



**Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el Acceso a la Universidad (EBAU)**
Universidad de Extremadura
Curso 2022-2023

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de 10 problemas cuyo valor máximo es de 2 puntos cada uno. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatros primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 3 & 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $XA - A^t = B$, donde A^t es la matriz traspuesta de A . Justificar la respuesta.

Resolución

Trasponiendo términos, $XA = A^t + B$; $\det A = 2 - 1 = 1 \neq 0$, $\exists A^{-1}$.

Multiplicando por A^{-1} , por la derecha, en los dos miembros, $XAA^{-1} = XI = X = (A^t + B)A^{-1}$.

$$X = (A^t + B) \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = [(0 \ -1 \ 2 \ 1 \ -1 \ -3 \ 0 \ 1 \ -1) + (1 \ 3 \ -5 \ 1 \ 3 \ 3 \ -3 \ -1 \ 2)] \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (1 \ 2 \ -3 \ 2 \ 2 \ 0 \ -3 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -5 & -2 & 10 & 2 & 2 & -7 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sean las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} -1 & x & -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar el valor de x para que se verifique que $A^2 = -I$. (1 punto)

Resolución

$$A^2 = -I \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & x & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & x & -2 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2x & 0 & 0 & 1 & -2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Luego, $1 - 2x = -1$, $x = 1$

b) Para el valor de x referido en el apartado a), determinar la matriz A^{43} . (1 punto)

Resolución

Para $x = 1$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

$$A^{43} = (A^2)^{21} A = (-I)^{21} A = -IA = -A = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un charcutero vende lomos a 26 € el kilogramo, salchichones a 15 € el kilogramo y chorizos a 9 € el kilogramo. Durante un día vendió 60 kg de embutidos, cobrando por ellos 737 €. Sabiendo que el peso de los chorizos es el doble de lo que pesan conjuntamente los lomos y los salchichones, calcular, razonando la respuesta, cuántos kilogramos de cada tipo de embutido vendió ese día.

Resolución

Sean x, y, z la cantidad de kg de lomo, salchichón y chorizo, respectivamente. Según el enunciado,

$\{x + y + z = 60 \quad 26x + 15y + 9z = 737 \quad z = 2(x + y)\} \Rightarrow \{x + y + z = 60 \quad 26x + 15y + 9z = 737 \quad 2x + 2y - z = 0\}$. Lo resolvemos por Gauss. La matriz del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 60 & 0 & 0 \\ 26 & 15 & 9 & 737 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 - 2f_1, f_3 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 7 & 717 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 58 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_3 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 7 & 717 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 \cdot \frac{1}{13}, f_3 \cdot (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{13} & \frac{717}{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 - \frac{7}{13}f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{717}{13} - \frac{14}{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_1 - f_2 - f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 60 - \frac{717}{13} - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{717}{13} - \frac{14}{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

que corresponde al sistema $\{x + y + z = 60 \quad 11y + 17z = 823 \quad z = 40\}$

$$y = \frac{823 - 17z}{11} = \frac{823 - 17 \cdot 40}{11} = 13 \quad ; \quad x = 60 - y - z = 60 - 13 - 40 = 7$$

Luego, vendió 7 kg de lomo, 13 kg de salchichón y 40 kg de chorizo

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una empresa fabrica móviles y tabletas que después vende a 720 euros y 540 euros la unidad, respectivamente. Por cuestiones logísticas, no puede fabricar semanalmente más de 800 móviles ni más de 600 tabletas, ni más de 1000 entre los dos productos. Suponiendo que vende todo el material que fabrica, calcular, justificando las respuestas, el número de móviles y de tabletas que debe fabricar semanalmente para obtener unos ingresos máximos y el valor de dichos ingresos máximos.

