

Κατακόρυφη βολή στον πλανήτη X13



Όταν οι πρώτοι άποικοι έφτασαν επιτέλους στον μακρινό πλανήτη X13, διαπίστωσαν ότι εκτός από το κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας, που ήξεραν ότι ήταν ίδιο με το γήινο, υπάρχει κατακόρυφο ηλεκτρικό πεδίο λόγω ομοιόμορφης φόρτισης της

σφαιρικής επιφάνειας του πλανήτη. Το πεδίο αυτό μπορούσε να θεωρηθεί ομογενές, για μικρό ύψος, όπως άλλωστε και το βαρυτικό. Ένας επιστήμονας εκτόξευσε κατακόρυφα προς τα πάνω μια ειδική σφαίρα μάζας $m = 2\text{kg}$, με ηλεκτρικό φορτίο $q = 5\mu\text{C}$ και ταχύτητα μέτρου $|v_0| = 22\text{m/s}$ και παρατήρησε ότι επέστρεψε στο σημείο βολής μετά από $t = 4\text{s}$. Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$ και η αντίσταση του αέρα αμελητέα.

α) Η ταχύτητα με την οποία επιστρέφει η σφαίρα στο σημείο βολής έχει μέτρο

- i) ίσο με $|v_0|$ ii) μεγαλύτερο από $|v_0|$ iii) μικρότερο από $|v_0|$

Δικαιολογείστε τη σωστή απάντηση.

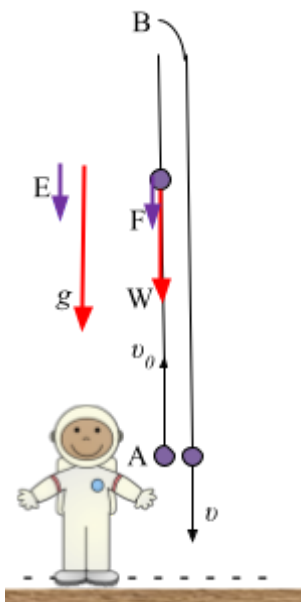
β) Ποια είναι η επιτάχυνση της σφαίρας, μέσα στο σύνθετο πεδίο; Με βάση το αποτέλεσμα μπορεί ο επιστήμονας να καταλάβει το είδος του ηλεκτρικού φορτίου του πλανήτη;

γ) Ποιο θα είναι το μέγιστο ύψος που θα φτάσει η σφαίρα πάνω από το σημείο βολής; Να κάνετε τη γραφική παράσταση θέσης – χρόνου ($\psi \rightarrow t$), θεωρώντας $\psi_0 = 0$, στο σημείο βολής, από $t = 0$ μέχρι $t = 4\text{s}$.

δ) Ποια είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια του πλανήτη και ποιος ο λόγος των μέτρων της βαρυτικής προς την ηλεκτρική δύναμη;

ε) Ποια είναι η διαφορά δυναμικού V_{AB} στο ηλεκτρικό πεδίο, μεταξύ του σημείου Α της εκτόξευσης και του σημείου Β, που βρίσκεται στο μέγιστο ύψος της βολής;

Απάντηση



α) Στο βαρυτικό και στο ηλεκτρικό πεδίο, ισχύει η Α.Δ.Μ.Ε.

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = 0 \Leftrightarrow \Delta K + \Delta U_{\beta\alpha\rho} + \Delta U_{\eta\lambda} = 0$$

Όμως η αρχική και η τελική θέση είναι η ίδια, άρα

$$\Delta U_{\beta\alpha\rho} = \Delta U_{\eta\lambda} = 0 \text{ οπότε και}$$

$$\Delta K = 0 \Leftrightarrow K_{\text{τελ}} = K_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \Leftrightarrow |v| = |v_0|$$

για τα μέτρα των ταχυτήτων. Σωστή απάντηση: (α)

β) Η σφαίρα δέχεται δύο δυνάμεις:

- Βαρυτική $W = mg$

- Ηλεκτρική $F = qE$

Τα δύο πεδία είναι ομογενή, άρα οι δυνάμεις είναι σταθερές και σύμφωνα με τον 2^ο Νόμο Newton, (που ισχύει και στον μακρινό πλανήτη), η σφαίρα θα αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση και θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Από την εξίσωση της ταχύτητας μπορούμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνση της σφαίρας. Θεωρούμε θετική φορά προς τα πάνω οπότε:

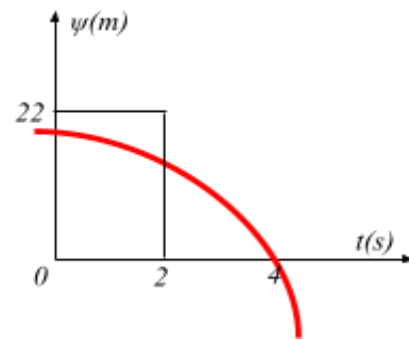
$$v = v_0 + at \Leftrightarrow -22 = 22 + a \cdot 4 \Leftrightarrow a = -11 \text{ m/s}^2$$

