SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KÌ THI THÀNH LẬP ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI**
BÌNH THUẬN	**LỚP 12 THPT DỰ THI QUỐC GIA**
	NĂM HỌC 2018 – 2019
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Ngày thi: 19/10/2018**
(Đề này có 01 trang)	Môn: Toán
	Thời gian làm bài: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*

Bài 1. (5 *điểm*)

Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^3+y^3+x^2y+xy^2=4\left(x^2+xy+y^2\right)+1.$

Bài 2. (5 *điểm*)

Cho $x,y\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sin^2 x\sin^2 y+1}+\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 y+1}+\frac{1}{\cos^2 x+1}\le\frac{9}{2\left(\sin^2 x\sin 2y+\sin 2x\sin y+\sin 2x\cos y\right)}.$$

Bài 3. (5 *điểm*)

Cho tam giác ABC có $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn $(O).$ Phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại điểm D khác A, lấy E đối xứng B qua AD, đường thẳng BE cắt (O) tại F khác B. Lấy điểm G di chuyển trên cạnh AC (G khác A,C), đường thẳng BG cắt (O) tại H khác $B.$ Đường thẳng qua C song song AH cắt FD tại I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCG cắt EI tại hai điểm phân biệt K,L. Chứng minh rằng đường trung trực đoạn thẳng KL luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4. (5 *điểm*)

Cho 2018 tập hợp mà mỗi tập chứa đúng 45 phần tử. Biết rằng hai tập tùy ý trong các tập này đều có đúng một phần tử chung. Chứng minh rằng tồn tại phần tử thuộc tất cả 2018 tập hợp đã cho.

------------ HẾT ------------

(Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.)

Họ và tên thí sinh: . . . . Số báo danh: . . . .

ĐÁP ÁN KỲ THI THÀNH LẬP ĐỘI TUYỂN HSG
LỚP 12 THPT DỰ THI QUỐC GIA – Năm học 2018 – 2019

LỜI GIẢI TÓM TẮT	ĐIỂM
Bài 1. (5 *điểm*) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^3+y^3+x^2y+xy^2=4\left(x^2+xy+y^2\right)+1.$	
Nhận xét: $x\neq y$	0,5
$\Rightarrow 2\left(x^2+y^2\right)>\left\|4xy+1\right\|$	0,5
$x^3+y^3+x^2y+xy^2=4\left(x^2+xy+y^2\right)+1\Leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)\left(x+y-4\right)=4xy+1$	0,5
$\Rightarrow 2\left\|4xy+1\right\|=\left\|2\left(x^2+y^2\right)\left(x+y-4\right)\right\|>\left\|4xy+1\right\|\left\|x+y-4\right\|$	1,5
$\Rightarrow 2>\left\|x+y-4\right\|\Rightarrow x+y=3;4;5$	0,5
$x+y=3$ không thỏa	0,5
$x+y=4$ không thỏa	0,5
$x+y=5$ tìm được $x=1;y=4$ hoặc $x=4;y=1$	0,5
Bài 2. (5 *điểm*) Cho $x,y\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\sin^2x\sin^2y+1}+\dfrac{1}{\sin^2x\cos^2y+1}+\dfrac{1}{\cos^2x+1}\le\dfrac{9}{2\left(\sin^2x\sin 2y+\sin 2x\sin y+\sin 2x\cos y\right)}.$	
Đặt $a=\sin x\sin y,b=\sin x\cos y,c=\cos x$ thì $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$	1,0
Ta cần chứng minh $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{1}{c^2+1}\le\dfrac{9}{4(ab+ac+bc)}.$	0,5
Thật vậy, $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{1}{c^2+1}\le\dfrac{1}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{1}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{1}{(c+a)(c+b)}$ $=\dfrac{2(a+b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$	1,0
Mà $(a+b)(a+c)(b+c)=(a+b+c)(ab+ac+bc)-abc$	
$\ge(a+b+c)(ab+ac+bc)-\dfrac{1}{9}(a+b+c)(ab+ac+bc)=\dfrac{8}{9}(a+b+c)(ab+ac+bc)$	1,0

Nên $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\le\frac{9}{4\left(ab+ac+bc\right)}$.	1,0
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}, y=\frac{\pi}{4}$	0,5
<u>Bài 3.</u> (5 *điểm*) Cho tam giác ABC có $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại điểm D khác A, lấy E đối xứng B qua AD, đường thẳng BE cắt (O) tại F khác B. Lấy điểm G di chuyển trên cạnh AC (G khác A,C), đường thẳng BG cắt (O) tại H khác B. Đường thẳng qua C song song AH cắt FD tại I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCG cắt EI tại hai điểm phân biệt K,L. Chứng minh rằng đường trung trực đoạn thẳng KL luôn đi qua một điểm cố định.	
Gọi giao điểm của đường thẳng EI và BC là J.	0,5
DF là trục đối xứng của EC	1,0
$\widehat{CEJ}=\widehat{ECI}=\widehat{HAC}=\widehat{HBC}$ nên tứ giác $BGEJ$ nội tiếp	1,5
Phép nghịch đảo $N_C^{k=CE.CG=CJ.CB}$ biến đường tròn (BCG) thành đường thẳng EJ nên biến K,L thành chính nó.	1,0
Do đó $CK^2=CL^2=k$ hay đường trung trực đoạn thẳng KL luôn đi qua điểm C cố định.	1,0
<u>Bài 4.</u> (5 *điểm*) Cho 2018 tập hợp mà mỗi tập chứa đúng 45 phần tử. Biết rằng hai tập tùy ý trong các tập này đều có đúng một phần tử chung. Chứng minh rằng tồn tại phần tử thuộc tất cả 2018 tập hợp đã cho.	
Lấy tập A tùy ý, trong A sẽ có phần tử a thuộc ít nhất 45 tập hợp khác. Nếu không, số tập hợp không quá 45x44 + 1 = 1981.	1,0
Suy ra a thuộc 46 tập $A, A_1,..., A_{45}$.	1,0
Với tập B bất kì, nếu a không thuộc B thì với mỗi tập $A_i\left(1\le i\le 45\right)$ đều có phần tử a_i chung với B mà $a_i\ne a$.	1,0
Thành ra B không có phần tử chung với A, nếu có thì phần tử chung đó phải thuộc tập $A_i\left(1\le i\le 45\right)$ nào đó nên A và $A_i\left(1\le i\le 45\right)$ có 2 phần tử chung. (Vô lí)	1,0

Nên a thuộc B, do đó a thuộc 2018 tập đã cho.	1,0