موضوع الاختبار رقم 12 لتحضير امتحان شهادة البكالوريا
شعبة تقني رياضي

التمرين الأول (5 نقط)

نعتبر المتتاليتين العدديتين (U_n) و (V_n) حيث $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $V_n = n\frac{p}{3}$.

نسمي M_n النقطة التي لاحقتها z_n حيث $z_n = U_n e^{iV_n}$.

1) عيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها $z_n \in \mathbb{R}$.

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : **4cm**).

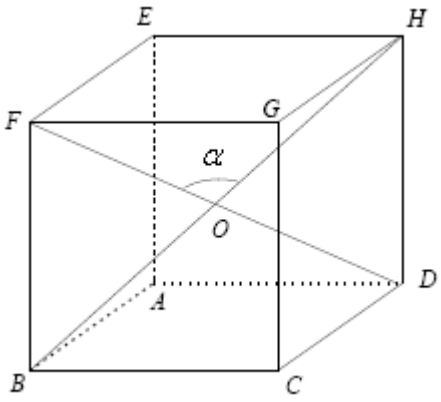
عيّن لواحق النقط M_0, M_1, M_2, M_3 و M_4.

3) احسب أطوال أضلاع المثلث OM_nM_{n+1} بدلالة U_n . ما هي طبيعة هذا المثلث.

4)نعتبر المتتالية (a_n) المعرفة بـ: $a_n = |z_{n+1} - z_n|$.بيّن أن (a_n) متتالية هندسية، عيّن حدها الأول و أساسها. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)$

التمرين الثاني (5 نقط)

ABCDEFGH مكعب مركزه ***O*** و طول حرفه 1 .



نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $(A;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$

1) احسب ***FD*** و ***BH*** .

2) احسب قيمة مقربة للزاوية $\alpha = HOF$.

3) برهن أن المستقيم ***(FD)*** يعامد المستوي ***(EGB)***

4) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي ***(EGB)*** .

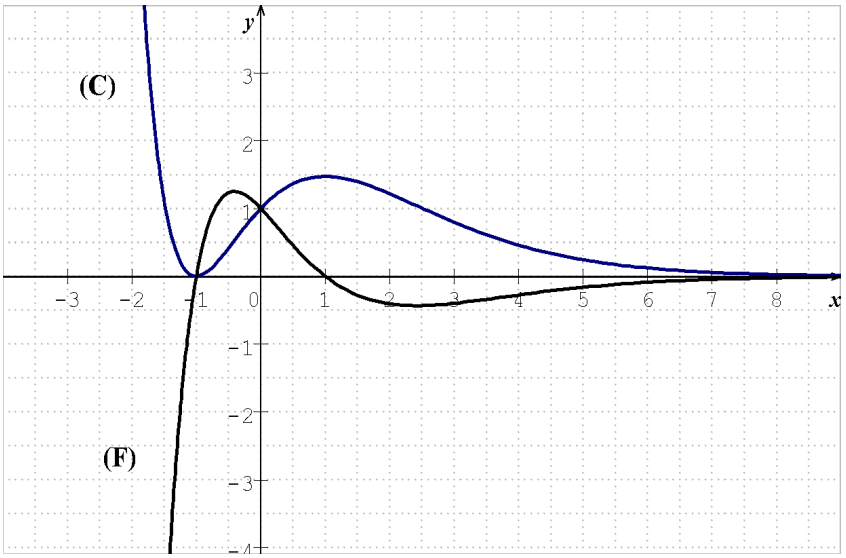
5) احسب المسافة بين النقطة **O** و المستوي ***(EGB)***

التمرين الثالث (10 نقط)

<u>الجزء الأول</u> : قراءة بيانية : ليكن في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ، المنحنيين (C) و (F) الممثلين لدالتين معرفتين و قابلتين للاشتقاق على R .

نعلم أن إحدى هاتين الداتين هي مشتقة الدالة الأخرى . نرمز بـ g و g′ لهاتين الدالتين .

اعتمادا على الشكل أدناه ، الذي يعطي التمثيلين البيانيين للدالتين g و g′ ، أجب على السؤالين التاليين :



1) أرفق بكل من الدالتين g و g′ تمثيلها البياني .
برر الإجابة بتشكيل جدول يتضمن ، على المجال [− 5 ; 5] ، إشارة g′(x) و تغيرات g
2) ما هو معامل توجيه المماس للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 ؟

<u>الجزء الثاني :</u> حل معادلة تفاضلية : نعتبر المعادلتين التفاضليتين :

E) ..... $y' + y = 2(x + 1)\,e^{-x}$ و E′) ..... $y' + y = 0$.

