

1.- Se sabe que $|a b c d e f g h i| = 2$. Calcula los siguientes determinantes y enuncia las propiedades que utilices:

(a) $|3a 3b 15c d e 5f g h 5i|$

Resolución

$$|3a 3b 15c d e 5f g h 5i| \quad (1) \Rightarrow 3 \cdot 5 |a b c d e f g h i| = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$$

(1) Sacamos el factor 3 de la 1ª fila y el factor 5 de la 3ª columna

(b) $|a + 2b c b d + 2e f e g + 2h i h|$

Resolución

$$|a + 2b c b d + 2e f e g + 2h i h| \quad (1) \Rightarrow |a c b d f e g i h| + |2b c b 2e f e 2h i h| \quad (2) \Rightarrow -|a b c d e f g h i|$$

(1) Descomponemos en suma de dos determinantes, usando la 1ª columna

(2) En el 1er término intercambiamos la 2ª y 3ª columnas y el determinante cambia de signo.

El 2º término es nulo por ser proporcionales la 2ª y 3ª columnas.

2.- Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + 2z = -1 \\ 3x - y - 7z = +1 \end{cases}$

(a) Halla todos los valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene infinitas soluciones.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 0 & -1 & 0 & 2\lambda & 3 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 2\lambda & -1 & -7 & \lambda & +1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 12\lambda - 14 + 2\lambda^2 = 2\lambda^2 + 12\lambda - 14 = 2(\lambda^2 + 6\lambda - 7) = 0.$$

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 8}{2} \quad \lambda = 1 \quad \lambda = -7$$

- Si $\lambda \neq 1$; $\lambda \neq -7$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

- Si $\lambda = 1$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 & 3 & -1 & -7 \end{pmatrix}$. Como $|2 \ 0 \ 0 \ 2| = 4 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 2 & -1 & -7 & 2 & -7 \end{pmatrix} \quad f_2 + f_1 \quad f_3 - 3f_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & -7 & -7 & -7 \end{pmatrix} \quad f_2 : 2$$

Como $|1 \ 2 \ 0 \ 1| = 1 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

- Si $\lambda = -7$,

$$A^* = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & -14 & -1 & -7 & -6 \end{pmatrix} \quad f_1 - 7f_2 \quad f_3 + 3f_2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 9 & 8 & 10 & -1 & 0 & -14 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La 1ª fila corresponde a la ecuación $0 = -8$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

Conclusión: el sistema tiene infinitas soluciones para $\lambda = 1$.

(b) Resuelve el sistema para los valores de λ en el apartado anterior.

Resolución

Sabemos que el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones para $\lambda = -1$.

La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que corresponde al sistema $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y + z = 1 \end{cases}$.

En la 2ª ecuación, $y = 1 - z$; en la 1ª ecuación, $x = 3 - 2y = 3 - 2(1 - z) = 1 + 2z$.

RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = 1 + 2k, y = 1 - k, z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$

(c) Discute el sistema para los restantes valores de λ .

Resolución Ya se ha hecho en a)

3.- (prueba extraordinaria) Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 1 \\ 4x + y - 2z = 3 \\ 2x - 3y + az = b \end{cases}$$

(a) Determina a y b sabiendo que el sistema tiene infinitas soluciones.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & a & 2 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\det A = 3a - 8 + 60 + 10 - 18 - 8a = 44 - 5a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{44}{5}$$

- Si $a \neq \frac{44}{5}$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

- Si $a = \frac{44}{5}$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & \frac{44}{5} & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Como $|3 \ 2 \ 4 \ 1| = -5 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$;

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & \frac{44}{5} & 2 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Consideramos el menor $|3 \ 2 \ 1 \ 4 \ 1 \ 3 \ 2 \ -3 \ b| = 3b + 12 - 12 - 2 - 8b + 27 = 25 - 5b = 0 \Leftrightarrow b = 5$.

