G. Requin ULM – PC – 2005 (6h)

(Ce problème comporte beaucoup de calculs lourds à faire et à écrire, ils ont été vérifiés sauf mention contraire mais ne sont pas retranscrits dans leur totalité ici ...)

Quelques problèmes de géodésie

I – Mouvements satellitaires

1. Eratosthène … cf cours de seconde !

2. Définition de la Convention (1795) : le mètre est la 40 millionième partie du méridien terrestre.

3. Le champ $\mathbf{g_0}$ est un champ newtonien et tout plan passant par la droite OP est un plan de symétrie pour la distribution de masse, le champ en P appartient donc à tous ces plans, il est situé sur la droite OP. Par invariance en θ et ϕ de la distribution de matière, g_0 ne dépend que de r.

4. le théorème de Gauss s'écrit : $\oiint \mathbf{g_0} \bullet \mathbf{dS} = -4\pi G M_{\text{int}}$. On obtient alors : $r < R_T$: $\mathbf{g_0}(r) = -(4\pi/3)\, G\rho\, r\, \mathbf{u_r}$ et $r > R_T$: $g_0(r) = -(4\pi/3)\, G\rho\, R_T^3\, (1/r^2)\ \mathbf{u_r}$. On vérifie la continuité en R_T.

5. En définissant V(r) par $\mathbf{g_0} = -\,\mathbf{grad}\ V(r)$, il vient : $r > R_T$ avec $V(\infty) = 0$, $V(r) = -(4\pi/3)G\rho R_T^3 / r$ puis $r < R_T$: $V(r) = (4\pi/3)\, G\rho\, (r^2 - R_T^2)/2 - (4\pi/3)\, G\rho R_T^2$ par continuité du potentiel en R_T. Le graphe est classique.

6. a)- $m\,\mathbf{a}(r) = m\,\mathbf{g_0}(r)$; $\boldsymbol{\sigma} = m\,\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}(r)$ et $d\boldsymbol{\sigma} / dt = \mathbf{0}$ car la force est centrale. Le mouvement est donc plan, dans le plan perpendiculaire à $\boldsymbol{\sigma} = \sigma\,\mathbf{u_z}$ et le produit $mr^2 d\phi/dt = Cte$, la constante des aires $C = \tfrac{1}{2}\, r^2 d\phi/dt = dS/dt$ vitesse aréolaire est constante aussi.

b)- $a_r = d^2r/dt^2 - r\,(d\phi/dt)^2$ et $a_\phi = 0$ comme prévu ; soit aussi

$$a_r = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right)\frac{d\varphi}{dt} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{2C}{r^2}\right)\frac{2C}{r^2} - r\left(\frac{2C}{r^2}\right)^2$$

et avec $1/r = u$ on écrit : $a_r = -4C^2 u^2 [\, d^2u/d\phi^2 + u] = -k\, u^2$ avec $k = (4\pi/3)\, G\rho\, R_T^3 = GM_T$. En posant $P = 4C^2/k$ on obtient comme solution $u = 1/P + u_0 \cos(\phi)$ où u_0 serait donné par une condition initiale et le choix de l'origine des ϕ. Pour l'excentricité $e = u_0 P > 0$ on a les 4 cas : e = 0 cercle, 0 < e < 1 ellipse, e = 1 parabole, e > 1 hyperbole.

c)- $r_a = P/(1-e)$, $r_p = P/(1+e)$, $r_P + r_a = 2a$, donc $a = P/(1-e^2)$ puis $c = a - r_P = ae$ et enfin $a^2 = b^2 + c^2$ conduisant à $P = b^2/a$.

d) $C = S/T = \pi ab/T \quad \Rightarrow \quad a^3/T^2 = k/(4\pi^2) = GM_T/4\pi^2$, 3ème loi de Kepler.

e)- A.N. : $M_T = 5.95\ 10^{24}$ kg soit une masse volumique $\rho = 5.48\ 10^3 \text{kg.m}^{-3}$. L'intérieur de la terre est plus dense que les couches externes.

f)- $M_S = 2.01\ 10^{30}$kg.

