-à-dire ceux pour lesquels l'impédance acoustique Z_2 est proche de celle de l'air Z_1 . C'est donc le **polystyrène expansé** qui sera le moins bien

détecté, pour lequel $\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{6,0 \cdot 10^3}{4,2 \cdot 10^2} \approx 15$

D'après le graphe, on aura un coefficient de transmission #0.3 => $R \approx 0.7$

Pour tous les autres matériaux $\frac{Z_2}{Z_1} > 1000 \Rightarrow T \rightarrow 0$ et $R \rightarrow 1$: **ils seront donc bien détectés.**

D1. Sachant que les vitesses instantanées incidentes $\vec{v}_i(x, t)$ et réfléchies $\vec{v}_r(x, t)$ vérifient l'équation de d'Alembert à une dimension : $\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = \vec{0}$, déterminer la relation reliant ω_0 et k_i ainsi que celle reliant ω_r et k_r .

En injectant les formes proposées pour v_i et v_r on obtient :

$$\begin{aligned} (-jk_i)^2 - \frac{1}{c^2} (j\omega_0)^2 &= 0 \\ (jk_r)^2 - \frac{1}{c^2} (j\omega_r)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} k_i &= \frac{\omega_0}{c} \\ k_r &= \frac{\omega_r}{c} \end{aligned}$$

D2. En considérant qu'au voisinage de l'interface la vitesse de la particule de fluide suivant l'axe $(O, \vec{e}_x)$ est nulle dans le référentiel du laboratoire, déterminer la relation entre ω_0 , ω_r , k_i , k_r et V .

Voisinage de l'interface : $x = x_p = -Vt$

$$v(x_p) = 0 = v_i(x_p) + v_r(x_p) = v_{i0} \exp \exp(j(\omega_0 t + k_i V t)) + v_{r0} \exp \exp(j(\omega_r t - k_r V t))$$

Soit :

$$v_{i0} \exp \exp(j(\omega_0 t + k_i V t)) = -v_{r0} \exp \exp(j(\omega_r t - k_r V t))$$

$$\boxed{v_{i0} = -v_{r0} \omega_0 + k_i V = \omega_r - k_r V}$$

D3. En déduire que la pulsation ω_r de l'onde reçue par le récepteur à ultrasons, après réflexion de l'onde sonore émise à la pulsation ω_0 sur un obstacle mobile à la vitesse V est :

$$\omega_r = \omega_0 \frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}$$

En utilisant les relations des question D1 et D2 :

$$\omega_0 \left(1 + \frac{V}{c}\right) = \omega_r \left(1 - \frac{V}{c}\right)$$

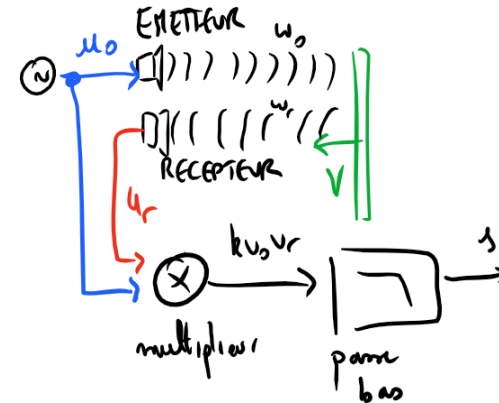
$$\boxed{\omega_r = \omega_0 \frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}}$$

D4. Dans le cas où l'obstacle mobile est un chien voulant jouer avec le robot et se déplaçant à une vitesse de $V = 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ vers ce dernier, justifier la relation : $\omega_r \approx \omega_0 \left(1 + 2\frac{V}{c}\right)$.

$V = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \ll c \Rightarrow \frac{V}{c} \ll 1$ et on peut effectuer des DL à l'ordre 1 :

$$\omega_r = \omega_0 \frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{V}{c}\right) \times \left(1 + \frac{V}{c}\right) = \omega_0 \left(1 + \frac{V}{c}\right)^2 \approx \omega_0 \left(1 + 2\frac{V}{c}\right)$$

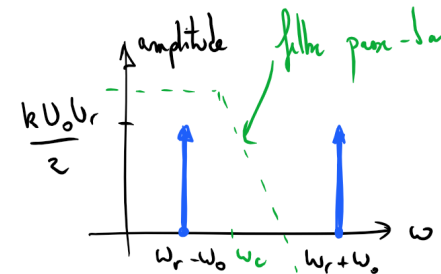
D5. Représenter sur un schéma-bloc les opérations effectuées sur les signaux $u_0(t)$ et $u_r(t)$ par la détection hétérodyne pour obtenir un signal dont l'amplitude est proportionnelle à la vitesse V recherchée.



