

ESIM 1998 MP

PHYSIQUE I

ETUDE DE TRAJECTOIRES ELECTRONIQUES DANS DIVERS CHAMPS ELECTROSTATIQUES

I.1) * Entre G_1 et G'_1 : le potentiel électrostatique est uniforme, le champ électrostatique est donc nul ; la trajectoire de l'électron est donc une droite (parcourue à vitesse constante)

* il en est de même entre G_2 et G'_2

* entre G'_1 et G_2 : $V = V(z)$ et $\Delta V = 0$; donc : $V(z) = a.z + b$ (où : $a, b = \text{constantes}$) ; donc : ; la trajectoire de l'électron est donc une parabole

I.2) La seule force à laquelle est soumise l'électron est la force électrostatique (le poids étant négligé), qui dérive de l'énergie potentielle $E_{\text{pot}} = -e.V$; la conservation de l'énergie mécanique $E_{\text{méca}} = E_c + E_{\text{pot}}$ conduit donc à :

donc : (1)

la projection du principe fondamental de la dynamique orthogonalement à Oz, donc au champ électrostatique, conduit à la conservation de la composante de la quantité de mouvement orthogonale à Oz : (2)

par report de (1) dans (2), on obtient : (3)

$$\theta_{10} = \text{Arcsin} \left(\sqrt{\frac{V_2}{V_1}} \right)$$

I.3) L'électron est réfléchi au niveau de la grille G'_2 si : $\theta_2 = \pi/2$; alors, d'après (3) :

AN : $\theta_{10} = 53^\circ$

I.4) Analogie avec l'optique : réfraction à travers un dioptré plan, réflexion totale

II.1) Potentiel créé en M_0 , de cote z sur l'axe OZ, par l'électrode i :

$$V_i(M_0) = \iint_{Z_i \in [\sqrt{R_i^2 + (h_{i1}-z)^2}, \sqrt{R_i^2 + (h_{i2}-z)^2}]} \frac{\sigma_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_i d\theta_i dZ_i}{\sqrt{R_i^2 + Z_i^2}} = \frac{\sigma_i R_i}{2\epsilon_0} \left[\ln \left((h_i - z) + \left(\sqrt{R_i^2 + (h_i - z_i)^2} \right) \right) \right]_{h_{i1}}^{h_{i2}}$$

$$V_i(M_0) = \frac{\sigma_i R_i}{2\epsilon_0} \ln \left(\frac{(h_{i1} - z) + \left(\sqrt{R_i^2 + (h_{i1} - z_i)^2} \right)}{(h_{i1} - z) + \left(\sqrt{R_i^2 + (h_{i2} - z_i)^2} \right)} \right)$$

donc :

et pour les N électrodes :

$$V(M_0) = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i R_i}{2\epsilon_0} \ln \left(\frac{(h_{i1} - z) + \left(\sqrt{R_i^2 + (h_{i1} - z_i)^2} \right)}{(h_{i1} - z) + \left(\sqrt{R_i^2 + (h_{i2} - z_i)^2} \right)} \right) \quad (4)$$

II.2) * Le plan méridien (P) contenant M, Or, Oz est un plan de symétrie pour la distribution de charge, donc le champ électrostatique appartient à ce plan (P) : $\vec{E}(M) = E_r \vec{u}_r + E_z \vec{u}_z$

* le plan (P') contenant M, Oz et orthogonal à Or est plan de symétrie pour la distribution de charge, donc : si M' est le symétrique de M par rapport à (P'), alors : $\vec{E}(M')$ est symétrique de $\vec{E}(M)$ par rapport à (P'), ce qui implique : $E_z(M') = E_z(M)$, c'est-à-dire que la fonction $E_z(r, z)$ est paire par rapport à r ; donc : $E_z(r, z) = E_z(r=0, z) + 0.r + A.r^2$, c'est-à-dire que, pour r petit ou encore M proche de l'axe Oz, à un infiniment petit d'ordre 2 en r près : $E_z(r, z) = E_z(r=0, z)$.

II.3) L'application du théorème de Gauss à un cylindre d'axe Oz, ce surfaces de base de cotes z et z + dz, de rayon r, conduit à :

$$[E_z(0, z + dz) - E_z(0, z)] \pi r^2 + E_r(r, z) 2\pi r dz = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0$$

donc :
$$\frac{\partial E_z(0, z)}{\partial z} \pi r^2 dz + E_r(r, z) 2\pi r dz = 0$$

d'où :
$$E_r(r, z) = -\frac{r}{2} \cdot \frac{\partial E_z(0, z)}{\partial z} \quad (5)$$

II.4)
$$E_z(0, z) = -\frac{dV(z)}{dz}$$

donc :
$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r, z) = E_r(r, z) \vec{u}_r + E_z(r, z) \vec{u}_z \approx E_r(r, z) \vec{u}_r + E_z(0, z) \vec{u}_z = -\frac{r}{2} \cdot \frac{d^2 V(z)}{dz^2} \vec{u}_r - \frac{dV(z)}{dz} \vec{u}_z \quad (6)$$

III.1) La conservation de l'énergie mécanique pour un électron conduit à :

$$0 + 0 = -e \cdot V(M) + \frac{1}{2} m v^2$$

mais, compte tenu de l'approximation de Gauss :