- Si $b \neq 5$, $\text{rg } A^* = 3 \neq \text{rg } A = 2$ y por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible, no tiene solución

- Si $b = 5$,

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & \frac{44}{5} & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{5f_3} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 10 & 2 & 0 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow{3f_2 - 4f_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 18 & -10 & -4 & 17 \\ 2 & -3 & 10 & 2 & 0 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow{3f_3 - 2f_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 18 & -10 & -4 & 17 \\ 0 & -7 & 20 & -6 & -2 & 23 \end{pmatrix}$$

Como $|3 \ 2 \ 0 \ -5| = -15 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$.

Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. Conclusión: debe ser $a = \frac{44}{5}$, $b = 5$

(b) Resuelve el sistema resultante.

Resolución

La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & \frac{44}{5} & 2 & 0 \end{pmatrix}$, que corresponde al sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 1 \\ -5y + 14z = 5 \end{cases}$$

En la 2ª ecuación, $y = \frac{14z - 5}{5}$

En la 1ª ecuación

$$3x = 1 - 2y + 5z = 1 - 2 \frac{14z - 5}{5} + 5z = \frac{5 - 28z + 10 + 25z}{5} = \frac{15 - 3z}{5} \Rightarrow x = \frac{15 - 3z}{15} = \frac{5 - z}{5}$$

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = \frac{5-k}{5}, y = \frac{14k-5}{5}, z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$

4.- (prueba extraordinaria) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & b \\ 3 & 4 & 1 & -b & 0 \end{pmatrix}$

(a) Determina para que valores del parámetro b existe A^{-1} .

Resolución

$$\det A = -b^2 + 4b - 3 = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4b + 3 = 0; \quad b = \frac{4 \pm 2}{2} \quad b = 3 \quad b = 1$$

Luego, para $b \neq 3$ y $b \neq 1$ la matriz A tiene inversa

(b) Calcula A^{-1} para $b = 2$.

Resolución

Para $b = 2$, sabemos que existe A^{-1} . Además, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $\det A = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 & -12 & -12 & -3 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -7 & -12 & 12 & 2 & -3 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

5.- (prueba ordinaria) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcula $(A^t A^{-1})^2 A$.

Resolución

$$(A^t A^{-1})^2 A = A^t A^{-1} A^t A^{-1} A = A^t A^{-1} A^t I = A^t A^{-1} A^t$$

Como $\det A = -2 \neq 0$, existe $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A^t A^{-1})^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -11 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

6.- (prueba ordinaria) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Halla todos los valores de λ para los que la matriz A no tiene inversa

Resolución

$$\det A = \lambda + \lambda - 2\lambda^2 = 2\lambda - 2\lambda^2 = 2\lambda(1 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = 1$$

Luego, para $\lambda = 0$ ó $\lambda = 1$ la matriz A no tiene inversa

(b) Tomando $\lambda = 1$, resuelve el sistema escrito en forma matricial $A(x \ y \ z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Resolución

Para $\lambda = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sabemos que $\det A = 0$ y como $|1 \ 2 \ 1 \ 1| = -1 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

La matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad f_2 - f_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad f_2 = -f_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $|1 \ 2 \ 0 \ 1| = -1 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, que corresponde al sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

En la 2ª ecuación, $y = -z$; en la 1ª ecuación, $x = -2y - z = -2(-z) - z = z$.

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = k \ y = -k \ z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$

7.- Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 7 & 9 \end{pmatrix}$

(a) Halla los valores de x e y tales que $AX = U$.

Resolución

$AX = U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x + 2y & 4x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \end{pmatrix}$. Igualando los elementos nos queda el sistema

RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

$\{3x + 2y = 7 \quad 4x + 3y = 9 \quad .3.2 \quad \{9x + 6y = 21 \quad 8x + 6y = 18 \}$. Restando las ecuaciones, $x = 3$; sustituyendo, $3.3 + 2y = 7$; $y = -1$

Respuesta: $x = 3, y = -1$

(b) Halla la matriz A^{-1} y calcula $A^{-1}U$.

Resolución

Como $\det A = 1 \neq 0$, existe $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\text{adj } A)^t = \frac{1}{1}(3 \quad -4 \quad -2 \quad 3)^t = (3 \quad -2 \quad -4 \quad 3)$

$A^{-1}U = (3 \quad -2 \quad -4 \quad 3)(7 \quad 9) = (3 \quad -1)$

(c) Encuentra los posibles valores de m para que los vectores $A(1 \ m)$ y $(1 \ m)$ sean linealmente dependientes.

