TD 14 - Déterminants

Exercice 1 : Déterminant de Vandermonde

Soit $n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. On note $V(x_1, \ldots, x_n)$ le déterminant de la matrice carrée $M(x_1, \ldots, x_n) = (x_i^{j-1})_{i,j=1,\ldots,n}$. Par exemple, pour $n = 4$, on a

$$M(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $V(x_1, \ldots, x_n)$.
   (Aide : On pourra retrancher de chaque colonne la colonne précédente multipliée par x_1, en commençant par la dernière colonne.)
2. A quelle condition un déterminant de Vandermonde s'annule-t-il ?

Un exercice ultra-classique !

<u>Démonstration pour</u> $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$

On soustrait la troisième colonne multipliée par x_1 à la quatrième : $C_4 \leftarrow C_4 - x_1 C_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 - x_1 x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 - x_1 x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 - x_1 x_4^2 \end{pmatrix}$$

On soustrait la deuxième colonne multipliée par x_1 à la troisième : $C_3 \leftarrow C_3 - x_1 C_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 - x_1 x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 - x_1 x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 - x_1 x_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 - x_1 x_2 & x_2^3 - x_1 x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 - x_1 x_3 & x_3^3 - x_1 x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 - x_1 x_4 & x_4^3 - x_1 x_4^2 \end{pmatrix}$$

On soustrait la première colonne multipliée par x_1 à la deuxième : $C_2 \leftarrow C_2 - x_1 C_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 - x_1 x_2 & x_2^3 - x_1 x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 - x_1 x_3 & x_3^3 - x_1 x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 - x_1 x_4 & x_4^3 - x_1 x_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x_1 + x_2 & x_2^2 - x_1 x_2 & x_2^3 - x_1 x_2^2 \\ 1 & -x_1 + x_3 & x_3^2 - x_1 x_3 & x_3^3 - x_1 x_3^2 \\ 1 & -x_1 + x_4 & x_4^2 - x_1 x_4 & x_4^3 - x_1 x_4^2 \end{pmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne, et par multilinéarité

$$det\ M = 1 \begin{vmatrix} -x_1 + x_2 & x_2^2 - x_1 x_2 & x_2^3 - x_1 x_2^2 \\ -x_1 + x_3 & x_3^2 - x_1 x_3 & x_3^3 - x_1 x_3^2 \\ -x_1 + x_4 & x_4^2 - x_1 x_4 & x_4^3 - x_1 x_4^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)\, V(x_2, x_3, x_4)$$

En refaisant la même chose
$V(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)\,(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)V(x_3, x_4)$
et une troisième fois
$V(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)\,(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$
Cette preuve est clairement généralisable et on montre par récurrence que :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

<u>Démonstration par récurrence :</u>

- <u>Initialisation</u> :

Pour $n = 1, V(x_1) = 1$ et $\prod_{1 \leq i < j \leq 1} (x_j - x_i) = 1$

Prenons $n = 2$ (afin de voir qq chose !)

$V(x_1, x_2) = x_2 - x_1$ et $\prod_{1 \leq i < j \leq 2} (x_j - x_i) = x_2 - x_1$ donc P(2) est vraie

- <u>Hérédité</u> : On suppose qu'il existe un rang n tel que $P(n)$ soit vrai
  Au rang $n + 1$: $V(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1) V(x_2, \dots, x_{n+1})$ avec les mêmes transformations sur les colonnes et développement par rapport à la 1ère ligne.
  Et par hypothèse de récurrence :

  $$V(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1) V(x_2, \dots, x_{n+1}) = (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$$

  Ainsi $V(x_1, \dots, x_{n+1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$ donc $P(n + 1)$ est vraie
- <u>Conclusion</u> : La propriété est vraie pour n = 1 et est héréditaire, alors elle est vraie pour tout $n \in N^*$

2.
La dernière expression montre que $V(x_1, \dots, x_n) = 0$ ssi $\exists (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 / x_i = x_j$

<u>Autre méthode : avec les polynômes</u>
On pose

$$P(x) = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1{}^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2{}^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & & & & \dots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}{}^2 & & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

- Si $\exists i, j$ tels que $x_i = x_j$ alors $V(x_1, \dots, x_n) = 0$ car deux lignes identiques.
- On suppose que $\forall i, j, x_i \neq x_j$

On développe par rapport à la dernière ligne, on s'aperçoit que P est un polynôme de degré $n - 1$ dont le coefficient dominant est $V(x_1, \dots, x_{n-1})$
de plus $P(x_i) = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_i) = 0$ pour tout $i \in [1 ; n - 1]$

comme $\forall i, j, x_i \neq x_j$, P admet $n - 1$ racines simples, ainsi $P(x) = K \prod_{i=1}^{n-1} (x - x_i)$

Comme le coefficient dominant est $V(x_1, ..., x_{n-1})$ alors $P(x) = V(x_1, ..., x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x - x_i)$

On remplace x par x_n et $P(x_n) = V(x_1, ..., x_n) = V(x_1, ..., x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)$

On obtient une relation de récurrence entre $V(x_1, ..., x_n)$ et $V(x_1, ..., x_{n-1})$

Ainsi, on montre par récurrence que : $V(x_1, ..., x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

Applications :

- **interpolation de Lagrange** :
  - Lorsqu'on cherche un polynôme passant par un ensemble de points (xi,yi), on résout un système linéaire dont la matrice est une matrice de Vandermonde.