* les électrons restent voisins de l'axe, donc : $V(M) \approx V(z)$

* les électrons ont une trajectoire peu inclinée par rapport à l'axe Oz, donc :

donc :
$$\frac{dz}{dt} \approx \sqrt{\frac{2e}{m} V(z)} \quad (7)$$

III.2) L'électron n'ayant pas de vitesse initiale et n'étant soumis qu'à la seule force électrostatique, contenue, comme le champ électrostatique, dans le plan méridien (Or, Oz), le principe fondamental de la dynamique

$$-e(E_r \vec{u}_r + E_z \vec{u}_z) = m \left(\ddot{z} \vec{u}_z + \ddot{r} \vec{u}_r \right)$$

s'écrit :

d'où, par projection :

$$-eE_z = m \frac{d^2 z}{dt^2} \Rightarrow -e \left(-\frac{dV}{dz} \right) = m \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (\text{PFD1})$$

$$-eE_r = m \frac{d^2 r}{dt^2} \Rightarrow -e \left(-\frac{r}{2} \left(-\frac{d^2 V}{dz^2} \right) \right) = m \frac{d^2 r}{dt^2} \quad (\text{PFD2})$$

or :

$$r = r(z)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \right) = \frac{dr}{dz} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dz} \right) \cdot \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{dr}{dz} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{d^2 r}{dz^2} \cdot \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

alors, en utilisant les équations fournies par le principe fondamental de la dynamique et la conservation de l'énergie mécanique de l'électron, on obtient :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \left(\frac{dr}{dz} \right) \left(\frac{e}{m} \cdot \frac{dV(z)}{dz} \right) + \left(\frac{d^2 r}{dz^2} \right) \left(\frac{2e}{m} \cdot V(z) \right)$$

$$\text{et : } -\frac{e}{m} \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{d^2 V(z)}{dz^2} = \frac{dr}{dz} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{dV(z)}{dz} + \frac{d^2 r}{dz^2} \cdot \frac{2e}{m} \cdot V(z)$$

d'où, finalement, après simplifications, l'équation demandée :

(E)

III.3) Les caractéristiques de l'électron ne figurant pas dans l'équation (E) obtenue, cette équation resterait valable pour toute particule chargée

III.4) Par report de : $V(z) = V_0 \cdot \exp(kz)$ dans (E), on obtient l'équation différentielle de la trajectoire de l'électron : (E')

les racines de l'équation caractéristique de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2, homogène, à coefficients

$$x_{\pm} = \frac{k}{4} \cdot (-1 \pm i\sqrt{3})$$

constants (E') sont :

$$r = \exp\left(-\frac{1}{4} kz\right) \cdot \left(A \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4} kz\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4} kz\right) \right)$$

d'où la solution générale de (E') :

$$r(z=0) = a$$

$$\vec{v} \perp \text{cathode} \Rightarrow \left(\frac{dr}{dz} \right)_{z=0} = 0$$

les conditions initiales :

conduisent à :

$$r = a \cdot \exp\left(-\frac{1}{4}kz\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}kz\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}kz\right) \right) \quad (S)$$

$$\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{4}kz\right) = -\sqrt{3}, \text{ c'est-à-dire :}$$

III.5) les points de focalisation sur l'axe correspondent aux racines z de :

$$z = \frac{4}{\sqrt{3}k} \left(-\frac{\pi}{3} + q\pi \right) \quad (q \text{ entier})$$

la distance entre deux points de focalisation successifs est :

allure de la trajectoire : voir courbe jointe (tracée à l'aide de Maple)

III.6) On pourrait éventuellement modéliser ainsi un dispositif de focalisation d'un faisceau d'électrons dans un canon à électrons

IV.1) On peut immerger le dispositif dans une cuve électrolytique et déterminer la répartition du potentiel électrostatique dans le liquide à l'aide d'une sonde

IV.2) la conservation de l'énergie mécanique de l'électron entre la cathode et l'équipotentielle V_1 conduit à :

IV.3) si $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont les deux premiers vecteurs unitaires du trièdre de Frenet, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

(PFD)

or : le champ électrostatique est orthogonal à l'équipotentielle $V = V_1$; on lit alors sur la figure 3 qu'il fait avec chacun des deux premiers vecteurs de la base de Frenet l'angle $\pi/4$ (en valeur absolue). On déduit alors de (PFD), par projection sur le vecteur normal :

$$m \frac{v_1^2}{R_1} = e \|\vec{E}(M_1)\| \cdot \cos \frac{\pi}{4} = e \|\vec{E}(M_1)\| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

on obtient le champ électrostatique, de façon approchée, en divisant l'écart $V_2 - V_1$ par la distance (normale) entre M_1 et l'équipotentielle V_2 , c'est-à-dire par $M_1 N_2 \cdot \cos(\pi/4)$:

$$\|\vec{E}(M_1)\| \approx \frac{V_2 - V_1}{M_1 N_2 \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{V_2 - V_1}{M_1 N_2 \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

donc :

$$R_1 = \left(\frac{mv_1^2}{e(V_2 - V_1)} \right) M_1 N_2$$

donc :

d'où :

$$\alpha_1 = \frac{mv_1^2}{e(V_2 - V_1)} = \frac{2V_1}{V_2 - V_1}$$

$$\alpha_i = \frac{mv_i^2}{e(V_{i+1} - V_i)} = \frac{2V_i}{V_{i+1} - V_i}$$

IV.4) l'étude précédente se généralise immédiatement et conduit à :
avec les équipotentielles choisies, on obtient numériquement :

IV.5) La méthode a l'avantage d'être très simple et l'inconvénient d'être peu précise ! Pour améliorer la précision du tracé, on pourrait tracer davantage d'équipotentiellles