الهدف من هذا الجزء هو حل المعادلة (E) و تعيين حلول خاصة لها .

1) بين أن الدالة φ المعرفة على R بـ $\varphi(x) = (x^2 + 2x)\,e^{-x}$ هي حل للمعادلة (E) .
2) حل المعادلة (E′) .
3) بين أن : تكون الدالة u حلا للمعادلة (E′) إذا و فقط إذا كانت الدالة: u + φ حلا للمعادلة (E) .
4) استنتج عبارة الحلول f للمعادلة (E) .
5) علما أن الدالة g الواردة في الجزء A حل للمعادلة (E) ، عين g(x) من أجل $x \in R$.
6) عين الحل h للمعادلة (E) التي تمثيلها البياني يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا أفقيا .

<u>الجزء الثالث :</u> دراسة دالة و حل مقرب لمعادلة

لتكن f الدالة المعرفة على R بـ $f(x) = (x^2 + 2x + 2)\,e^{-x}$

نرمز بـ (Γ) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O ;,).

وحدة الرسم2 cm .

1) عين نهايتي الدالة f عند + ∞ و عند - ∞ .
2) عين الدالة المشتقة f′ للدالة f و إشارتها .
3) شكل جدول تغيرات الدالة f .
4) عين معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة Ω ذات الفاصلة (-1) .
5) أرسم المماس لـ (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0 ، (T) ثم (Γ) .
6) بين أن المعادلة f(x) = x تقبل ، على R ، حلا وحيدا α .
أوجد النتيجة بيانيا و أعط قيمة مقربة إلى 0.1 للعدد α .

تصحيح موضوع الاختبار رقم 12 لتحضير امتحان شهادة البكالوريا
شعبة تقني رياضي

حل التمرين الأول (5 نقط)

من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $V_n = n\frac{p}{3}$ و

$$z_n = U_n e^{iV_n} = U_n(\cos V_n + i\sin V_n)$$

أي $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\cos\frac{np}{3} + i\sin\frac{np}{3}\right)$.

1) $z_n \in \mathbb{R}$ إذا و فقط إذا كان $\sin\frac{np}{3} = 0$ أي $\frac{np}{3} = kp$ أي $n = 3k$ و $k \in \mathbb{Z}$

إذن $z_n \in \mathbb{R}$ يكافئ n مضاعف 3.

2) لاحقة M_0 هي $z_0 = 1$.

لاحقة M_1 هي $z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{p}{3} + i\sin\frac{p}{3}\right) = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

لاحقة M_2 هي $z_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\cos\frac{2p}{3} + i\sin\frac{2p}{3}\right) = -\frac{1}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8}$.

لاحقة M_3 هي $z_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3(\cos p + i\sin p) = -\frac{1}{8}$

لاحقة M_4 هي $z_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\cos\frac{4p}{3} + i\sin\frac{4p}{3}\right) = -\frac{1}{32} + i\frac{\sqrt{3}}{32}$.

3)

- $OM_n = |z_n| = u_n$ و $OM_{n+1} = |z_{n+1}| = U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n$
- $M_nM_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|U_{n+1}e^{iV_{n+1}} - U_n e^{iV_n}\right|$

$M_nM_{n+1} = \left|\frac{1}{2}U_n e^{i\left(V_n + \frac{p}{3}\right)} - U_n e^{iV_n}\right|$ مع $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n$ و $V_{n+1} = V_n + \frac{p}{3}$ إذن

$$M_nM_{n+1} = \left| U_n\, e^{iV_n} \left(\frac{1}{2} e^{i\frac{p}{3}} - 1 \right) \right| = U_n \times \left| e^{iV_n} \right| \times \left| \frac{1}{2} e^{i\frac{p}{3}} - 1 \right|$$

$$M_nM_{n+1} = U_n \left| \frac{1}{2} e^{i\frac{p}{3}} - 1 \right| \quad \text{لأن} \quad \left| e^{iV_n} \right| = 1$$

$$\frac{1}{2} e^{i\frac{p}{3}} - 1 = \frac{1}{2} \left(\cos\frac{p}{3} + i \sin\frac{p}{3} \right) - 1 = -\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{بما أن}$$

$$M_nM_{n+1} = U_n \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{أي} \quad M_nM_{n+1} = U_n \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{3}{16}} \quad \text{فإن}$$

- نلاحظ أن $OM_n^2 = OM_{n+1}^2 + M_nM_{n+1}^2$، إذن OM_nM_{n+1} مثلث قائم في M_{n+1}.