II – Potentiel gravitationnel terrestre

1. a)- $V(P) = -\int \frac{G\rho(\mathbf{r}')}{P'P}\, d^3r'$, on utilise le D.L. habituel partant de $\mathbf{PP'} = \mathbf{PO} + \mathbf{OP}$, et dans l'approximation $r'/r < R_T/r \ll 1$:

$$\frac{1}{P'P} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{\mathbf{r}\bullet\mathbf{r}'}{r^2}}\right)^{1/2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r'^2}{r^2} + \frac{\mathbf{r}\bullet\mathbf{r}'}{r^2} + \frac{3}{8}\left(2\frac{\mathbf{r}\bullet\mathbf{r}'}{r^2}\right)^2\right)$$

b)- Le terme dipolaire est nul car $\int \rho(\mathbf{r'})\mathbf{r'} d^3r' = \mathbf{0}$ puisque O est le barycentre.

c)- Vérification O.K. en passant aux coordonnées cartésiennes.

d)- Comme $r'^2 = \Sigma\, x'^2_i$, Trace $(K_{ij}) = 3\, K_0$.

e)- Avec la symétrie de révolution d'axe Oz, on peut permuter les indices x et y sans rien changer : $K_{xx} = K_{yy}$ et $K_{zz} = 3K_0 - 2\,K_{xx}$, les termes $K_{xy} = K_{yx} = 0$. Les termes $K_{zx} = K_{xz} = 0$ par symétrie, de même que K_{yz} et K_{zy}. La matrice est diagonale.

f)- En remplaçant dans le terme quadrupolaire : $V_2(r) = -G/(2r^3)\ \{ -K_0 + K_{xx}u_x^2 + K_{yy}u_y^2 + K_{zz}u_z^2 \} = -G/(2r^3)\ \{ -K_0 + K_{xx}(1-u_z^2) + (3K_0 - 2K_{xx})u_z^2 \} = -G/(2r^3)\ (K_{xx} - K_0)\,(1 - 3u_z^2)$ or $u_z = \cos\theta$. On retrouve alors le développement demandé avec $J_2 = (K_{xx} - K_0)/R_e^2 M_T$, J_2 étant défini sans dimension.

g)- i. Avec ρ = cte, $K_0 = \rho\, R_e^2 R_p\, [R_e^2 \int_{-1}^{1} x^2\, dxdydz + R_e^2 \int_{-1}^{1} y^2\, dxdydz + R_p^2 \int_{-1}^{1} z^2\, dxdydz]$ (*je n'ai pas de police avec tilde !*) et chaque intégrale peut être réécrite sous la forme $\iiint r^2\cos^2\theta\ r^2 dr\ \sin\theta d\theta d\phi$, l'intégration portant sur une boule de rayon 1 soit un résultat de $4\pi/15$ alors $K_0 = \rho\, 3V_{tot}/4\pi\, [(2R_e^2 + R_p^2)4\pi/15] = M_T(2R_e^2 + R_p^2)/5$.

ii. $K_{xx} = \rho\, R_e^2 R_p\, [\, 3\, R_e^2 \int_{-1}^{1} x^2\, dxdydz] = \rho\, 3V_{tot}/4\pi\, [\, 3\, R_e^2\, 4\pi/15]$ soit $K_{xx} = 3M_T R_e^2/5$ et alors $J_2 = (1 - (R_P/R_e)^2)/5$. (Par curiosité, avec les données de l'énoncé, $J_2 = 1.31\ 10^{-3}$)