Resolución

Sean $u = A(1 \ m) = (3 \ 2 \ 4 \ 3)(1 \ m) = (3 + 2m \ 4 + 3m)$ y $v = (1 \ m)$. Los vectores serán l.d. si $\text{rg}(u, v) = 1$.

Es decir, si $\det(u, v) = 0$; $3m + 2m^2 - 4 - 3m = 0$; $2m^2 - 4 = 0$; $m^2 = 2$; $m = \pm\sqrt{2}$

8.- Considera el sistema de ecuaciones $\{x + y + (-1)z = 1 \quad y + z = 1 \quad 2x + y - z = -3$

(a) Halla todos los posibles valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene al menos dos soluciones distintas.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = (1 \ \lambda \ \lambda \quad -1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \quad -1)$ y

$A^* = (1 \ \lambda \ \lambda \quad -1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \quad -1 \quad -3)$

$\det A = -1 + 2\lambda - 2\lambda + 2 - 1 = 0$ y como el menor de A , $|1 \ 1 \ 1 \quad -1| = -2 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

Tomemos en A^* el menor $|1 \ \lambda \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \quad -3| = -3 + 2\lambda - 2 - 1 = 2\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$.

- Si $\lambda \neq 3$, $\text{rg } A^* = 3 \neq \text{rg } A = 2$. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible, no tiene solución.

- Si $\lambda = 3$,

$A^* = (1 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \quad -1 \quad -3) \quad f_3 - 2f_1 \quad (1 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \quad -5 \quad -5 \quad -5) \quad f_3 = -5f_2 \quad (1 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \quad -5 \quad -5 \quad -5)$

Como $|1 \ 3 \ 0 \ 1| = 1 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Por tanto, para $\lambda = 3$ el sistema tiene al menos dos soluciones distintas porque tiene infinitas soluciones.

(b) Resuelve el sistema para los valores de λ en el apartado anterior.

Resolución

Sabemos que $\lambda = 3$ y la matriz del sistema es equivalente a $(1 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1)$, que corresponde al sistema $\{x + 3y + 2z = 1 \quad y + z = 1\}$.

En la 2ª ecuación, $y = 1 - z$; en la 1ª ecuación, $x = 1 - 3y - 2z = 1 - 3(1 - z) - 2z = z - 2$.

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones del sistema son $\{x = k - 2y = 1 - kz = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$

(c) Discute el sistema para los restantes valores de λ .

Resolución

Ya se ha discutido en el a)

9.- Discute y resuelve el siguiente sistema según los valores de λ

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = (1 \lambda 1 \lambda 1 1 1 1 \lambda)$ y $A^* = (1 \lambda 1 0 \lambda 1 1 0 1 1 \lambda 0)$

$\det A = \lambda + \lambda + \lambda - 1 - 1 - \lambda^3 = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = 0$. Factoricemos haciendo uso de la regla de Ruffini:

$1 \quad -1 \downarrow \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad 3 \quad -12 \quad -22 \quad 0$. Nos queda $(\lambda - 1)(-\lambda^2 - \lambda + 2) = 0$, de donde $\lambda = 1$ ó $-\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{1 \pm 3}{-2} \quad \lambda = 1 \quad \lambda = -2$$

- Si $\lambda \neq 1$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

Al ser un sistema homogéneo, la solución es la trivial, $x = 0, y = 0, z = 0$.

- Si $\lambda = 1$, $\det A = 0$ y $A = (1 1 1 1 1 1 1 1 1)$ $f_2 = f_1$ $f_3 = f_1$ $(1 1 1)$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 1 < n^\circ$ de incógnitas.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es $A^* = (1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0)$ $f_2 = f_1$ $f_3 = f_1$ $(1 1 1 0)$, que corresponde a $x + y + z = 0$.

