

Da "38 **The Golden Ratio-A Contrary Viewpoint**" di Clement Falbo
(capitolo 38 in: "**Martin Gardner in the Twenty-First Century**").

Traduzione del primo paragrafo:

Introduzione

Negli ultimi cinque secoli, è stata scritta una gran quantità di assurdità sul rapporto aureo, $\Phi = 1 + \sqrt{5}$, sulla sua geometria e sulla sequenza di Fibonacci.

Molti autori affermano che queste entità matematiche sono onnipresenti in natura, arte, architettura e anatomia.

Gardner ha dimostrato che l'ammirazione per questo numero sembra essere stata elevata allo status di culto.

Fortunatamente, tuttavia, ci sono stati alcuni articoli recenti, tra cui Fischler nel 1981, Markowsky nel 1992, Steinbach nel 1997 e Fowler nel 1982, che stanno iniziando a mettere le cose in chiaro.

Ad esempio, Markowsky, nel suo brillante articolo "Misconceptions about the Golden Ratio", parlando di Φ , dice:

In genere, le sue proprietà matematiche sono correttamente enunciate, ma molto di ciò che viene presentato a riguardo nell'arte, nell'architettura, nella letteratura e nell'estetica è falso o seriamente fuorviante.

Sfortunatamente, queste affermazioni sulla sezione aurea hanno raggiunto lo status di conoscenza comune e sono ampiamente ripetute.

Anche gli attuali libri di testo di geometria delle scuole superiori... fanno molte affermazioni errate sulla sezione aurea.

Ci vorrebbe un libro di grandi dimensioni per documentare tutta la disinformazione sulla sezione aurea, gran parte della quale è semplicemente la ripetizione degli stessi errori da parte di autori diversi.

È notevole che prima dei documenti di Fischler e Markowsky, sembrava che non fossero stati stabiliti standard per ottenere le misurazioni delle opere d'arte.

Spesso, un sostenitore della sezione aurea sceglieva di inquadrare una parte di un'opera d'arte in modo arbitrario per creare l'aspetto che l'artista ha voluto utilizzare un'approssimazione di Φ .

Markowsky mostra un esempio in cui Bergamini circonda arbitrariamente un rettangolo aureo attorno alla figura di San Girolamo in un dipinto di Leonardo da Vinci, che taglia il braccio del poveretto per far combaciare l'immagine.

Si afferma spesso che il rapporto aureo si verifica in natura come forma di spirali nelle conchiglie marine.

Possiamo facilmente testare questa affermazione fornendo prima un protocollo per misurare le spirali.

Un requisito dovrebbe essere quello di consentire un certo errore nelle misurazioni.

Markowsky suggerisce una tolleranza di $\pm 2\%$, che sembra essere abbastanza adeguata.

Misurando con questo protocollo, scopriamo che le spirali nelle conchiglie marine non si adattano generalmente alla forma del rapporto aureo.

Ciò è vero nonostante i numerosi articoli su Internet e altrove, in cui le immagini sono state apparentemente allungate per adattarsi al "dilatamento della verità", per così dire.

Il rapporto aureo è associato alla sequenza di Fibonacci in un modo molto semplice.

La sequenza è un esempio di equazione ricorsiva quadratica talvolta usata per descrivere vari fenomeni scientifici e naturali come la crescita della popolazione strutturata per età.

Per determinare la formula ricorsiva quadratica generale, siano x_0 , x_1 , p e q numeri positivi fissi e, per qualsiasi intero $n \geq 2$, definiamo x_n come

$$x_n = px_{n-1} + qx_{n-2} \quad (1)$$

Murthly fornisce una serie di teoremi per questa equazione ricorsiva generale.

È chiaro che molte delle caratteristiche che vengono proclamate essere uniche della sequenza di Fibonacci sono, in effetti, comuni a tutte le equazioni ricorsive di secondo ordine.

Ad esempio,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}/x_n = r. \quad (2)$$

dove r è la radice positiva dell'equazione quadratica

$$x^2 - px - q = 0, \quad (3)$$

ottenuto assumendo che $x = x^n$ sia una soluzione di (1).

Uno dei nostri obiettivi in questo articolo è dimostrare che se $q = 1$ ed è il limite in (2), allora la coppia (r, p) ha tutte le proprietà geometriche e algebriche che sono spesso attribuite come uniche alla coppia $(\Phi, 1)$.

Ad esempio, abbiamo $p = 1/r$ corrispondente alla proprietà $\Phi - 1 = 1/\Phi$.

Affinché l'equazione (1) sia utile nel descrivere la crescita della popolazione strutturata in base all'età in piante e animali, i coefficienti p e q devono essere determinati da alcune proprietà di nicchia o di fecondità dell'organismo studiato.

In altre applicazioni, come la fillotassi, possiamo usare un'equazione ricorsiva di secondo ordine come (1) per prevedere e spiegare l'evoluzione della disposizione delle foglie su uno stelo in termini di massimizzazione della raccolta della luce solare.

Tuttavia, non dovremmo aspettarci che le complessità dei sistemi naturali cedano alla sequenza di Fibonacci facile da calcolare, e non sembra esserci alcuna prova imparziale che favorisca le sequenze di Fibonacci rispetto a tutte le altre possibili sequenze.

Se si spende un grande sforzo nel cercare solo questa sequenza speciale, allora può essere percepita, indipendentemente dal fatto che ci sia o meno.