4) من أجل كل عدد طبيعي n، $a_n = |z_{n+1} - z_n|$.

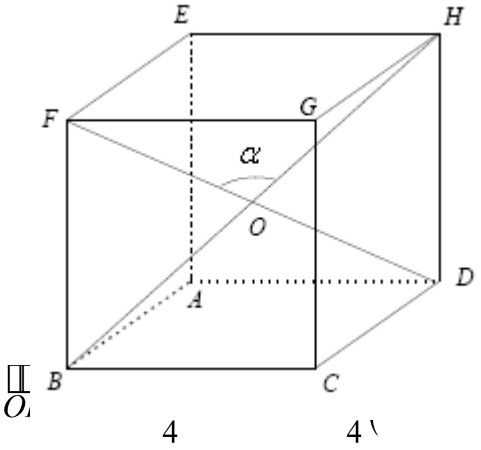
$a_n = M_nM_{n+1}$ إذن $a_n = U_n \frac{\sqrt{3}}{2}$.

بما أن : $a_n = \frac{1}{2} a_n$ ، $U_{n+1} = U_n \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$ فإن (a_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

و حدها الأول $a_0 = U_0 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

الأساس $\frac{1}{2}$ ينتمي إلى $]-1;1[$ إذن $\lim_{n \to +\infty} (a_n) = 0$.

حل التمرين الثاني (5 نقط)



1) المثلث BCD قائم في C : نجد $= \sqrt{2}$
باستعمال مبرهنة فيتاغورس.

المثلث FBD قائم في B : نجد $FD = \sqrt{3}$
باستعمال مبرهنة فيتاغورس.

نجد بنفس الكيفية أن $BH = \sqrt{3}$.

2) نحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OH}$ بطريق

$\left(\overrightarrow{\quad} \right) \cdot \overrightarrow{BH} = \frac{1}{4} \left(\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BH} \right)$ ●

$\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OH} = \frac{1}{4} \left(-DB^2 + BF^2 \right) = -\frac{1}{4}$

.

- $\overrightarrow{OF} \bullet \overrightarrow{OH} = OF \times OH \times \cos\alpha = \frac{3}{4}\cos\alpha$.

نستنتج أن $\frac{3}{4}\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ أي $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ و الحاسبة تعطينا $\alpha \approx 109^\circ$.

3) نبيّن أن $\overrightarrow{FD}$ يعامد شعاعين من المستوي (EGB) :

- نبيّن أن $\overrightarrow{FD}$ يعامد $\overrightarrow{GE}$:

إذن $\overrightarrow{FD} \bullet \overrightarrow{GE} = \left(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HD}\right) \bullet \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{FG} \bullet \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GH} \bullet \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{HD} \bullet \overrightarrow{GE}$

$\overrightarrow{FD} \bullet \overrightarrow{GE} = -FG^2 + GH^2 + 0 = 0$.

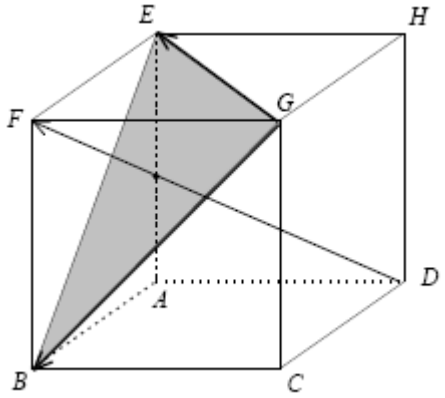
- نحسب بنفس الكيفية $\overrightarrow{FD} \bullet \overrightarrow{GB}$ و نجد $\overrightarrow{FD} \bullet \overrightarrow{GB} = 0$.

نستنتج أن المستقيم (FD) يعامد المستوي (EGB) .

4) $\overrightarrow{FD}(-1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (EGB) **إذن** (EGB) يقبل معادلة ديكارتية من الشكل $-x + y - z + d = 0$. بمأن النقطة $B(1;0;0)$ تنتمي إلى المستوي (EGB) فإن $d = 1$.

نستنتج أن $-x + y - z + 1 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (EGB) .