D6. Exprimer $u_e(t)$ comme une somme de composantes harmoniques puis représenter l'allure de son spectre en pulsation.

$$u_e = kU_0 \cos \cos(\omega_0 t) U_r \cos \cos(\omega_r t + \varphi)$$

$$\boxed{u_e = \frac{kU_0 U_r}{2} \left(\cos \cos((\omega_r + \omega_0)t + \varphi) + \cos \cos((\omega_r - \omega_0)t + \varphi) \right)}$$



D7. Dans le cas où l'obstacle mobile est un chien voulant jouer avec le robot et se déplaçant à une vitesse de $V = 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, avec $c = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $f_0 = 40 \text{ kHz}$, on désire ne conserver que la composante $\omega_r - \omega_0$ pour accéder à la valeur de V . Justifier ce choix. En déduire la nature du filtre nécessaire. Dans quel domaine de valeurs numériques doit se situer la pulsation de coupure ?

$$\omega_r - \omega_0 = \frac{2V\omega_0}{c} \text{ comporte bien l'information de vitesse}$$

⇒ On va donc utiliser un filtre passe bas de pulsation de coupure ω_c telle que :

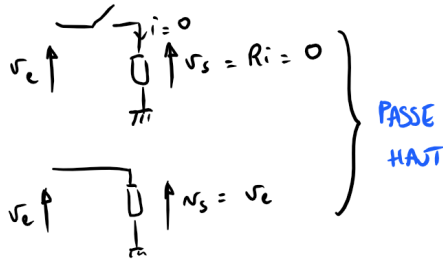
$$\frac{2V\omega_0}{c} \ll \omega_c \ll \omega_0 + \omega_r$$

$$1.5 \text{krad.s}^{-1} \ll \omega_c \ll 500 \text{krad.s}^{-1}$$

D8. Analyser le comportement à basses et hautes fréquences des 3 quadripôles. Lequel de ces quadripôles réalise la fonction de filtrage désirée ?

FILTRE 1

BF:



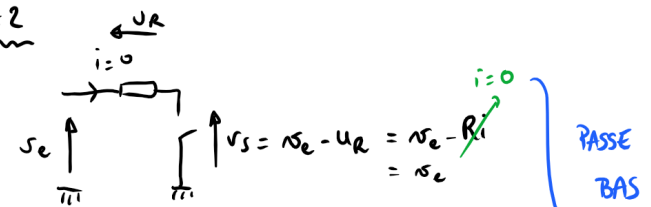
HF



PASSE
HAUT

FILTRE 2

BF:



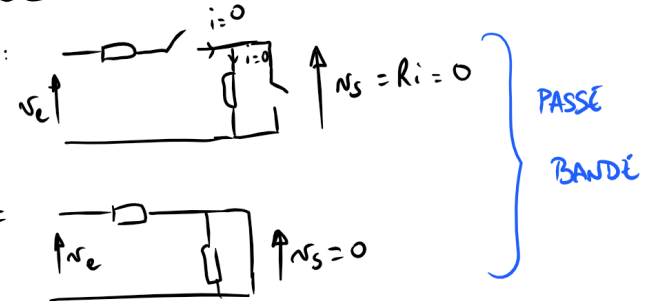
HF:



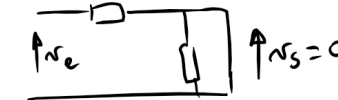
PASSE
BAS

FILTRE 3

BF:



HF



PASSE
BANDÉ

On choisit donc le **filtre 2**.

D9. Déterminer l'expression de la fonction de transfert harmonique du filtre choisi. Exprimer la pulsation de coupure ω_c du filtre en fonction de R et C .