Despejando, $x = -y - z$. Llamando $y = k, z = k'$, las infinitas soluciones son $\{x = -k - k' y = k z = k'\}$, con $k, k' \in \mathbb{R}$

- Si $\lambda = -2$, $\det A = 0$ y $A = (1 - 2 1 - 2 1 1 1 1 - 2)$. como $|1 - 2 - 2 1| = -3 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$$A^* = (1 - 2 1 0 - 2 1 1 0 1 1 - 2 0) \quad f_2 + 2f_1 \quad f_3 - f_1 \quad (1 - 2 1 0 0 - 3 3 0 0 3 - 3 0) \quad f_2:3 \quad f_3$$

Como $|1 - 2 0 - 1| = -1 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a $(1 - 2 1 0 0 - 1 1 0)$, que corresponde al sistema $\{x - 2y + z = 0 - y + z = 0\}$.

En la 2ª ecuación, $y = z$; en la 1ª ecuación, $x = 2y - z = 2z - z = z$.

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = k y = k z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$

10.- Resuelve la ecuación matricial $A^2X = 2B$, siendo $A = (1 - 1 2 - 3)$ y $B = (1 - 1 4 0 - 3 1)$

Resolución

$C = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$. Como $\det C = 1 \neq 0$, existe C^{-1} . La ecuación sería $CX = 2B$.

Multiplicando por C^{-1} , por la izquierda, en los dos miembros, $C^{-1}CX = C^{-1}2B = 2C^{-1}B \Rightarrow X = 2C^{-1}B$.

$$X = 2 \frac{1}{\det C} (\text{adj } C)^t B = 2 \frac{1}{1} (74 \ -2 \ -1)^t (1 \ -140 \ -31) = 2(7 \ -24 \ -1)(1 \ -140 \ -31) = (14 \ -2528 \ -230)$$

11.- Considera el sistema de ecuaciones escrito en forma matricial

$$\begin{pmatrix} b & 1 & b & 0 & b & 1 & 1 & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Discute el sistema según los valores del parámetro b.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} b & 1 & b & 0 & b & 1 & 1 & b & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} b & 1 & b & -2 & 0 & b & 1 & 0 & 1 & b & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\det A = b^2 + 1 - b^2 - b^2 = 1 - b^2 = 0 \Leftrightarrow b = 1 \text{ ó } b = -1$$

- Si $b \neq 1$; $b \neq -1$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

- Si $b = 1$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como $|1 \ 1 \ 0 \ 1| = 1 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad f_3 = f_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Como } |1 \ 1 \ 0 \ 1| = 1 \neq 0, \text{rg } A^* = 2.$$

Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

- Si $b = -1$ la matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad f_3 + f_1 \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

La 3ª fila corresponde a la ecuación $0 = -4$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

(b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Resolución

Para $b = 1$, sabemos que el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ que corresponde al sistema $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ y + z = 0 \end{cases}$.

Despejando, $y = -z$; $x = -2 - y - z = -2 + z - z = -2$.

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = -2 \ y = -k \ z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$

12.- Un mayorista de café dispone de tres tipos base, Moka, Brasil y Colombia, para preparar tres tipos de mezcla, A, B y C, que envasa en sacos de 60 kg con los siguientes contenidos en kilos y precios del kilo en euros:

	Mezcla A	Mezcla B	Mezcla C
Moka	15	30	12
Brasil	30	10	18
Colombia	15	20	30
Precio (cada kg)	4	4,5	4,7

Suponiendo que el preparado de las mezclas no supone coste alguno, ¿cuál es el precio de cada uno de los tipos de café?

Resolución

Sean x, y, z el precio del kg de café de Moka, Brasil y Colombia, respectivamente.

Usando la tabla llegamos al sistema

$$\begin{cases} 15x + 30y + 15z = 60.4 \\ 30x + 10y + 20z = 60.4,5 \\ 12x + 18y + 30z = 60.4,7 \end{cases} \Rightarrow \{15x + 30y + 15z = 60.4\}$$

Simplificamos la 1ª ecuación por 15; la 2ª por 10 y la 3ª por 6, obteniendo

$$\begin{cases} x + 2y + z = 16 \\ 3x + y + 2z = 27 \\ 2x + 3y + 5z = 47 \end{cases}$$

La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 16 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 27 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 47 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - 3f_1 \quad f_3 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -21 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 15 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 15 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 + 5f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -21 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & -45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -21 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 : 3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -21 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 + 3f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que corresponde al sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 16 \\ 16z = 96 \\ -y + 3z = 15 \end{cases}$$

$$z = \frac{96}{16} = 6 \quad ; \quad y = 3z - 15 = 3 \cdot 6 - 15 = 3 \quad ; \quad x = 16 - 2y - z = 16 - 2 \cdot 3 - 6 = 4.$$

Por tanto, el kg de café de Moka cuesta 4 €, el de Brasil 3 € y el de Colombia 6 €.