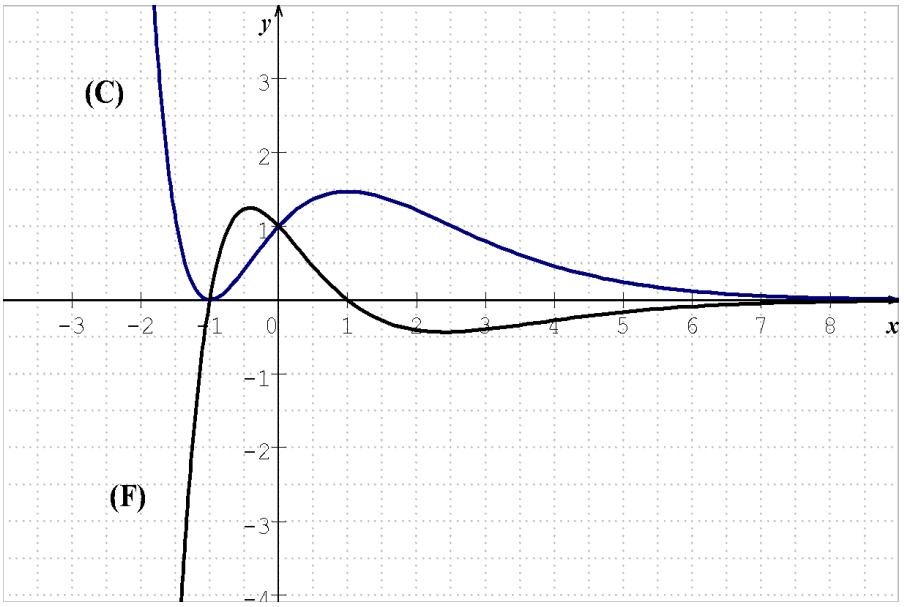
5) المسافة بين النقطة $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ و المستوي (EGB) هي : $\frac{\left|-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$



حل التمرين الثالث (10 نقط)

1) الجزء A : قراءة بيانية إرفاق بكل من الدالتين g و g′ تمثيلها البياني :

من الشكل ، يظهر أن (C) هو التمثيل البياني للدالة g و (F) هو التمثيل البياني للدالة g′ .



تبرير الإجابة :

x	$-\infty$	0.25	1.5	-	1	-	1	5	$+\infty$
g		0		-	0	+		-	
g(x)		1^+			0		1.5		

2) إيجاد معامل توجيه المماس للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

معامل توجيه المماس للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 هو 1 لأن $g'(0) = 1$ (من الشكل)

الجزء B : حل معادلة تفاضلية

نعتبر المعادلتين التفاضليتين : (E) ..... $y' + y = 2(x + 1) e^{-x}$ و (E′) ..... $y' + y = 0$

1) نبين أن الدالة φ المعرفة على IR بـ $\varphi(x) = (x^2 + 2x) e^{-x}$ هي حل للمعادلة (E) :

الدالة φ قابلة للاشتقاق على IR لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق هما : $x \longrightarrow x^2 + 2x$

و $x \longrightarrow e^{-x}$ ، و لدينا : $(\varphi'(x) = (2x + 2) e^{-x} - e^{-x} (x^2 + 2x) = e^{-x} (2 - x^2)$

و منه : $\varphi'(x) + \varphi(x) = e^{-x} (2 - x^2 + x^2 + 2x) = e^{-x} (2 + 2x) = 2(x + 1) e^{-x}$

أي الدالة φ حل للمعادلة التفاضلية (E) .

2) حل المعادلة (E′) :

المعادلة (E′) من الشكل $y' = a y + b$ حيث $a = -1$ و $b = 0$ ، و بالتالي حلول (E′) من الشكل : $y = C e^{-x}$ حيث C ثابت حقيقي اختياري .

3) نبين أن : تكون الدالة u حلا للمعادلة (E′) اذا و فقط اذا كانت الدالة $\varphi + u$ حلا للمعادلة (E)

- نفرض أن الدالة u حل للمعادلة التفاضلية (E′) ، و نبرهن أن الدالة $\varphi + u$ حل للمعادلة (E)

الدالة u حل للمعادلة التفاضلية (E′) معناه : $u'(x) + u(x) = 0$.

لدينا :

$(\varphi + u)'(x) + (\varphi + u)(x) = \varphi'(x) + u'(x) + \varphi(x) + u(x) = (\varphi' + \varphi)(x) + (u' + u)(x)$

$= 2(x + 1) e^{-x}) = (\varphi' + \varphi)(x)$.