Par pont diviseur de tension :

$$H = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + RCj\omega} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}}$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

D10. On désire atténuer d'un facteur 100 l'amplitude de la composante haute fréquence du signal $u_e(t)$, déterminer la valeur de la pulsation de coupure ω_c du filtre. Quel est alors la valeur du facteur d'atténuation de la composante basse fréquence du signal ? Commenter.

$$\begin{aligned} \text{Il faut } |H(j(\omega_0 + \omega_r))| &\approx |H(2j\omega_0)| = \frac{1}{100} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\omega_0^2}{\omega_c^2}}} = \frac{1}{100} \\ 1 + \frac{4\omega_0^2}{\omega_c^2} &= 10^4 \approx \frac{4\omega_0^2}{\omega_c^2} \\ \omega_c &= \frac{\omega_0}{50} \approx 5 \text{krad.s}^{-1} \end{aligned}$$

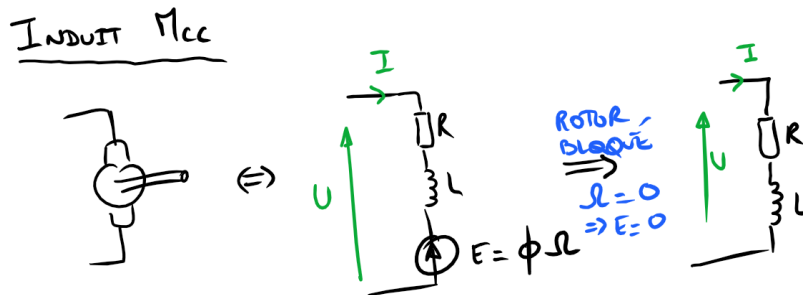
La composante BF est alors multipliée par :

$$\left| H\left(\frac{j2\omega_0 v}{c}\right) \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\omega_0^2 v^2}{c^2 \omega_c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\omega_0^2 v^2}{c^2 \omega_0^2 50^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4v^2}{c^2 50^2}}} \approx 0,96$$

Elle est donc très peu atténuée, et est bien retrouvée en sortie du filtre passe-bas.

Deuxième partie - Détermination des paramètres du moteur

E1. Donner le schéma électrique équivalent de l'induit d'une M.C.C. dans le cas général puis dans le cadre d'un essai à rotor bloqué.



E2. À partir des graphes de $i(t)$ et $u(t)$, proposer et mettre en œuvre une méthode permettant de déterminer la résistance R et l'inductance L du bobinage du moteur.

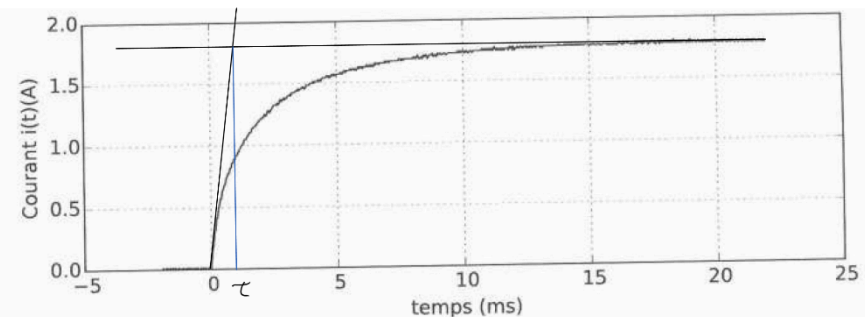
En régime permanent, la bobine est équivalente à un fil et on a $U = RI$.



$$R = \frac{U}{I}_{RP} = \frac{1.4V}{1.7A} = 0,78\Omega$$

De plus, la constante de temps du régime transitoire pour ce circuit est

$$\tau = \frac{L}{R} \approx 1,5ms \text{ relevé grâce à la méthode des tangentes :}$$



$$\Rightarrow L = 1,2mH$$

E3. Pourquoi cet essai doit-il être réalisé sous tension réduite ?

En l'absence de la fcm et en régime permanent, le courant dans le circuit est $I = \frac{U}{R}$ avec R de l'ordre du Ohm. Si on alimentait avec la tension nominale de 12V, on aurait un courant de l'ordre de la dizaine d'ampères, bien supérieur au courant nominal $\Rightarrow$ il est probable que le moteur subisse alors des dommages irréversibles (rupture du bobinage suite à échauffement trop important).

$\Rightarrow$ **Travail à tension réduite pour limiter le courant circulant dans l'induit.**

E4. Quel est le type de la variable ligne ? Au cours de ce programme combien de fois la variable ligne est-elle affectée ?