2. a)- $\mathbf{g}(r) = -\,\mathbf{grad}\ V = (\ldots)\ \mathbf{u_r} + 3\ J_2 M_T G R_e^2 (1/r^4)\sin(\theta)\cos(\theta)\ \mathbf{u_\theta}$. Et le théorème du moment cinétique fournit en valeur instantanée l'expression proposée, dans la valeur moyenne sur une durée de l'ordre de quelques périodes de rotation du satellite on peut sortir r de la valeur moyenne par contre il faut y garder $\mathbf{u_\phi}$.
b)- Si l'orbite est bien décrite par un mouvement circulaire en moyenne, en écrivant la R.F.D. là aussi en moyenne on voit que l'accélération tangentielle est nulle en moyenne donc on peut considérer que le satellite tourne à vitesse angulaire constante Ω_S. La composante radiale de l'accélération s'écrit : $-\Omega_S^2 r = -M_T G/r^2 + 3J_2 M_T G R_e^2/2r^4$ soit $\Omega_S \cong (M_T G/r^3)^{1/2}$ en négligeant les termes en $(R_e/r)^2$.
c)- Avec $\mathbf{r} = r\,\mathbf{u_r}$, $\boldsymbol{\sigma} = m\,\mathbf{r}\Lambda\mathbf{v} = mr^2\Omega_S\mathbf{u_Z}$, soit $\boldsymbol{\sigma} = m(M_T G r)^{1/2}\mathbf{u_Z}$. Mais c'est plutôt $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_{Ts}$ qui nous intéresse dans lequel r est constante et $\mathbf{u_Z}$ varie lentement.
d)- On calcule le terme de moyenne selon les indications de l'énoncé : $\langle\sin\theta\cos\theta\,\mathbf{u_\phi}\rangle_{Ts} = \langle(\mathbf{u_r}.\mathbf{u_z})(\mathbf{u_z}\Lambda\mathbf{u_r})\rangle = \langle(\cos\Omega_S t(\mathbf{u_X}.\mathbf{u_z}) + \sin\Omega_S t(\mathbf{u_Y}.\mathbf{u_z}))(\cos\Omega_S t\,(\mathbf{u_z}\Lambda\mathbf{u_X}) + \sin\Omega_S t(\mathbf{u_z}\Lambda\mathbf{u_Y}))\rangle = \tfrac{1}{2}\,((\mathbf{u_X}.\mathbf{u_z})(\mathbf{u_z}\Lambda\mathbf{u_X}) + (\mathbf{u_Y}.\mathbf{u_z})(\mathbf{u_z}\Lambda\mathbf{u_Y}))$, les autres termes sont nuls en moyenne, or $\mathbf{u_Y}.\mathbf{u_z} = 0$, $\mathbf{u_X}.\mathbf{u_z} = \sin i$ et $\mathbf{u_z}\Lambda\mathbf{u_X} = \cos i\ \mathbf{u_Y}$. Enfin en remarquant que $\mathbf{u_Y} = \mathbf{u_Z}\Lambda\mathbf{u_z}/\sin i$, on retrouve l'expression fournie mais avec $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle$ contrairement à l'énoncé, c'est une équation différentielle sur des grandeurs moyennées sur la période du satellite et à variation lente.
e)- Je corrige là aussi : $d(\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle.\mathbf{u_z})/dt = d\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle/dt.\mathbf{u_z} = (\ldots)(\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle\Lambda\mathbf{u_z}).\mathbf{u_z} = 0$ et $d\langle\sigma\rangle^2 = 2\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle.d\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle/dt = 2(\ldots)(\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle\Lambda\mathbf{u_z}).\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle = \mathbf{0}$ donc $|\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle| =$ constante. Ce qu'on pouvait tirer de la question c) car $\mathbf{u_Z}$ est unitaire. Or $\cos(i) = \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle.\mathbf{u_z}/|\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle|$ donc l'inclinaison i ne varie pas.
f)- Le vecteur $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle$ reste sur un cône d'axe Oz et de demi angle au sommet i. Il parcourt le cône avec un mouvement de précession à la vitesse Ω_{prec} telle que l'équation du mouvement soit : $\mathbf{d\langle\sigma\rangle/dt} = \Omega_{prec}\mathbf{u_z}\ \Lambda\ \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle$. D'où Ω_{prec} (< 0 si $J_2 > 0$).
g) Il est étonnant d'appliquer au satellite SPOT un potentiel dans l'approximation r » R_T ! Quoiqu'il en soit, en prenant le plus petit commun multiple entre 1 jour = 86400 s = $2^7 3^3 5^2$ et $T_s = 6084\ s = 2^2 3^2 13^2$ on a $T_{prec} = 13^2 2^7 3^3 5^2 = 139$j pour avoir un nombre entier, exactement, de périodes du satellite coïncidant avec un nombre entier de jours, $J_2 = (2/3)\,(T_s/T_{prec})(r/R_e)^2/\cos(i) = 2.8\ 10^{-3}$.
3.a)- Il n'y a que la force centrifuge : $\delta\mathbf{f}_{inertie} = -\,m\Omega_T^2\mathbf{HP}$, avec $\Omega_T^2 = GM_S/SO^3$.
b)- $\delta\mathbf{f} = -\dfrac{mM_S G}{SO^3}\left(\mathbf{SO} + \dfrac{\mathbf{SO}}{SO}\left(\dfrac{\mathbf{SO}\bullet\mathbf{OP}}{SO}\right)\right) - \dfrac{mM_S G}{SP^3}\mathbf{SP}$, le développement de SP en fonction de SO et OP redonne bien l'expression fournie.
c)- $\boldsymbol{M}(O) = \mathbf{OP}\ \Lambda\delta\mathbf{f} = 3mM_S G(\mathbf{SO}.\mathbf{OP})(\mathbf{OP}\Lambda\mathbf{SO})/SO^5 = (d\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle/dt)_{Soleil}$ à comparer au terme $(d\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle/dt)$ de la question 2.d). En faisant le rapport des deux en ordre de grandeur, $\langle\sigma\rangle$ étant remplacé par son expression 2.c) il apparaît effectivement la condition sur r signalée. On peut calculer $r_c = (\ldots)^{1/5} = 55000$ km, c'est la Lune qui est soumise à la gravitation du Soleil et SPOT au terme quadrupolaire de la Terre. La mesure de J_2 par la précession de SPOT est donc pertinente de ce point de vue.
4. Comme η est petit, on remplace $R_p/R_e = 1 - \eta$ dans J_2 et au premier ordre on obtient $\eta = 5J_2/2$. Soit numériquement $\eta = 7.0\ 10^{-3}$ à comparer à $3.2.10^{-3}$ d'après les données de l'énoncé, cet écart d'un facteur 2 est-il du à la trop grande proximité du satellite SPOT pour l'utilisation conforme du potentiel approché ?