OTROS DEL 2000 (COU I)

1.- Sea I la matriz identidad 3×3 y sea A la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 4 & -5 & 6 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Halla los valores de a que hacen cero el determinante de la matriz $A - aI$.

Resolución

$$A - aI = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 4 & -5 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a & -4 & 6 & 4 & -5-a & 6 & 2 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$10a - 3a^2 - a^3 - 48 - 24 + 60 + 12a + 12 - 6a - 16a = -a^3 - 3a^2 = -a^2(a + 3) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad \text{ó} \quad a = -3$$

(b) Resuelve el sistema homogéneo escrito en forma matricial $A(x \ y \ z) = (0 \ 0 \ 0)$

Resolución

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 4 & -5 & 6 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; \det A = -48 - 24 + 60 + 12 = 0 \text{ y como } |-5 \ 6 \ -1 \ 0| = 6 \neq 0, \text{ rg } A = 2.$$

Al ser un sistema homogéneo, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 & 4 & -5 & 6 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - 2f_1 \quad f_3 - f_1} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 & 0 & 3 & -6 & 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 : 2 \quad f_2 : 3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1.5 & -3 & 0 & 0 & 1.5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

que corresponde al sistema $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$. En la 2ª ecuación, $y = 2z$

En la 1ª ecuación, $x = 2y - 3z = 2(2z) - 3z = z$.

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = k \ y = 2k \ z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$

RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

(c) ¿Existe alguna solución del sistema anterior para la que sea $z = 1$?

Resolución Si $z = 1$, entonces $k = 1$. Luego, la solución que se pide es $\{x = 1, y = 2, z = 1\}$

2.- Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$

(a) Determina AB y BA .

Resolución $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
 $BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$

(b) Calcula, si es posible, la inversa de AB y la inversa de BA .

Resolución $\det(AB) = 0$. Luego, NO existe $(AB)^{-1}$; $\det(BA) = -1$. Luego, existe $(BA)^{-1} = (-1)$

(c) Determina la matriz X de forma que $ABX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Resolución

Como $(AB)_{3 \times 3}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$ entonces $X_{3 \times 1}$. Sea $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$. De

$$ABX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que da lugar al sistema $\{-3x + 3z = 0, -x + z = 0, -2x + 2z = 0\}$.

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad f_1 = 3f_2 \quad f_3 = 2f_2 \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que corresponde a la ecuación $-x + z = 0$. Despejando, $x = z$. Llamando $z = k, y = k'$ las infinitas soluciones son $\{x = k, y = k', z = k\}$, con $k, k' \in \mathbb{R}$. Luego, hay infinitas matrices solución, $X = \begin{pmatrix} k & k' & k \end{pmatrix}$, con $k, k' \in \mathbb{R}$

3.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Calcula la inversa de A .

Resolución

$\det A = -1 + 4 - 6 = -3 \neq 0$. Luego, existe A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -1 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -7 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

(b) Calcula la inversa de A^t y la de A^{-1} , puede tenerse en cuenta el apartado (a).

Resolución

$$\begin{aligned} (A^t)^{-1} &= (A^{-1})^t = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -7 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \\ &; (A^{-1})^{-1} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones $A^t(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, puede tenerse en cuenta el apartado (b).