C'est une liste (de chaînes de caractères), elle est affectée **10 fois** (1 fois pour chaque couple de valeurs U/I)

E5. On désire stocker sous forme de liste de flottants les valeurs du courant i et de la tension u respectivement dans les variables serie1 et serie2. Pour cela, compléter les lignes 10 et 11.



```
Ligne 10: serie1.append(float(liste[1]))
Ligne 11: serie2.append(float(liste[0]))
```

- E6.** Écrire une fonction `calcul_R(valeurs_U, valeurs_I)` qui prend comme argument les deux listes `valeurs_U` et `valeurs_I` contenant les valeurs de U et I et qui retourne une liste contenant les valeurs des résistances $R = U/I$.



```
def calcul_R(valeurs_U,valeurs_I) :
    n=len(valeurs_U)
    liste_R=[]
    for i in range(n) :
        liste_R.append(valeurs_U[i]/valeurs_I[i])
    return liste_R
```

- E7.** Écrire une fonction `moyenne(valeurs_R)` qui retourne la moyenne $\bar{R}$ des N valeurs de R notées R_j contenues dans la liste `valeurs_R`.



```
def moyenne(valeurs_R) :
    n=len(valeurs_R)
    sum=0
    for i in range(n) :
        sum=sum+valeurs_R[i]
    return sum/n
```

- E8.** La meilleure estimation de l'écart-type (de répétabilité) $\sigma(R)$ sur la mesure de R est donnée par la relation.

$$\sigma(R) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (R_j - \bar{R})^2}{N-1}}$$

Quelle est la différence entre l'écart-type $\sigma(R)$ et l'incertitude-type $u_A(R)$? Préciser la relation entre ces deux grandeurs. Écrire une fonction `incertitude_type(valeurs_R)` qui retourne $u_A(R)$.

Dans le cas d'une incertitude de type A associée à N mesures indépendantes :

$$u_A(R) = \frac{\sigma(R)}{\sqrt{N}}$$



```
def incertitude_type(valeurs_R) :
    moy=moyenne(valeurs_R)
    n=len(valeurs_R)
    sum=0
    for i in range(n) :
        sum=sum+(valeurs_R[i]-moy)**2
    sigma=sqrt(sum/(n-1)) #
    return sigma/sqrt(n)
```

- E9.** En déduire la valeur de R en précisant l'incertitude élargie correspondant à un niveau de confiance de 95 %. Que représente l'incertitude élargie ?

Appelons M l'incertitude élargie. Dans le cas d'un intervalle de confiance à 95% estimé par une méthode de type A avec un nombre suffisant de mesures indépendantes, on estime $M = 2u_A$.

Et l'intervalle de confiance à 95% est $[\bar{R} - M; \bar{R} + M] = 0,767\Omega \pm 0,004\Omega$

- E10.** Du point de vue du codage des nombres flottants en machine, comment justifier la différence du nombre de chiffres significatifs fournis par scilab et python ?

Il semblerait dans le cas présent que le codage des flottants soit de plus grande précision sous Python que Scilab. On peut supposer alors que les flottants sont ici codés en double précision (double : deux mots de 32 bits = 64 bits) sous Python ; et en simple précision (simple : un mot de 32 bits) sous Scilab.

Ceci n'est cependant pas toujours le cas.

Un codage sur un nombre de bits supérieurs permet un plus petit écart entre deux réels successifs codés et donc une meilleure précision, et donc un nombre de chiffres significatifs plus élevés.

- F1.** Quelles sont les expressions de la vitesse angulaire de rotation Ω (en $rad.s^{-1}$) et de la fréquence de rotation N (en tr/min) en fonction de la fréquence f mesurée ?

$$f = 30n = \frac{30\Omega}{2\pi}$$

$$\Omega = \frac{2\pi f}{30}$$

$$N = \frac{\Omega}{2\pi} \times 60 = 2f$$

- F2.** En utilisant la notice du voltmètre, déterminer l'incertitude de construction sur la 8^{ème} mesure de E et retrouver l'ordre de grandeur de l'incertitude-type u_8 sur la mesure de E figurant dans le tableau.

$$\Delta E = \frac{0,05}{100} \times 9,098 + 2 \times 0,001 = 6,5 \cdot 10^{-3} V$$

⇒ L'incertitude type associée est :

$$u_E = \frac{\Delta E}{\sqrt{3}} = 4mV$$

On retrouve l'ordre de grandeur du tableau.