III – Modèle fluide de la Terre en rotation

1. a)- Il suffit de suivre la méthode proposée par l'énoncé en justifiant mathématiquement la décomposition en deux intégrales et l'intégration sur les frontières $R_i(\mathbf{u})$.
b)- C'est l'équation d'un ellipsoïde de révolution de centre O en écrivant $\mathbf{OP'} = \mathbf{OP} + R\mathbf{u}$.
c)- On développe le polynôme du second degré en R, on calcule les racines qu'on note R_1 et R_2 et en effectuant la somme des carrés, on obtient bien l'expression proposée (les racines carrées du discriminant s'éliminent).
d)- $\dfrac{\partial I}{\partial a_j} = \int \dfrac{2}{a_j^3}\dfrac{u_j^2 d^2\Omega}{\left(\sum_i u_i^2/a_i^2\right)^2}$. Dans l'expression de V(P) de c)- le terme « 1 » donne B, le terme en $-\Sigma_i x_i^2 a_i^2$ donne le premier des termes de Aj car l'intégrale ne porte que sur les u_i. Enfin il faut développer le carré de la somme, les termes carrés redonnent le second terme dans l'expression des Aj, et les termes croisés $u_i u_j$ donnent 0 une fois intégrés ? (*le tout fait un calcul très volumineux que j'ai la flemme de recopier ici*).
e)- Les A_j sont des potentiels par m^2. $\Delta V - 4\pi\rho G = 0$ donne $2A_x + A_z = 2\pi\rho G$.

