

E ora la dimostrazione

L'ipotesi è che per ogni intero N , per ogni coppia di interi (A,B) primi tra loro tali per cui $A+B=N$, esiste uno step per cui A e B sono vicini; se A e B non sono primi tra loro, i due numeri non possono mai essere vicini tra loro a nessuno step.

Dimostro la prima parte per induzione. Supponiamo che la prima ipotesi sia valida per ogni $n \leq N$ e dimostriamo che allora vale anche per $n=N+1$. Siano A e B due numeri primi tra loro tali per cui $A+B=N+1$ e sia $A>B$; definisco $A'=A-B$. A' e B sono anch'essi primi tra loro e $A'+B = A = N+1-B \leq N$. Per definizione esiste quindi uno step in cui A' e B sono vicini: allo step successivo introduco tra A' e B la loro somma, ovvero A . Al secondo step successivo, tra A e B inserisco la loro somma, ovvero $N+1$. Dal momento che l'ipotesi è facilmente verificabile per $N=3$, essa vale per ogni N .

Dimostriamo ora che due numeri aventi un divisore comune non possono mai apparire vicini a nessuno step.

- Per prima cosa dimostriamo che due numeri uguali non possono mai apparire vicini tra loro: supponiamo per assurdo che ad un certo step venga a formarsi una sequenza di numeri del tipo $X A A Y$. Solo una delle due A può essere stata introdotta all'ultimo step: questo vuol dire che o $X+A=A$ o che $A+Y=A$. In entrambi i casi si avrebbe uno step in cui compare uno zero all'interno della sequenza, cosa impossibile.

- Dimostriamo ora che due numeri, uno multiplo dell'altro, non possono trovarsi vicini; di nuovo, supponiamo per assurdo che ad un certo punto venga a crearsi una sequenza del tipo $X A nA Y$. nA è l'ultimo numero ad essere stato aggiunto, altrimenti avremmo che $X+nA=A$, cosa assurda; allo step precedente, quindi, vicino ad A si trovava il numero $(n-1)A$. Risalendo di $n-1$ step ci ritroveremmo nella condizione in cui due numeri uguali si trovano vicini tra loro, cosa che abbiamo già dimostrato essere impossibile.

- Dimostriamo infine che due numeri aventi un divisore comune non possono trovarsi vicini tra loro a nessuno step. Supponiamo per assurdo che ad un certo punto vengano a trovarsi vicini tra di loro due numeri X e Y aventi un divisore comune A , e che Y sia maggiore di X ; per le ragioni riportate prima, Y è il numero aggiunto nell'ultimo step. Siccome A è divisore comune, posso scrivere $X=nA$ e $Y=mA$, con $m>n$; allo step precedente vicino a X si trovava un numero $Y'=(m-n)A$. Poichè $m>n$, esistono $i \geq 0$ e $n' \geq m' \geq 0$ tali per cui $m=n'+m'$: vuol dire che risalendo di i step troverò vicino a X un numero $Y'=m'A$ con $n' \geq m'$. Continuando il procedimento, questa volta su X , trovo un numero $j \geq 0$ e un numero n'' tale per cui $m' \geq n'' \geq 0$ e $n=jm'+n''$; risalendo di j step avrò vicino a Y' un numero $X'=n''A$. Posso continuare questo procedimento a piacere ottenendo una successione del tipo $m \geq n \geq m' \geq n' \geq m'' \geq n'' \geq \dots \geq 0$. La successione termina quando uno dei due numeri è 0, e quindi mi trovo con due numeri uguali, oppure 0, ovvero i due numeri sono uno multiplo dell'altro: entrambe le situazioni sono già state dimostrate impossibili.

Questo vuol dire che durante le successioni di step compaiono TUTTE e SOLE le coppie di numeri primi fra loro; di conseguenza, dato un numero N , esso comparirà un numero di volte pari al numero di coppie ordinate di numeri (A,B) , primi fra loro, tali per cui $A+B=N$.

CVD