  - Si les xi sont distincts, la matrice est inversible, ce qui garantit l'existence et l'unicité du polynôme interpolateur.
- Pour montrer que la famille $\{e^{a_1 x}, ..., e^{a_n x}\}$ est libre si les a_i sont deux à deux distincts

Exercice 2 : Produit de deux matrices

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, avec $n > p$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Que peut-on dire du déterminant de AB ?

Indication : on peut d'abord considérer le rang de AB.

Si on se place dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, on peut considérer

$f_A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ de matrice A, $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de matrice B

AB est alors la matrice de $f_A \circ f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

On a $AB \in M_n(\mathbb{R})$, il y a donc un sens à calculer son déterminant.

$$rg\ A = rg\ f_A = dim\ Im\ f_A$$
$$rg\ B = rg\ f_B = dim\ Im\ f_B$$

méthode 1 : On sait que Si $p < n$

$f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de matrice B ne peut pas être injective, donc $f_A \circ f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ne l'est pas non plus et $det\ AB = 0$.

méthode 2 : ou bien : la matrice AB est celle de l'application linéaire $f_A \circ f_B$ dans une certaine base

donc $Im(f_A \circ f_B) \subset Im(f_A)$ ainsi $rg(AB) \leq rg(A)$

or d'après le théorème du rang : $dim\ \mathbb{R}^p = dim\ Ker(f_A) + rg(f_A)$ donc $p = dim\ Ker(f_A) + rg(f_A)$

On en déduit que $rg(A) = rg(f_A) \leq p < n$ et donc $rg(AB) < n$

On en déduit que AB n'est pas inversible donc $det(AB) = 0$

Exercice 3 : Famille libre

Soit dans $\mathbb{R}^3$ la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3), avec $v_1 = (1,1,t), v_2 = (1,t,1), v_3 = (t,1,1)$.
Pour quelles valeurs de t la famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Pour déterminer les valeurs de t pour lesquelles la famille est libre on calcule :

$$det(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+2 & 1 & t \\ t+2 & t & 1 \\ t+2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (t+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (t+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix}$$

$$det(v_1, v_2, v_3) = (t+2)(t-1)(1-t) = -(t-1)^2(t+2)$$

La famille est libre ssi $det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$ à savoir $(-(t-1)^2(t+2) \neq 0$ ie $t \neq 1$ et $t \neq -2$

Exercice 4 : Déterminant et polynômes

Soit $f \in End(\mathbb{R}_n[X])$. Calculer $\det(f)$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(P) = P + P'$.
2. $f(P) = P(X+1) - P(X)$.
3. $f(P) = X P' + P(1)$.

1. On calcule les images de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, $B = \{1, X, X^2, ..., X^n\}$

   $f(1) = 1 + 0 = 1$ $\quad$ $f(X) = X + 1$ $\quad$ $f(X^2) = X^2 + 2X$

   $f(X^k) = X^k + kX^{k-1}, k \in [1 ; n]$

   On obtient la matrice de f et on calcule son déterminant dans la base canonique :

$$det(f) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 2 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ ... & ... & ... & ... & n \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = 1$$

2. $f(1)(X) = 1 - 1 = 0$

   $f(X)(X) = X + 1 - X = 1$

   $f(X^2)(X) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$

   $f(X^3)(X) = (X+1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1$

   $f(X^k)(X) = (X+1)^k - X^k = \binom{k}{1}X^{k-1} + \binom{k}{3}X^{k-2} + ... + \binom{k}{k}X^0 = \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}X^{k-i}$

On calcule :

$$det(f) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & ... & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 2 & ... & \binom{k}{k-1} & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & ... & & \\ ... & ... & ... & ... & \binom{k}{1} & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & ... & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3. $f(1) = 0 \times X + 1 = 1$ $\quad$ $f(X^k) = kX^{k-1} \times X + 1^k = kX^k + 1$

on calcule :

$$det(f) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & 0 & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & k & & \\ & & & & & \dots & \\ & & & & & & n \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times \dots \times n = n!$$

Exercice 5 : Densité des matrices inversibles

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes. Montrer :
$\exists \alpha > 0$ tq $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ avec $0 < |\varepsilon| < \alpha$, $A + \varepsilon I_n$ est inversible.
Indication : On peut considérer les racines du polynôme $P(x) = \det(A + xI)$.

Soit $P(x) = det(A + xI)$, P est un polynôme de degré n qui admet au maximum n racines complexes. On les appelle $z_1, \dots, z_n$, on suppose que $0 \leq |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n|$

$A + \epsilon I$ est inversible ssi $det(A + \epsilon I) \neq 0$ ssi $P(\epsilon) \neq 0$ donc ϵ n'est pas racine de P.

- Si P n'admet que zéro comme racine, alors il suffit de prendre $\alpha = 1$
  Pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |\epsilon| < 1$, $P(\epsilon) = det(A + \epsilon I) \neq 0$ et donc $A + \epsilon I$ est inversible

- Si P admet une racine différente de zéro,

Prenons $\alpha = min|z_i|$ avec i le premier indice tel que $|z_i| \neq 0$

Alors $\forall \epsilon \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |\epsilon| < \alpha$, $P(\epsilon) \neq 0$ et donc $A + \epsilon I$ est inversible