2. a)- Remplaçant dans l'expression de I, les a_i de la somme par R_e ou R_p et le vecteur $\mathbf{u}$ en coordonnées cartésiennes de composantes u_i $(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$: $I = 2\pi R_e^2\int\dfrac{\sin\theta\ d\theta}{1+\xi^2\cos^2\theta} = -\,2\pi R_e^2\int\dfrac{dX}{1+\xi^2 X^2}$ à intégrer sur [1,-1] soit $I = 4\pi R_e^2\,\mathrm{Arctan}(\xi)/\xi$.
b)- En écrivant l'égalité entre des variations infinitésimales $dI'(R_e,R_p) = dI(a_x,a_y,a_z)$, avec $da_x = da_y = dR_e$ et $da_z = dR_p$, on obtient l'égalité proposée à R_P constant.
c)- On remplace dans l'expression d)- de A_x la valeur de $I(\xi)$ et $(\partial I/\partial a_x)$ et a_x par R_e:

$$A_x = \frac{\rho G}{2}\left(\frac{1}{R_e^2}\frac{4\pi R_e^2\, Arctg(\xi)}{\xi} - \frac{1}{R_e}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial I}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial R_e}\right)_{R_p}\right) = \pi\rho G\left(\frac{2arctg(\xi)}{\xi} + F(\xi)\right)$$

Je ne vois pas comment doit disparaître le premier terme de la parenthèse ?? Cela m'intéresserait d'avoir la réponse ! Merci d'avance.

d)- En prenant l'expression A_x de l'énoncé et en la reportant dans e) on obtient A_z.

e)- Pour l'ellipse intersection de l'ellipsoïde avec un plan passant par Oz, ξ représente le rapport c/b qui n'est pas l'excentricité. Lim $F(\xi)_{\xi\to 0} = 2/3 - 2\xi^2/15 + \ldots$ alors $A_x = A_y = A_z = 2\pi\rho G/3$ à l'ordre 1 en ξ. Il est logique de retrouver les trois termes identiques pour la sphère définie par c = 0.

f)-

3. a)- On attend un aplatissement des pôles et une élongation équatoriale. Ω_0 est une vitesse angulaire de rotation caractéristique pour un objet, multiplié par R_T c'est une vitesse de satellisation à la surface. Pour la Terre, la période de rotation est de un jour $\Omega_{rot}^2/\Omega_0^2 = 4.59\ 10^{-3}$.

b)- Dans R', $\boldsymbol{f}_{vol} = -$ **grad** $p + \rho\mathbf{g} + \rho\Omega_{rot}^2\mathbf{HM}$; à l'équilibre, en introduisant le potentiel centrifuge $V_c = -\frac{1}{2}\Omega_{rot}^2(x^2 + y^2)$ une intégrale première de l'équation d'équilibre donne $p/\rho + V_g + V_c = Cte$.

c)- La surface libre de la Terre est une isobare à p_0. La somme $V_g + V_c$ est donc une constante en tout point de la surface

d)- En remplaçant V_g par son expression :

$V_g + V_c = A_x x_s^2 + A_y y_s^2 + A_z z_s^2 + B - \frac{1}{2}\Omega_{rot}^2 x_s^2 - \frac{1}{2}\Omega_{rot}^2 y_s^2 = (V_g + V_c)_s$. Et en particularisant les points d'intersections avec les axes principaux de l'ellipsoïde, on obtient trois équations du type : ($x_s = a_x$, $y_s = 0$, $z_s = 0$) $A_x x_s^2 + B - \frac{1}{2}\Omega_{rot}^2 x_s^2 = (V_g + V_c)_s$.

e)- i. Le système précédent devient : $\Omega_0^2 F(\xi) - \Omega_{rot}^2/2 = V_0/R_e^2$ et $2\Omega_0^2(1 - F(\xi)) = V_0/R_p^2$. En éliminant V_0 on trouve :

$$G(\xi) = 2\frac{F(\xi)\left(3 + \xi^2\right) - 2}{1 + \xi^2}$$

.