- نفرض أن الدالة $u + \varphi$ حل للمعادلة (E) ، و نبرهن أن الدالة u حل للمعادلة التفاضلية (E′)

الدالة $u + \varphi$ حل للمعادلة (E) معناه : $(\varphi + u)(x)2 + (\varphi + u)'(x) = (x + 1)\, e^{-x}$

أي : $(\varphi'+ \varphi) (x) + (u'+ u) (x) = 2(x + 1)\, e^{-x}$ و بالتالي : $u'+ u) (x) = 0$

لأن : $(\varphi'+ \varphi) (x)2 = (x + 1)\, e^{-x}$. و منه المطلوب .

4) <u>استنتاج عبارة الحلول f للمعادلة (E) :</u>

حسب التكافؤ السابق ، و بما أن الدوال : $x \longrightarrow C\, e^{-x}$ حلول المعادلة (E′)

فان حلول المعادلة (E)هي الدوال $f : x \longrightarrow (x^2 + 2x)\, e^{-x} + C\, e^{-x}$

أي : $e^{-x} f : x \longrightarrow (x^2 + 2x + C) \;/\; C \in R$.

<u>5) علما أن الدالة g الواردة في الجزء A حل للمعادلة (E) ، نعين g(x) من أجل $x \in R$:</u>

يظهر من الشكل المعطى ، أن : $g(0) = 1$ و منه بالتعويض في عبارة f ، نجد : $C = 1$.

أي من أجل كل x من IR ، $g(x) = (x^2 + 2x + 1)\, e^{-x}$.

<u>6) تعيين الحل h للمعادلة (E) التي تمثيلها البياني يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا أفقيا :</u>

لدينا من أجل كل x من IR ، $f(x) = (x^2 + 2x + C)\, e^{-x}$ حل للمعادلة التفاضلية (E) ، و الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ، و : $(f'(x) = (2x + 2)\, e^{-x} - e^{-x}(x^2 + 2x + C) = e^{-x}(2 - C - x^2)$

التمثيل البياني للدالة f يقبل مماسا أفقيا عند النقطة ذات الفاصلة 0 معناه : $f'(0) = 0$

أي : $C = 2$ و منه الحل h للمعادلة التفاضلية (E) هو : $h : x \longrightarrow (x^2 + 2x + 2)\, e^{-x}$.

<u>الجزء C : دراسة دالة و حل مقرب لمعادلة</u>

لتكن f الدالة المعرفة على IR بـ $f(x) = (x^2 + 2x + 2)\, e^{-x}$. نرمز بـ (Γ) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس (O ;,) . وحدة الرسم 2 cm .

<u>7) تعيين نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$:</u>

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty = \infty$

$0 =$

$+\infty = \infty$

$0 = \infty = \infty$

$+\infty = \infty$

<u>8) تعيين الدالة المشتقة f′ للدالة f و إشارتها ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f :</u>

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR لأنها جداء دالة كثير حدود و الدالة : $x \longrightarrow e^{-x}$ القابلتين للاشتقاق على R ، ودالتها المشتقة f′ تحقق : $f'(x) = (x^2\, e^{-x}$.

الدالة f متناقصة تماما على IR لأنه من أ جل كل x من $f'(x) \leq 0$ ، R .

و منه جدول تغيرات الدالة f

تعيين معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة Ω ذات الفاصلة (-1) :

$(T) : y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$ مع $f'(-1) = -e$ و $f(-1) = e$

اذا : $(T) : y = -e x$.

9) رسم المماس لـ (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0 ، (T) ثم (Γ)

لاحظ أن المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0 يكون أفقيا . و بالتالي هذا المماس يخترق المنحنى (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0 فهي بذلك نقطة انعطاف للمنحنى .

10) نبين أن المعادلة : $f(x) = x$ تقبل ، على R ، حلا وحيدا α :

الدالة $v : x \longrightarrow f(x) - x$ قابلة للاشتقاق على R وبالتالي مستمرة عليه و لدينا :

$v'(x) = f'(x) - 1$. من أجل كل x من R ، $v'(x) < 0$ لأن $f'(x) < 0$ و بالتالي الدالة v متناقصة تماما على R و $v(]-\infty;+\infty[) =]-1;+\infty[$. و : $0 \ni]-1;+\infty[$ و منه المعادلة :

$v(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على R أي أن المعادلة : $f(x) = x$ تقبل نفس الحل الوحيد .

إيجاد النتيجة بيانيا و إعطاء قيمة مقربة إلى 0.1 للعدد α :

نرسم في المعلم السابق المنصف الأول) المستقيم ذو المعادلة $y = x$) ، فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (Γ) مع المنصف الأول هي العدد α . بقراءة بيانية نجد : $\alpha \approx 1.6$