

Câu 15. [1H2-3.4-4] (THPT Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An- lần 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a , điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM = 2MC$. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD . Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P) .

A. $\frac{\sqrt{3}a^2}{5}$.

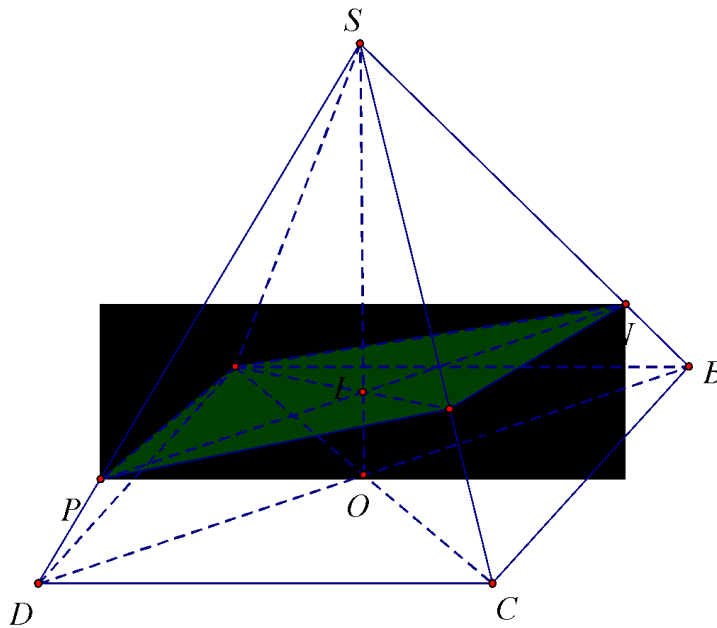
B. $\frac{4\sqrt{26}a^2}{15}$.

C. $\frac{2\sqrt{26}a^2}{15}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}a^2}{5}$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi $O = AC \cap BD$, $I = AM \cap SO$.

Trong (SBD) từ I kẻ đường thẳng Δ song song với BD cắt SB , SD lần lượt tại N , P .

Suy ra thiết diện là tứ giác $ANMP$.

Ta có:
$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$$

$\Rightarrow BD \perp AM$.

Mặt khác: $BD \parallel NP$.

$\Rightarrow AM \perp NP$.

$$\Rightarrow S_{ANMP} = \frac{1}{2} NP \cdot AM.$$

+ Tính AM :

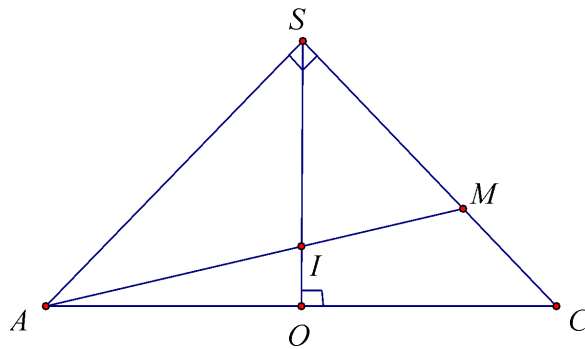
Ta có: $\begin{cases} SA = SC = a \\ AC = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta SAC \text{ vuông cân tại } S.$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{SA^2 + SM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{3}.$$

+ Tính AM :

Ta có: $NP \parallel BD \Rightarrow \frac{NP}{BD} = \frac{SI}{SO} \Rightarrow NP = \frac{SI \cdot BD}{SO}.$

· Tính $\frac{SI}{SO}$:



Gọi $\frac{SI}{SO} = k.$

Ta có: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SI} = -\overrightarrow{SA} + k\overrightarrow{SO}.$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SM} = -\overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{SC}.$$

A, I, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = l\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow -\overrightarrow{SA} + k\overrightarrow{SO} = -l\overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}l\overrightarrow{SC}$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{SA} + \frac{k}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}) = -l\overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}l\overrightarrow{SC} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}k + l = 1 \\ \frac{1}{2}k - \frac{2}{3}l = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{4}{5} \\ l = \frac{3}{5} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{4}{5} \Rightarrow NP = \frac{4}{5}BD = \frac{4a\sqrt{2}}{5}.$$

$$\Rightarrow S_{ANMP} = \frac{1}{2}NP \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot \frac{4a\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{3} = \frac{2\sqrt{26}a^2}{15}.$$