Resolución

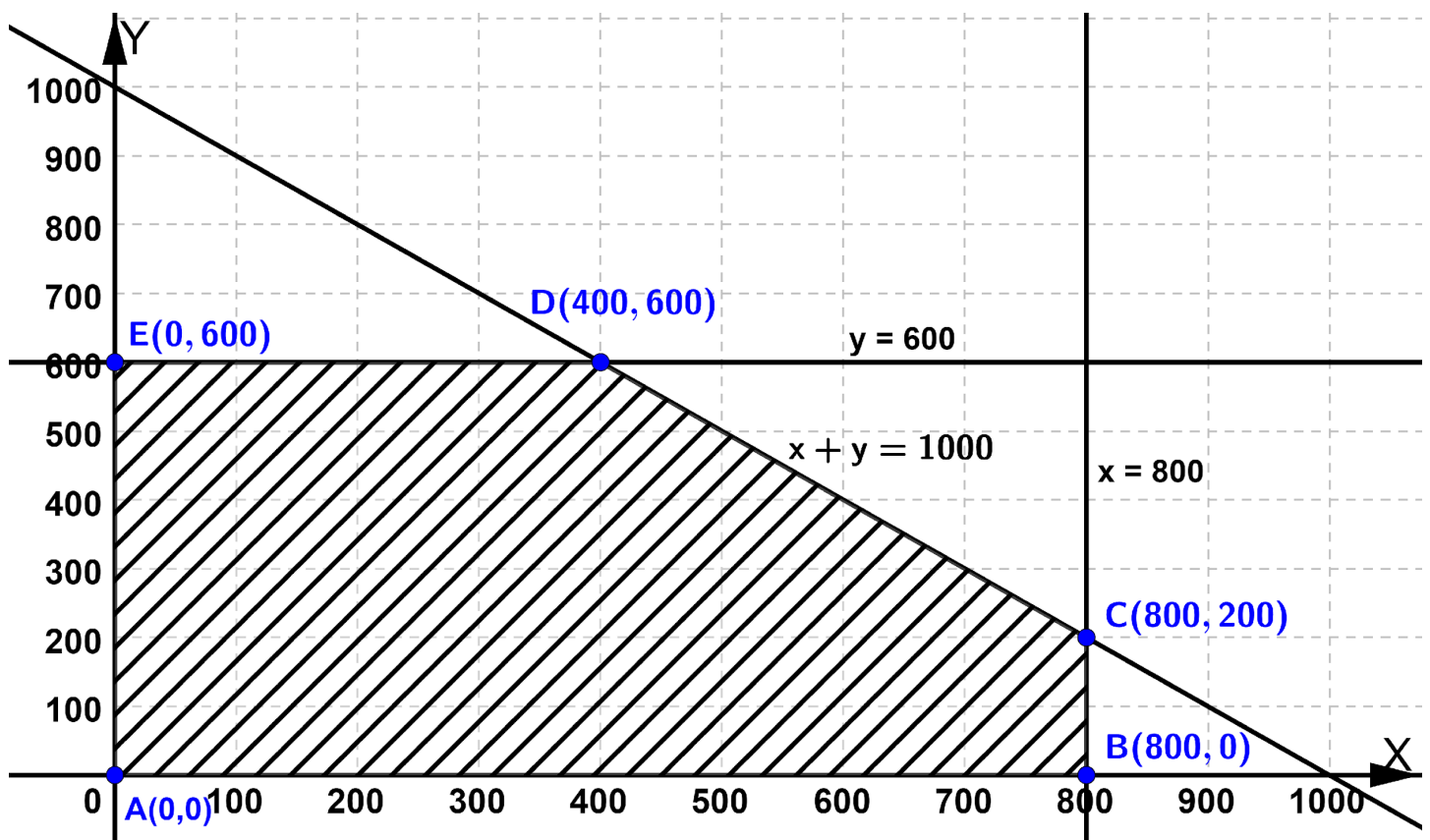
Datos del problema:

	nº de unidades	ingresos (en €)
móviles	x	$720x$
tabletas	y	$540y$
total	$x + y$	$720x + 540y$

La función a optimizar (maximizar) son los ingresos $f(x, y) = 720x + 540y$

Las restricciones son $\{x \leq 800 \quad y \leq 600 \quad x + y \leq 1000 \quad x \geq 0, y \geq 0\}$

La región factible, solución del sistema de inecuaciones, es



Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo el beneficio $f(x, y) = 720x + 540y$

$$f(A) = f(0, 0) = 720 \cdot 0 + 540 \cdot 0 = 0 \quad f(B) = f(800, 0) = 720 \cdot 800 + 540 \cdot 0 = 576\,000$$

$$f(C) = f(800, 200) = 720 \cdot 800 + 540 \cdot 200 = 684\,000$$

$$f(D) = f(400, 600) = 720 \cdot 400 + 540 \cdot 600 = 612\,000 \quad f(E) = f(0, 600) = 720 \cdot 0 + 540 \cdot 600 = 324\,000$$

Luego, los ingresos máximos son 684 000 € y se obtienen fabricando 800 móviles y 200 tabletas.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Una fábrica de materiales de construcción ha descubierto que la producción diaria de ladrillos no defectuosos (en toneladas), $P(x)$, depende de la dureza del material que utiliza, x , (en una escala del 0 al 10) de acuerdo con la función: $P(x) = -x^3 + 3Ax^2 - 3Bx + 23$, $0 \leq x \leq 10$

Determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la producción mínima de ladrillos no defectuosos es de 13 toneladas y se alcanza cuando la dureza del material es de 1.