Resolución

De $A^t(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, multiplicando por la izquierda por $(A^t)^{-1}$ se tiene,

$$(A^t)^{-1} A^t(x, y, z) = I(x, y, z) = (A^t)^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z) = (A^t)^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -7 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 7 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{-7}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

. Solución: $x = \frac{5}{3}, y = \frac{-7}{3}, z = \frac{7}{3}$

De $A^{-1}(x \ y \ z) = (2 \ 3 \ -4)$, multiplicando por la izquierda por A se tiene,

$$AA^{-1}(x \ y \ z) = I(x \ y \ z) = A(2 \ 3 \ -4)$$

$$(x \ y \ z) = A(2 \ 3 \ -4) = (1 \ 0 \ 2 \ 2 \ 1 \ 0 \ 3 \ 1 \ -1)(2 \ 3 \ -4) = (-6 \ 7 \ 13). \text{ Solución:}$$

$$x = -6, y = 7, z = 13$$

4.- Sea la matriz $A = (\lambda \ 1 \ 1 \ 1 \ \lambda \ \lambda \ \lambda \ -1 \ 0 \ 1 \ -\lambda)$

(a) Determina el rango de A en función de los valores del parámetro λ .

Resolución

$$|A| = |\lambda \ 1 \ 1 \ 1 \ \lambda \ \lambda \ \lambda \ -1 \ 0 \ 1 \ -\lambda| \quad |c_3 - c_2 \quad |\lambda \ 1 \ 0 \ 1 \ \lambda \ 0 \ \lambda \ -1 \ 0 \ 1 \ -\lambda|.$$

Desarrollando por la 3ª columna, $|A| = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ó } \lambda = -1$

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -1$, $\det A \neq 0$ y, por tanto, $\text{rg } A = 3$.

- Si $\lambda = 1$, $\det A = 0$ y $A = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \quad f_1 = f_2 \quad f_3 = 0 \quad (1 \ 1 \ 1)$. Luego, $\text{rg } A = 1$.

- Si $\lambda = -1$, $\det A = 0$ y $A = (-1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -2 \ 0 \ 2) \quad f_2 = -f_1 \quad f_3 : 2 \quad (-1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 1)$.
Como $|1 \ 1 \ 0 \ 1| = 1 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

(b) Calcula, para $\lambda = 0$, la inversa de A.

Resolución

Para $\lambda = 0$, $A = (0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1)$; $\det A = -1 \neq 0$. Luego, existe A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = \frac{1}{-1} (0 \ -1 \ 0 \ -1 \ 1 \ -1 \ 0 \ -1 \ -1)^t = -(0 \ -1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0 \ -1 \ -1) = (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 1)$$

(c) Resuelve, para $\lambda = -1$, el sistema escrito en forma matricial $A(x \ y \ z) = (1 \ -1 \ 2)$.

Resolución

Para $\lambda = -1$, $\text{rg } A = 2$ y la matriz del sistema es

$$A^* = (-1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -2 \ 0 \ 2 \ 2) \quad f_2 = -f_1 \quad f_3 : 2 \quad (-1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 1)$$

Como $|1 \ 1 \ 0 \ 1| = 1 \neq 0$, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Obtenemos el sistema $\{-x + y + z = 1 \quad -x + z = 1\}$.

En la 2ª ecuación, $x = z - 1$; en la 1ª ecuación, $y = 1 + x - z = 1 + z - 1 - z = 0$.

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = k - 1 \quad y = 0 \quad z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$

5.-

(a) Enuncia el teorema de Rouché-Frobenius.

Resolución

Sean A la matriz de coeficientes y A' la matriz ampliada de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Si r y r' son el rango de A y A' , respectivamente:

- El sistema es compatible si los rangos coinciden $r = r'$. Además, si $r = n$, el sistema es compatible determinado; es decir, tiene solución única.

Si el sistema es compatible, $r = r'$, pero $r < n$, el sistema es compatible indeterminado; es decir, tiene una infinidad de soluciones.

- El sistema es incompatible si los rangos son distintos, $r \neq r'$, es decir, el sistema no tiene solución.

(b) Determina el valor del parámetro λ para que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y - 6z = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \\ 3x - y + \lambda z = 0 \end{cases} \text{ tenga soluciones distintas de la trivial.}$$

Resolución

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$. Al ser un sistema homogéneo tendrá soluciones distintas de la trivial, o sea infinitas siempre que $\det A = 0$ porque si $\det A \neq 0$ la única solución es la trivial.

$$\det A = -2\lambda + 18 + 6 - 36 + 6 - \lambda = -3\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

(c) Para el valor de λ , obtenido en (b), calcula todas las soluciones del sistema.