Ciò è illustrato succintamente in termini di analisi statistica da Fischler, che mostra come calcoli negligenti e formule usate in modo improprio producono il numero aureo quando non c'è.

In un nuovo libro di successo, Livio attinge alle informazioni sviluppate in Markowsky e altri per discutere le violazioni del protocollo che sono la fonte di affermazioni che si verificano nell'architettura classica, come il Partenone e le piramidi egizie.

Livio presenta una spiegazione ben scritta di affermazioni fuorvianti riguardanti questi classici, così come vari dipinti e altre opere d'arte.

Livio chiama i sostenitori di queste affermazioni i "numeristi aurei".

Sembra, tuttavia, che creda che certe costruzioni (come il triangolo di Keplero) o equazioni aritmetiche (come una rappresentazione in frazione continua di Φ) siano abbastanza significative e uniche da intitolare il suo libro "La storia di Phi, il numero più sorprendente del mondo".

Fibonacci:

1, 1, 4, 5, 6, 10, 15, 21, 31, 46, 67, 98, 144, 211, 309, 453, 664, 973, 1426, 2090, 3063, 4489, 6579, 9642, 14131, 20710, 30352, 44483, 65193, 95545, 140028, 205221, 300766, 440794, 646015, 946781, 1387575, 2033590, ...

$g(n) = g(n-1) + g(n-3)$ con: $g(0)=1, g(1)=4, g(2)=5$:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040, 1346269, 2178309, 3524578, 5702887, 9227465, 14930352, 24157817, 39088169, ...

La relazione di ricorrenza è:

$$g(n) = g(n-1) + g(n-3)$$

Con le condizioni iniziali:

$$g(0)=1, g(1)=4, g(2)=5$$

Questo tipo di ricorrenza è una **ricorrenza lineare omogenea** di ordine 3, cioè ogni termine dipende dai tre termini precedenti.

Si mostra come passare a un'equazione cubica per risolvere questa ricorrenza.

Per risolvere una ricorrenza lineare come questa, si può assumere che la soluzione della ricorrenza sia della forma:

$$g(n) = r^n,$$

dove r è una costante che rappresenta la **radice caratteristica** della ricorrenza.

Sostituendo questa forma nella ricorrenza, otteniamo:

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-3}.$$

Dividendo entrambi i membri dell'equazione per r^{n-3} (presumendo $r \neq 0$), si ottiene:

$$r^3 = r^2 + 1.$$

ricavando l'equazione cubica:

$$r^3 - r^2 - 1 = 0.$$

Le soluzioni di questa equazione sono le **radici caratteristiche** della ricorrenza, e ci dicono come cresce la sequenza asintoticamente.

La radice reale positiva **R** di questa equazione è quella che determina il comportamento asintotico della sequenza, mentre le radici complesse (coniugate) influenzeranno i termini di ordine inferiore nella soluzione generale della ricorrenza.

Sintesi:

1) relazione di ricorrenza: $g(n) = g(n-1) + g(n-3)$

2) assunzione: $g(n) = r^n$, sostituendo nella ricorrenza

3) equazione caratteristica: $r^3 - r^2 - 1 = 0$.

Questa equazione cubica è chiamata "**equazione caratteristica**" della ricorrenza.

Le sue radici determinano il comportamento asintotico della sequenza $g(n)$.

La radice dominante (la più grande in valore assoluto) è quella che domina la crescita della sequenza per $n \rightarrow \infty$.

Se **R** è la radice dominante della relazione di ricorrenza, i termini della sequenza possono essere approssimati come:

$$g(n) \sim A \cdot R^n,$$

dove **A** è una costante che dipende dalle condizioni iniziali.

Di conseguenza:

$$g(n)/g(n+1) \sim R^n/R^{n+1} = 1/R.$$

Quindi, **R** è il rapporto asintotico tra due termini consecutivi.

Il rapporto tra $g(n-2)$ e $g(n)$:

$$g(n-2)/g(n) \sim A \cdot R^{n-2} / A \cdot R^n = 1/R^2.$$

Una soluzione completa per le equazioni cubiche fornisce le radici reali e complesse tramite la **formula di Cardano**.

La formula di Cardano per un'equazione cubica della forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

è complessa.

Il risultato che per questa particolare equazione cubica:

$$x^3 - x^2 - 1 = 0,$$

la radice reale positiva è approssimativamente ≈ 1.46557

e le altre due radici sono complesse, una delle quali è negativa e l'altra è il complesso coniugato.

$x_1 \approx 1.46557$ (radice reale positiva),

$x_2 \approx -0.23279 + 0.79255i$ (radice complessa),

$x_3 \approx -0.23279 - 0.79255i$ (radice complessa coniugata).

La radice reale positiva **$R \approx 1.46557$** è quella che descrive il comportamento asintotico della sequenza della ricorrenza che stiamo considerando, ed è quella che usiamo per determinare il rapporto tra i termini consecutivi nella sequenza.

Rapporto tra gli ultimi due termini: $r = 1/1.46557 \approx 0.682328$.

Rapporto tra ultimo e terzultimo: $1/1.46557^2 \approx 0.465571 = r^2 = 1 - R$.

Mi pare si possano notare alcune delle proprietà che sono comuni con Fibonacci e Φ .

Ho scritto un programmino che verifica almeno approssimativamente i valori proposti:

<https://drive.google.com/file/d/loVNdnMlbOIr5379IPagYHLl0YnLGf86x/view?usp=sharing>