Resolución

$P'(x) = -3x^2 + 6Ax - 3B$. Según el enunciado, $P(x)$ tiene un mínimo en $(1, 13)$

Luego, $P'(1) = 0$ y $P(1) = 13$. Sustituyendo, queda el sistema

$$\begin{cases} -3 \cdot 1^2 + 6A \cdot 1 - 3B = 0 \\ -1^3 + 3A \cdot 1^2 - 3B \cdot 1 + 23 = 13 \end{cases}$$

Operando, $\begin{cases} 6A - 3B = 3 \\ 3A - 3B = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A - B = 1 \\ A - B = -3 \end{cases}$. Restando las ecuaciones, $A = 4$; $4 - B = -3 \Rightarrow B = 7$

Conclusión: $A = 4$, $B = 7$ y $P(x) = -x^3 + 12x^2 - 21x + 23$, $0 \leq x \leq 10$

PROBLEMA 6 (2 puntos)

Una empresa constructora, tiene que afrontar gastos de suelo y gastos de edificación, (en miles de euros), que dependen de la distancia al centro, x , (en km). Dichos gastos vienen dados, respectivamente, por las funciones: $S(x) = 10x + 100$, $0 \leq x \leq 25$, y $E(x) = -x^2 + 10x + 200$, $0 \leq x \leq 25$.

Determinar, justificando las respuestas:

a) La expresión $G(x)$ que indica los gastos totales de la constructora en función de la distancia al centro de la ciudad donde se realice la obra. (0,5 puntos)

Resolución $G(x) = S(x) + E(x) = 10x + 100 - x^2 + 10x + 200 = -x^2 + 20x + 300$, $0 \leq x \leq 25$

b) A qué distancias del centro los gastos de construcción son máximos y mínimos, así como el valor de dichos gastos. (1,5 puntos)

Resolución

$0 \leq x \leq 25$, $G'(x) = -2x^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow x = 10$, $G(10) = -10^2 + 20 \cdot 10 + 300 = 400$

Además, como $G(0) = -0^2 + 20 \cdot 0 + 300 = 300$, $G(25) = -25^2 + 20 \cdot 25 + 300 = 175$, el máximo absoluto es $(10, 400)$ y el mínimo absoluto es $(25, 175)$.

Significado: A 10 km del centro el gasto es máximo, 400 000 € y a 25 km del centro es mínimo, 175 000 €

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar el área delimitada por la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 5$, representando dicha función y el área que se pide. Razonar las respuestas.