Resolución

La matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0 & 1 & -2 & 6 & 0 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ f_2 - f_1 & f_3 - f_1 & (1 & 1 & -6 & 0 & 0 & -3 & 12 & 0 & 0 & -4 & 16 & 0) \\ f_2 : 3 & f_3 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema $\begin{cases} x + y - 6z = 0 \\ -y + 4z = 0 \end{cases}$.

En la 2ª ecuación, $y = 4z$; en la 1ª ecuación, $x = 6z - y = 6z - 4z = 2z$.

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = 2k, y = 4k, z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$

(d) Deduce que para cualquier valor de λ , la única solución con $y = 0$ es la trivial.

Resolución

Si $\lambda = -2$, la solución del sistema es $(x, y, z) = (2k, 4k, k)$, con $k \in \mathbb{R}$. Si $y = 4k = 0$, tenemos $x = y = z = 0$, que es la solución trivial, y ya hemos dicho antes que, para tener la solución trivial, tenía que ser $\lambda \neq -2$.

Por tanto, para cualquier valor de λ , si $y = 0$, tenemos la solución trivial $(0, 0, 0)$.

6.- Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ a & 2 & a & + & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$

(a) ¿Para qué valores del parámetro a tiene inversa A ?

Resolución $\det A = a + 4 - 4a + 3a - 4 = 0$. Luego, para todo valor de "a" la matriz A no tiene inversa

(b) Discute el sistema de ecuaciones lineales dado en forma matricial $AX = B$.

RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = (1 \ -2 \ -3 \ 0 \ 1 \ 2 \ a \ 2 \ a + 4)$ y

$$A^* = (1 \ -2 \ -3 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ a \ 2 \ a + 4 \ 5)$$

$\det A = 0$ y como $|1 \ -2 \ 0 \ 1| = 1 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

Tomemos en A^* el menor $|1 \ -2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2 \ a \ 2 \ 5| = 5 - 4a - a - 4 = 1 - 5a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{5}$

- Si $a \neq \frac{1}{5}$, $\text{rg } A^* = 3 \neq \text{rg } A = 2$. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible, no tiene solución.

- Si $a = \frac{1}{5}$, la matriz del sistema es

$$A^* = \left(1 \ -2 \ -3 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ \frac{1}{5} \ 2 \ \frac{21}{5} \ 5 \right) \quad \begin{matrix} f_3 \\ f_2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} (1 \ -2 \ -3 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 10 \ 21 \ 25) \\ f_3 - f_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} (1 \ -2 \ -3 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 10 \ 21 \ 25) \\ f_3 - f_1 \end{matrix}$$

Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

(c) En los casos en los que el sistema anterior sea compatible, resuélvelo e interpreta geoméricamente los resultados.

Resolución

Sabemos que sólo es compatible (e indeterminado) para $a = \frac{1}{5}$.

La matriz del sistema, $(1 \ -2 \ -3 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 0 \ 12 \ 24 \ 24)$ corresponde al sistema

$$\{\pi_1: -x + 2y + 3z = -1 \quad \pi_2: y + 2z = 2 \quad \pi_3: 12y + 24z = 24 \quad (\text{tres planos})\}$$

La matriz anterior es equivalente a $(-1 \ 2 \ 3 \ -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2)$, que corresponde al sistema

$$\{-x + 2y + 3z = -1 \quad y + 2z = 2\}$$

En la 2ª ecuación, $y = 2 - 2z$; en la 1ª ecuación, $x = 2y + 3z + 1 = 2(2 - 2z) + 3z + 1 = 5 - z$.

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones del sistema son $\{x = 5 - k \quad y = 2 - 2k \quad z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$, que corresponde a una

recta del espacio, corte de los planos, $r: \{-x + 2y + 3z = -1 \quad y + 2z = 2\}$.

Resumiendo, $\pi_2 = \pi_3$ y π_1 se cortan en la recta r .