

Exercice 1:

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note ξ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Soit Δ la droite d'équation : $y = x - 3$.

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

- 1°) Si Δ est asymptote à ξ_f en $+\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.
- 2°) Si Δ est asymptote à ξ_f en $+\infty$, alors ξ_f ne peut admettre d'asymptote horizontale.
- 3°) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, alors Δ ne peut pas être asymptote à ξ_f .
- 4°) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, alors Δ est asymptote à ξ_f en $+\infty$.

Exercice 2:

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x + 5}$

- 1) Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout réel x de l'ensemble de définition D_f de f , $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 5}$
- 2) En déduire que la courbe (ξ) représentative de f dans un repère donné possède deux asymptotes.

Exercice 3:

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10} + 2x + 2$

Montrer que les droites d'équations $y = 3x - 1$ et $y = x + 5$ sont asymptotes à la courbe (ξ) représentative de f dans un repère donné

Exercice 4:

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1 + \frac{6}{x - 3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- 1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$
- 2) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 3) Montrer que la courbe représentative de f dans un repère donné possède trois asymptotes.

Exercice 5:

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 7}{x - 4}$

- 1) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}, f(x) = -x + 1 - \frac{3}{x - 4}$
- 2) En déduire que la courbe (ξ) représentative de f dans un repère donné a deux asymptotes.

Exercice 6:

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 8}$ et (ξ) sa courbe dans un repère orthonormé direct $R(o, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 3) a) Mettre sous forme canonique $x^2 + 6x + 8$
b) Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + (x + 3)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 3)$
c) Interpréter graphiquement les résultats précédents
- 4) a) Montrer que pour tout réel x on a : $x^2 + 6x + 8 < (x + 3)^2$
b) En déduire les positions relatives de (ξ) par rapport à ses asymptotes.

Exercice 7:

$$\frac{\sqrt{9+x^2}-(x-3)}{x}$$

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{9+x^2}-(x-3)}{x}$ et (ζ) sa courbe dans un repère orthonormé direct $R(O, I, J)$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Montrer que f admet une asymptote verticale D dont on donnera une équation.

$$3a) \text{ Montrer que pour tout } x > 0 \text{ on a : } f(x) = \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} - 1 + \frac{3}{x}$$

b) Calculer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 8:

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$. On désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J) .

1) a) Déterminer D_f

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$

2) a) Vérifier que : $\forall x \in D_f ; f(x) = \sqrt{(x-1)^2 - 4}$

b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1] = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 1] = 0$

c) En déduire que la courbe ζ admet deux asymptotes obliques D et D' .

Exercice 9:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 1}$ et ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) .

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Montrer que la droite $\Delta : y = 2x - 1$ est une asymptote à ζ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 10:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 - 6x + 4}$

Soit ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Trouver les réels a, b, c et d tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{3x^2 - 6x + 4}$

2) Montrer que ζ_f admet une asymptote oblique Δ qu'on déterminera. Etudier la position relative de ζ_f par rapport à Δ .

Exercice 11:

On considère la fonction f définie pour tout réel x appartenant à $] -\infty ; -1[\cup] -1 ; 1[\cup] 1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 3}{x^2 - 1}$

On note ζ_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) .

1) Montrer que pour tout réel $x \neq -1$ et $x \neq 1$ on a : $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$ où a, b et c sont des réels que l'on déterminera.

2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3) Préciser les asymptotes à ζ_f .

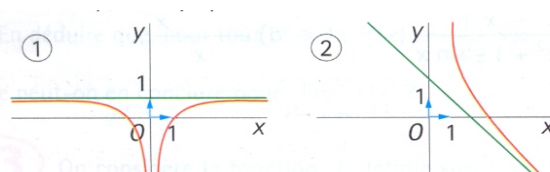
Exercice 12:

Les courbes ci contre sont les représentations des fonctions f_i ; les asymptotes sont en vert.

Associer à chacune des fonctions suivantes son graphique sans utiliser la calculatrice :

$$f_1(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$f_2(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} ;$$



$$f_3(x) = -x + 2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f_5(x) = |x| + \frac{1}{x}$$

$$f_4(x) = -x - 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$f_6(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$