Resolución

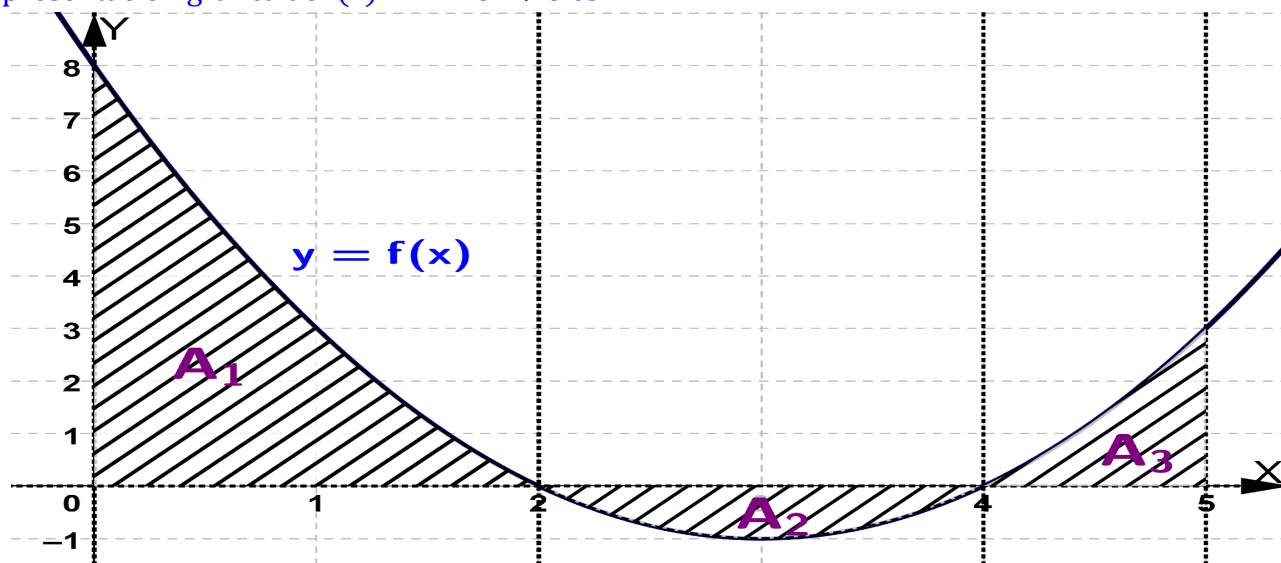
$f(x) = x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 2}{2}$, $x = 2$, $x = 4$ (corta a OX en 2 y 4).

$f'(x) = 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, $y = f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1$.

Esto significa, que la gráfica es una parábola convexa de vértice $(3, -1)$ que corta al eje OX en $(2, 0)$, $(4, 0)$

Además, $f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 8 = 8$, $f(5) = 5^2 - 6 \cdot 5 + 8 = 3$

La representación gráfica de $f(x) = x^2 - 6x + 8$ es



El área que se pide es $A = A_1 + A_2 + A_3 = \int_0^2 f(x)dx - \int_2^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx$

Una primitiva de f es $F(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x = \frac{x^3 - 9x^2 + 24x}{3}$. Por la regla de Barrow,

$$A = F(2) - F(0) - [F(4) - F(2)] + F(5) - F(4) = 2F(2) - F(0) - 2F(4) + F(5) =$$

$$= 2 \frac{2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2}{3} - \frac{0^3 - 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0}{3} - 2 \frac{4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4}{3} + \frac{5^3 - 9 \cdot 5^2 + 24 \cdot 5}{3} = \frac{40}{3} - \frac{32}{3} + \frac{20}{3} = \frac{28}{3} \cong 9,33$$

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Un concesionario trabaja con tres marcas de coches: la marca A representa el 60% de sus ventas, la B el 30% y la C el resto. En un estudio acerca de las preferencias de los clientes sobre el cambio de marchas (manual, automático) se obtiene que el 70% de los coches vendidos de la marca A, el 40% de los de la marca B y el 80% de los de la marca C tienen el cambio manual. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que el concesionario venda un coche con cambio automático. (1 punto)

b) Sabiendo que un coche vendido tiene el cambio manual, calcular la probabilidad de que sea de la marca C. (1 punto)

Resolución

A = el coche es de la marca A B = el coche es de la marca B C = el coche es de la marca C
M = el coche tiene cambio manual

Elaboramos la siguiente tabla de porcentajes/probabilidades:

	A	B	C	Total
M	70% del 60% = 42%	40% del 30% = 12%	80% del 10% = 8%	62%
M ^c	60% - 42% = 18%	30% - 12% = 18%	10% - 8% = 2%	100% - 62% = 38%
Total	60%	30%	100% - 60% - 30% = 10%	100%

a) 38%

b) Se pide $p\left(\frac{C}{M}\right) = \frac{p(C \cap M)}{p(M)} = \frac{8\%}{62\%} = \frac{8}{62} = \frac{4}{31} \cong 0,129 = 12,9\%$

PROBLEMA 9 (2 puntos)

Se realiza un estudio sobre el contenido de cierta sustancia en una marca de refrescos. De 500 latas analizadas, 120 contenían dicha sustancia. Calcular un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95%, para la proporción de latas de esta marca que contenían la sustancia. Razonar la respuesta.