Câu 42. [1H2-3.4-4] (THPT CHUYÊN VINH PHÚC -LẦN 1-903-2018) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a, CD = b$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD ,

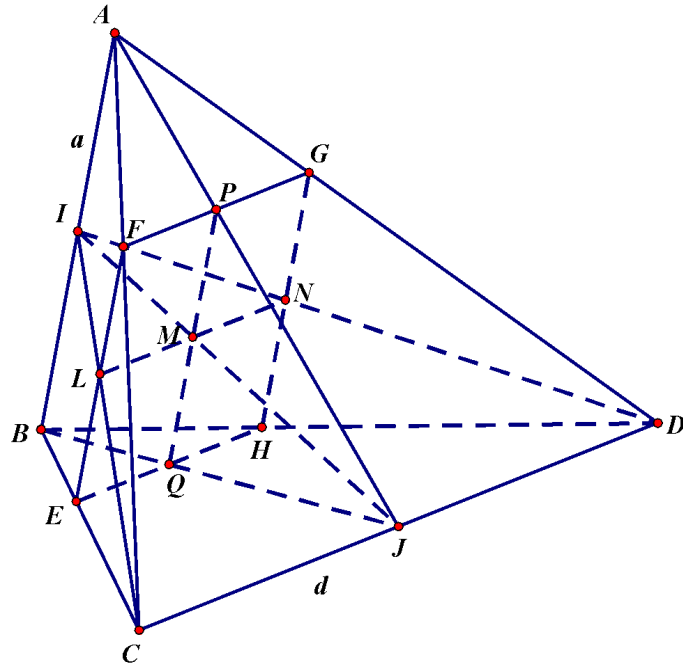
giả sử $AB \perp CD$. Mặt phẳng (α) qua M nằm trên đoạn IJ và song song với AB và CD .

Tính diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng (α) biết $IM = \frac{1}{3}IJ$.

- A. ab . B. $\frac{ab}{9}$. C. $2ab$. D. $\frac{2ab}{9}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel CD \\ CD \subset (ICD) \\ M \in (\alpha) \cap (ICD) \end{cases} \Rightarrow$ giao tuyến của (α) với (ICD) là đường thẳng qua M và song song với CD cắt IC tại L và ID tại N .

$\begin{cases} (\alpha) \parallel AB \\ AB \subset (JAB) \\ M \in (\alpha) \cap (JAB) \end{cases} \Rightarrow$ giao tuyến của (α) với (JAB) là đường thẳng qua M và song song với AB cắt JA tại P và JB tại Q .

Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \\ L \in (\alpha) \cap (ABC) \end{cases} \Rightarrow EF \parallel AB \quad (1)$

Tương tự $\begin{cases} (\alpha) \parallel AB \\ AB \subset (ABD) \\ N \in (\alpha) \cap (ABD) \end{cases} \Rightarrow HG \parallel AB \quad (2).$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EF \parallel HG \parallel AB \quad (3)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\alpha) // CD \\ CD \subset (ACD) \\ P \in (\alpha) \cap (ACD) \Rightarrow FG // CD \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Tương tự } \begin{cases} (\alpha) // CD \\ CD \subset (BCD) \\ Q \in (\alpha) \cap (BCD) \Rightarrow EH // CD \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) } \Rightarrow FG // EH // CD \quad (6).$$

Từ (3) và (6), suy ra $EFGH$ là hình bình hành. Mà $AB \perp CD$ nên $EFGH$ là hình chữ nhật.

$$\text{Xét tam giác } ICD \text{ có: } LN // CD \Rightarrow \frac{LN}{CD} = \frac{IN}{ID}.$$

$$\text{Xét tam giác } ICD \text{ có: } MN // JD \Rightarrow \frac{IN}{ID} = \frac{IM}{IJ}.$$

$$\text{Do đó } \frac{LN}{CD} = \frac{IM}{IJ} = \frac{1}{3} \Rightarrow LN = \frac{1}{3}CD = \frac{b}{3}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{PQ}{AB} = \frac{JM}{JI} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3}AB = \frac{2a}{3}.$$

$$\text{Vậy } S_{EFGH} = PQ \cdot LN = \frac{2ab}{9}.$$