ii. Avec le D. L. de F, on obtient lim $G(\xi) = 8\xi^2/15$. Avec le rapport $\Omega_{rot}^2 / \Omega_0^2 = 4.59\ 10^{-3}$, $R_e/R_P = (1+\xi^2)^{1/2} = 1.0043$ d'où $\eta = 4.3\ 10^{-3}$. Soit du même ordre que la valeur estimée d'après l'énoncé.

iii. Quand $\xi \to \infty$, $F(\xi) \cong \pi/2\xi - 2/\xi^2$ et $G(\xi) \cong \pi/\xi$. La fonction G passe de 0 à 0, elle n'est pas identiquement nulle elle a donc un maximum égal à 0.45 pour $\xi = 2.53$ et alors $\Omega_{rot}^c = \Omega_0\ (0.45)^{1/2} = 7.2\ 10^{-4}$rad/s soit une période de 2.42 heures.

4. a)- i. Pour la distribution envisagée le plan z = 0 est un plan de symétrie, c'est donc un plan de symétrie pour **g** aussi. $g_z(z)$ s'inverse donc en z = 0 et enfin la gravitation étant attractive on en déduit le signe de g_z par exemple pour z > 0.

ii. Par la symétrie précédente $V(r_\perp, z) = V(r_\perp, -z) < 0$, et $g_z(r\perp, 0) = 0$ montre que $V(r_\perp, z)_{r\perp=cte}$ est minimum (maximum en valeur absolue) dans le plan de symétrie donc V augmente en s'éloignant du plan médiateur.

b)-i. dV_1 est le potentiel créé par une tige centrée en Q(x,y) et la distance au plan de symétrie de la tige est $d_1 = |h_1^0 - (h_1 + h_2)/2|$. De même le potentiel dV_2 sera le potentiel d'un point situé à la distance $d_2 = |h_2^0 - (h_1 + h_2)/2|$ ces distances étant différentes ils seront différents, si Q_0 a une cote maximum $d_1 > d_2$ et donc $dV_1 > dV_2$.

ii. L'équilibre hydrostatique demande que la surface de l'astre soit une surface équipotentielle, or à (x,y) donné le potentiel du à la rotation est constant donc le potentiel gravitationnel V en Q_1 et Q_2 doit être égal : $V_1 = V_2$. Or si Q_0 est de cote maximum tous les $dV_1 >$ tous les dV_2 donc $V_1 > V_2$. Ce qui est contradictoire, il n'y a donc pas de points Q_0 de cote maximale. La surface Σ est donc plane.

c)- Chaque barre de centre Q(x,y) crée en un point de cote z > 0 un $dg_z < 0$ donc le g_z global est négatif.

d)- La condition d'équilibre s'écrit pour tout point :

$$\mathbf{grad}\ p = \rho\mathbf{g} + \rho\Omega_{rot}^2(x\mathbf{u_x} + y\mathbf{u_y})$$

La surface de l'astre étant une isobare, **grad** p est perpendiculaire à la surface et dirigé vers l'intérieur.

e)- En sommant sur la surface fermée entourant le volume de l'astre on applique aux vecteurs **g** et $(x\mathbf{u_x} + y\mathbf{u_y})$ le théorème de Green avec div $\mathbf{g} = -4\pi\rho$ G et div $(x\mathbf{u_x} + y\mathbf{u_y}) = 2$. Le produit scalaire **grad p.d²S** devant être négatif, la vitesse angulaire maximum est $\Omega_{max} = \sqrt{2}\Omega_0 = (2\pi\rho G)^{1/2}$.

f)- Avec Ω_{max} correspondant à une période de l'ordre de 10^{-3}s, la masse volumique est de l'ordre de 10^{17}kgm^{-3}, bien supérieure à celle de la Terre. Le noyau d'hydrogène à une masse volumique de l'ordre de $1.6\ 10^{-27}$kg pour un volume $4\pi/3(10^{-15})^3$m^3 soit le même ordre de grandeur de densité.