Αφού το μέτρο της επιτάχυνσης είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας, η δύναμη F του ηλεκτρικού πεδίου θα έχει την ίδια κατεύθυνση με το βάρος W . Όμως $q > 0$ άρα η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου θα έχει την ίδια κατεύθυνση με τη δύναμη F δηλαδή προς τα κάτω. Τότε όμως, όπως φαίνεται και στο σχήμα, το φορτίο της επιφάνειας θα είναι αρνητικό (η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου κατευθύνεται πάντα προς αρνητικά φορτία).
γ) Τη στιγμή που το σώμα φτάνει στο μέγιστο ύψος (σημείο Β), $v_B = 0$. Από την εξίσωση της ταχύτητας έχουμε

$$v_B = v_0 + at_{av} \Leftrightarrow 0 = 22 + (-11) \cdot t_{av} \Leftrightarrow t_{av} = 2 \text{ s}$$

Από την εξίσωση της μετατόπισης έχουμε

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= h_{max} = v_0 t_{av} + \frac{1}{2} a t_{av}^2 \\ \Leftrightarrow h_{max} &= 22 \cdot 2 - 0,5 \cdot 11 \cdot 2^2 \\ \Leftrightarrow h_{max} &= 44 - 22 \Leftrightarrow h_{max} = 22 \text{ m} \end{aligned}$$



δ) Ο 2^{ος} Νόμος Newton με θετική φορά προς τα πάνω, δίνει

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m \vec{a} \Leftrightarrow -W - F = ma \Leftrightarrow -mg - qE = ma \\ \Leftrightarrow qE &= -mg - ma \Leftrightarrow E = \frac{-m(g+a)}{q} \Leftrightarrow E = \frac{-2(10-11)}{5 \cdot 10^{-6}} \\ \Leftrightarrow E &= \frac{2}{5 \cdot 10^{-6}} \Leftrightarrow E = 0,4 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}} \end{aligned}$$

Ο λόγος των δυνάμεων θα είναι $\frac{W}{F} = \frac{mg}{qE} = \frac{2 \cdot 10}{5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,4 \cdot 10^6} = \frac{20}{2} = 10$

δ) Η διαφορά δυναμικού στο ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των σημείων Α και Β θα βρεθεί από τη

$$E = \frac{|V_{AB}|}{h_{max}} \Leftrightarrow |V_{AB}| = E \cdot h_{max} \Leftrightarrow |V_{AB}| = 0,4 \cdot 10^6 \cdot 22 \Leftrightarrow |V_{AB}| = 8,8 \cdot 10^6 \text{ V}$$

σχέση

Όμως το δυναμικό κατά τη φορά της έντασης ελαττώνεται, επομένως

$$V_A < V_B \Leftrightarrow V_A - V_B < 0 \Leftrightarrow V_{AB} = -8,8 \cdot 10^6 \text{ V}$$

Σχόλια

1. Αν η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ξεπερνούσε τα $0,8 \cdot 10^6 V/m$ και η ατμόσφαιρα του πλανήτη ήταν παρόμοια με την ατμόσφαιρα της Γης, θα υπήρχε ο κίνδυνος να ξεσπάσουν κεραυνοί, μια και για τέτοιες τιμές έντασης, ο αέρας από μονωτής μετατρέπεται σε αγωγό.
2. (Όταν οι μαθητές διδαχτούν το βαρυτικό πεδίο)

Διαφορά δυναμικού μπορεί να υπολογιστεί και στο βαρυτικό πεδίο.

α) Με σημείο αναφοράς την επιφάνεια της Γης ($U_{\text{βαρ(επ)}} = 0$), ο τύπος είναι όμοιος με αυτόν του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου:

$$g = \frac{|V_{AB}|}{h_{\max}} \Leftrightarrow |V_{AB}| = g \cdot h_{\max} \Leftrightarrow |V_{AB}| = 10 \cdot 22 \Leftrightarrow |V_{AB}| = 220V$$

Όμως το δυναμικό κατά τη φορά της έντασης ελαττώνεται, επομένως

$$V_A < V_B \Leftrightarrow V_A - V_B < 0 \Leftrightarrow V_{AB} = -220V$$

β) Με σημείο αναφοράς το άπειρο ($U_{\text{βαρ}(\infty)} = 0$),

$$\begin{aligned} V_{AB} = V_A - V_B &= -GM_{\Gamma} \left(\frac{1}{R_{\Gamma}} - \frac{1}{R_{\Gamma} + h} \right) = -g_0 R_{\Gamma}^2 \left(\frac{1}{R_{\Gamma}} - \frac{1}{R_{\Gamma} + h} \right) = \\ &= -10 \cdot (64 \cdot 10^5)^2 \left(\frac{1}{64 \cdot 10^5} - \frac{1}{64 \cdot 10^5 + 22} \right) = -219,99V \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα, με τον (α) τρόπο να πλεονεκτεί σε ευκολία, κάτι που δείχνει ότι η επιλογή του σημείου αναφοράς μπορεί να διευκολύνει τον υπολογισμό, χωρίς να αλλάζει φυσικά το αποτέλεσμα.