F3. Montrer que lorsque $S(\phi)$ est minimale, ϕ est donnée par la relation

$$\phi = \frac{\sum_{k=1}^N \frac{E_k \Omega_k}{u_k^2}}{\sum_{k=1}^N \frac{\Omega_k^2}{u_k^2}}.$$

Dérivons $S(\phi)$ et étudions quand la dérivée s'annule

$$\frac{dS}{d\phi}(\phi) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{u_k^2} \times -2\Omega_k(E_k - \phi\Omega_k) = 0$$

Soit, en divisant par -2, et en séparant la somme :

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{u_k^2} \times \Omega_k E_k = \sum_{k=1}^N \frac{1}{u_k^2} \phi \Omega_k^2 = \phi \sum_{k=1}^N \frac{\Omega_k^2}{u_k^2}$$

Soit :

$$\phi = \frac{\sum_{k=1}^N \frac{\Omega_k E_k}{u_k^2}}{\sum_{k=1}^N \frac{\Omega_k^2}{u_k^2}}$$

F4. On suppose que, suite à une erreur, les trois listes x , y et z ne possèdent pas toutes le même nombre d'éléments. Que se passe-t-il au moment de l'exécution de la fonction si la liste la plus longue est x ?

Erreur d'énoncé ? On parle bien de x, y et u ? Et il y a aussi le scalaire u en sortie de fonction... notations pas très claires...

Il va y avoir un appel de $y[i]$ ou de $u[i]$ qui va donner une erreur de type « out of range » car c'est la liste x qui fixe le nombre d'exécutions des instructions dans la boucle for (car $n=\text{len}(x)$).

⇒ **Erreur renvoyée lors de l'exécution.**

F5. Proposer et expliquer un algorithme qui permet de vérifier au sens strict si la valeur absolue de chaque écart $|\varepsilon_k|$ reste inférieure à l'incertitude-type u_k . Ecrire une fonction python ou scilab qui retourne le nombre de mesures ne vérifiant pas ce critère.

On suppose ici que les listes x, y et u ont bien les mêmes dimensions



```
def test_ecart(x,y,u) :
    [phi,s]=regression_lineaire(x,y,u) ## on calcule phi
    phi
    n=len(x)
    nb_mesures=0
    for k in range(n) :
        epsk=y[k]-phi*x[k]
        if abs(epsk)>u[k] :
```

```
        nb_mesures=nb_mesures+1
    return nb_mesures ## 0 si tout va bien
```

F6. Par analyse graphique de la figure 14, évaluer le nombre de mesures qui ne respectent pas le critère, conclure sur la validité du modèle linéaire.

Hormis deux points pour lesquels $\varepsilon_k \rightarrow 0$, il semblerait que tous les autres points ne respectent pas le critère : nombre de mesures ne respectant pas le critère = 8

⇒ **Modèle linéaire non valide ?**

Cependant, la figure 13 semble attester d'un modèle linéaire ; peut-être aurait-il été judicieux de prendre en compte également les incertitudes sur la mesure de la vitesse de rotation ?

G1. Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de $\Omega(t)$ pour $t \geq 0$. À partir du relevé, que peut-on dire de la valeur de f ?

Le théorème du moment cinétique appliqué à l'arbre moteur donne :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = -C_{r0} - f\Omega$$

L'évolution quasi-linéaire du relevé de Ω tend à approximer sa dérivée par une constante négative, et donc à supposer que $f\Omega \ll C_{r0} \quad \forall \Omega$.

⇒ **La valeur de f est donc suffisamment faible pour que l'on puisse négliger ce terme.**

G2. Proposer une méthode de mesure du moment d'inertie J . Calculer la valeur expérimentale de J à l'aide du relevé de la figure 15.

On a alors

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{C_{r0}}{J}$$

Pente relevée expérimentalement :

$$\frac{d\Omega}{dt} \simeq -1400 \text{ tr.min}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} = -147 \text{ rad.s}^{-2}$$

$$J = \frac{C_{r0}}{\frac{d\Omega}{dt}} = \frac{8.10^{-3}}{147} = 5.10^{-5} \text{ kg.m}^2$$

G3. En précisant les hypothèses retenues, déduire de ces mesures une estimation de la valeur du moment d'inertie J du moteur. Comparer à la valeur expérimentale obtenue.

On peut assimiler le rotor à un cylindre de rayon $R = 2\text{cm}$, et de masse $m = 160\text{g}$ et utiliser $J = \frac{1}{2}mR^2$. Mais cette formule n'est pas a priori à connaître, ni l'expression $J = \iiint \delta m r^2$ qui permet de la retrouver.

En utilisant la formule $J = \frac{1}{2}mR^2$, on trouve une valeur du même ordre de grandeur que la valeur calculée dans la question précédente.