IV – Modes de vibrations de la Terre

1. – **grad** $p + \rho\ \mathbf{g} = \mathbf{0}$ ou $p + \rho\ V(P) = cte$. A l'équilibre $V(P) = 2\pi\rho G(\ (x^2 + y^2 + z^2)/3 - R_T^2) = V_0$ à partir de I-5 ou III-2-a) et e). On en déduit :
$p_0(x,y,z) = P_{atm} - 2\pi\rho^2 G(\ (x^2 + y^2 + z^2)/3 - R_T^2/3)$.

2. Conservation du volume « inviscide ! », $4\pi a^2 b/3 = 4\pi R_T^3/3$ soit $a^2 b = R_T^3$ et au premier ordre en η : $a = R_T\ (1 + \eta/3)$ et $b = R_T\ (1 - 2\eta/3)$.

3. On exprime ξ en fonction de η : $\xi = (2\eta)^{1/2}$, alors $F(\eta) \cong 2/3 - 4\eta/15 + \ldots$, $G(\eta) \cong 16\eta/15 + \ldots$ puis $A_x = A_y = 2\pi\rho G/3 - 4\pi\rho G\eta/15 + \ldots$et $A_z = 2\pi\rho G/3 + 8\pi\rho G\eta/15 + \ldots$ alors $V(P) = V_0 - \eta\, 4\pi\rho G\,(x^2 + y^2 - 2z^2) + \ldots$ donc $V_1 = -\eta\, 4\pi\rho G\,(x^2 + y^2 - 2z^2)$.

4. $$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + ... = -\mathbf{grad}\, p_1 - \rho \mathbf{grad} V_1$$

5. $\mathbf{v_0}(r) = -\,\mathbf{grad}\,(p_{10} + \rho\, V_{10})\,/(i\rho\omega) = \mathbf{grad}\,\varphi_0$, d'où $p_{10} = -\,i\omega\rho\varphi_0 - \rho V_{10}$.

6. $\Delta\varphi_0 = 0$.

7. $a' = v_x(a, 0, 0) = (\partial\varphi_0/\partial x)_a\, e^{i\omega t}$ c'est à dire $a' = 2\alpha_0 a\, e^{i\omega t}$ soit d'après 2. $R_T\eta'/3 = 2\alpha_0 R_T\, e^{i\omega t} + \ldots$ et $\eta = 6\alpha_0\, e^{i\omega t}/i\omega$.

8. $p_1 = -\,i\omega\rho\varphi_0 e^{i\omega t} - \rho\{-\eta\, 4\pi\rho G\,(x^2 + y^2 - 2z^2)\} = \eta(t)\rho[\omega^2/6 + 4\pi\rho G/15]\,(x^2 + y^2 - 2z^2)$, et $p(x,y,z,t) = P_{atm} - 2\pi\rho^2 G(\,(x^2 + y^2 + z^2)/3 - R_T^2/3) + p_1$. A la surface d'équation $x^2/a(t)^2 + y^2/a(t)^2 + z^2/b(t)^2 = 1$. En substituant dans p l'expression de $x^2 + y^2$ en fonction de z^2, a et b, puis en remplaçant a et b par leur valeurs en fonction de R_T et de η au premier ordre en η, on aboutit à une expression : $p(x,y,z,t)_{surface} = P_{atm} + \eta\rho\,[\,(\ldots) + z^2(\ldots)] + \ldots = p(z_{surface},t)$ au premier ordre en η. La surface doit être isobare et l'annulation du terme en z^2 fournit la pulsation de vibration demandée, on remarque alors que, au premier ordre en η, la pression à la surface n'est plus P_{atm} ??

9. La relation de dispersion de la houle est $\omega = (kg_0)^{1/2}$ avec $g_0 = M_T G/R_T^2$ on obtient une pulsation du même ordre de grandeur avec une longueur d'onde de l'ordre du rayon terrestre.

10. L'application numérique fournit une pulsation de $1.1\ 10^{-3}$ rad/s soit une période T = 5700 s environ à comparer à une période d'environ 3100 s sur le spectre.