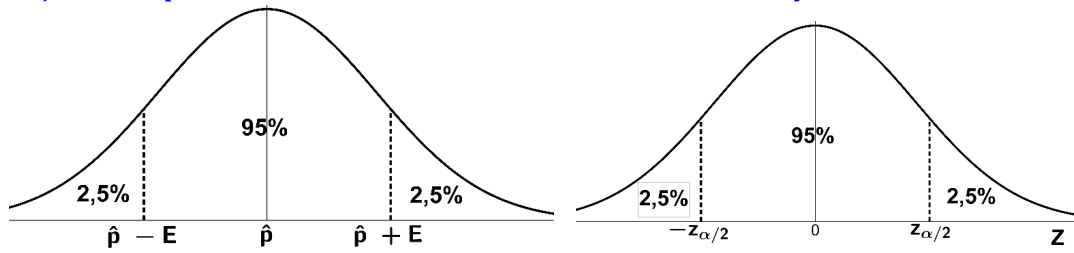
Resolución

La v.a. “proporción de latas de cada muestra, elegida al azar, que contiene dicha sustancia”, tiene una distribución Normal $N\left(p, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$ donde p es la proporción poblacional, $n = 500$ el tamaño de la muestra y $\hat{p} = \frac{120}{500} = 0,24$ la proporción muestral.

El intervalo de confianza a nivel de confianza del 95% para la proporción poblacional, p ,

es $I_c = (\hat{p} - E, \hat{p} + E)$, siendo $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, el máximo error de estimación.

Como el área bajo la campana es 100%, entonces $100\% - 95\% = 5\%$ y $5\% : 2 = 2,5\%$



$z_{\alpha/2}$ es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = 95\% + 2,5\% = 97,5\% = 0,975$

Esta probabilidad coincide con $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,95}{2} = 0,975$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,975$ usando la tabla de la $N(0, 1) \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$.

Sustituyendo: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,24(1-0,24)}{500}} \cong 0,0374$

$I_c = (0,24 - 0,0374 ; 0,24 + 0,0374) \cong (0,2026 ; 0,2774)$

Esto significa que con un nivel de confianza del 95% el porcentaje de latas con la sustancia estará entre 20,26% y 27,74%

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se pretende realizar un estudio sobre el contenido en alcohol de las cervezas, variable que sigue una distribución normal con desviación típica 1,5 grados. ¿Qué cantidad de cervezas habrá que analizar como mínimo si queremos obtener un intervalo de confianza para el contenido medio de alcohol, con un nivel de confianza del 99% y una longitud no superior a 1 grado? Razonar la respuesta.

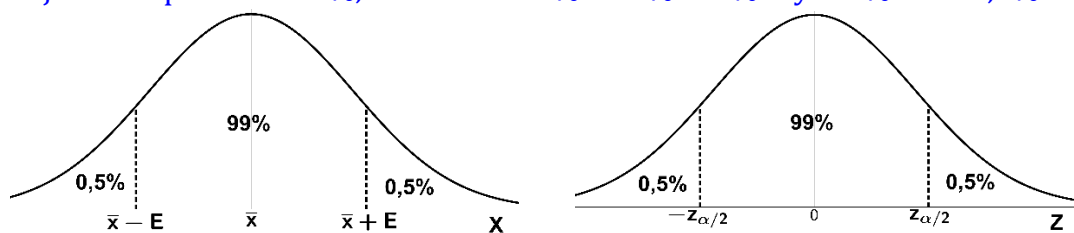
Resolución

X = contenido en alcohol (en grados), $X \rightarrow N(\mu, 1,5)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza

del 99% para estimar el contenido medio en alcohol, μ , es $I_c = (\bar{x} - E, \bar{x} + E)$, siendo $\bar{x}$ la media de una

muestra de tamaño n , $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

Como el área bajo la campana es 100%, entonces $100\% - 99\% = 1\%$ y $1\% : 2 = 0,5\%$



$z_{\alpha/2}$ es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = 99\% + 0,5\% = 99,5\% = 0,995$

Esta probabilidad coincide con $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,99}{2} = 0,995$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,995$ usando la tabla de la $N(0, 1)$, por interpolación $\rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$

Al ser la longitud del intervalo $2E$, entonces $2E \leq 1 \Rightarrow E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0,5$

Luego, $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{0,5} \leq \sqrt{n}$ elevando al cuadrado $\rightarrow (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{\sigma^2}{0,5^2} \leq n$

Sustituyendo: $n \geq 2,575^2 \cdot \frac{1,5^2}{0,5^2} \cong 59,7$. Luego, el tamaño mínimo de la muestra debe ser 60 cervezas.