

ENSAE 98 (élèves statisticiens)

Dans tout le problème a et b désignent deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de $[a ; b]$ dans $[a ; b]$, de classe $\mathcal{C}^1$.

Question Préliminaire:

Justifier l'existence de $\sup_{y \in [a ; b]} |f'(y)|$ que l'on notera K dans la suite du problème, et montrer que :

$$\forall (x, x') \in [a ; b]^2, |f(x) - f(x')| \leq K |x - x'|.$$

(On invoquera de façon précise les théorèmes du cours utilisés)

On supposera dans toute la suite du problème que $K < 1$.

Première Partie: Théorème du Point Fixe.

1) Montrer qu'il existe un et un seul $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$ et que l'itération définie par :

$x_0 \in [a, b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers c .

2) On définit l'erreur à la $n^{\text{ième}}$ itération par : $e_n = x_n - c$. Montrer que: $|e_n| \leq |x_1 - x_0|$.

Seconde Partie: Procédure Diagonale d'Aitken.

On suppose **dans toute la suite du problème** que : $\forall x \in [a ; b], |f'(x)| > 0$.

1) Montrer que, si $e_0 \neq 0$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, e_n \neq 0$. Que peut-on dire si $e_0 = 0$?

On supposera, dans la suite de cette partie, que $e_0 \neq 0$.

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - x_n \neq 0$.

3) Montrer que $\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}}$ tend vers $f'(c)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4) Pour tout entier n , on pose: $x'_n = x_n -$

Justifier l'existence de x'_n et montrer que : $x'_n \in [a, b]$.

Commenter ce résultat.

Troisième Partie: Méthode de Steffenson.

Dans cette partie, g est une fonction de $[a ; +\infty[$ dans $[a ; +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que g' est croissante et strictement négative. On notera: $N(x) = g(g(x)) - 2g(x) + x$.

1) Montrer qu'il existe un et un seul $d \in [a ; +\infty[$ tel que $g(d) = d$.

2) Montrer qu'il existe y_1 et y_2 dans $[a ; +\infty[$ tels que :

$$g(x) - x = (g'(y_1) - 1)(x - d) \text{ et}$$

$$N(x) = [(g'(y_1) - 1)^2 + (g'(y_2) - g'(y_1))g'(y_1)](x - d)$$

3) Montrer que $N(x) = 0$ ssi $x = d$.

$$G(x) = \begin{cases} x - \frac{(g(x) - x)^2}{N(x)} & \text{si } x \neq d \\ d & \text{si } x = d \end{cases}$$

4) On pose, pour $x \in [a ; +\infty[$, $G(x) =$.
Montrer que G est une fonction continue de $[a ; +\infty[$ dans $[a ; +\infty[$.

5) On définit la suite (x''_n) par : $x''_0 \in [a ; +\infty[$ et $x''_{n+1} = G(x''_n)$.

Montrer que cette suite converge vers d .

Quatrième Partie: Application.

On cherche à estimer numériquement la solution de l'équation $\exp(-x) = x$.

Montrer que l'on peut mettre en œuvre les trois algorithmes étudiés dans le problème.

En prenant $x_0 = x''_0 = 0,5$, calculer la solution de l'équation à 10^{-6} près.

Donner le nombre d'itérations nécessaires permettant de parvenir à la précision souhaitée pour chacun des algorithmes.

Corrigé :

Question préliminaire :

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ donc f' est continue sur $[a, b]$. Or toute fonction continue sur un segment y est bornée et atteint ses bornes. Donc $\sup_{y \in [a, b]} |f'(y)| = K$ existe.

De plus, f est dérivable sur $[a, b]$ et $\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq K$; d'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc : $\forall (x, x') \in [a, b]^2, |f(x) - f(x')| \leq K |x - x'|$.

Partie I :

1) Posons $k(x) = f(x) - x$; comme f est dérivable sur $[a, b]$, k est dérivable sur $[a, b]$, et $k'(x) = f'(x) - 1$.

Or, $\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq K < 1$, donc $f'(x) < 1$ donc $k'(x) < 0$.

k est donc une fonction continue et strictement décroissante sur $[a, b]$.

Alors k réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[k(b), k(a)]$.

De plus, par hypothèse, $f([a, b]) \subset [a, b]$. Donc $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$, soit $k(a) \geq 0$ et $k(b) \leq 0$.

Donc $0 \in [k(b), k(a)]$ et 0 admet un unique antécédent c dans $[a, b]$ par k .

Donc il existe un et un seul réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

$x_0 \in [a, b]$ et $f([a, b]) \subset [a, b]$, donc, par une récurrence immédiate, $x_n \in [a, b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question préliminaire, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, |f(x_n) - f(c)| \leq K |x_n - c|$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - c| \leq K |x_n - c|$ car $f(x_n) = x_{n+1}$ et $f(c) = c$.

Puis, on vérifie par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - c| \leq K^n |x_0 - c|$.

Or $0 \leq K < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} K^n |x_0 - c| = 0$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - c| = 0$.

Donc la suite (x_n) est convergente et de limite c .

2) D'après la question précédente, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - c| \leq K^n |x_0 - c|$ et $|x_1 - c| \leq K |x_0 - c|$.

Or, d'après l'inégalité triangulaire, on a : $|x_0 - c| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - c| \leq |x_0 - x_1| + K |x_0 - c|$

donc $(1 - K) |x_0 - c| \leq |x_0 - x_1|$. Or $(1 - K) > 0$ d'où $|x_0 - c| \leq \frac{1}{1 - K} |x_0 - x_1|$.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - c| \leq \frac{K^n}{1 - K} |x_0 - x_1|$ soit $\forall n \in \mathbb{N}, |e_n| \leq \frac{K^n}{1 - K} |x_1 - x_0|$.

Partie II :

1) On a, par hypothèse, f' est continue et $\forall x \in [a, b], |f'(x)| > 0$, donc f' ne s'annule pas sur $[a, b]$.

Donc f' garde un signe constant et f est strictement monotone sur $[a, b]$ donc f est injective.

On a $e_0 \neq 0$. Si on suppose $e_n \neq 0$, alors $x_n \neq c$ et donc $f(x_n) \neq f(c)$ par injectivité, soit $x_{n+1} \neq c$.

Donc, par récurrence, si $e_0 \neq 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}, e_n \neq 0$.

Si $e_0 = 0$, alors $x_0 = c$ et, comme c est le point fixe de f sur $[a, b]$, par une récurrence évidente, $x_n = c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $e_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (x_n) est constante égale à c si $e_0 = 0$.

2) S'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n+1} = x_n$ alors $f(x_n) = x_n$; par unicité du point fixe de f sur $[a, b]$, $x_n = c$, soit $e_n = 0$, ce qui est contraire au résultat trouvé à la question 1) puisque l'on a supposé $e_0 \neq 0$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - x_n \neq 0$.

$$3) \text{ On a : } \frac{x_{n+1} - c}{x_n - c} = \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}.$$

Comme f est dérivable au point c et que la suite (x_n) converge vers c quand n tend vers $+\infty$, par composition

des limites, on a bien : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} = f'(c)$.

4) x'_n existe ssi $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n \neq 0$.

Or, d'après la question préliminaire, $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq K |x_{n+1} - x_n| < |x_{n+1} - x_n|$ car $K < 1$ et $x_{n+1} \neq x_n$.

Donc $f(x_{n+1}) - f(x_n) \neq x_{n+1} - x_n$ soit $x_{n+2} - x_{n+1} \neq x_{n+1} - x_n$ soit $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n \neq 0$.

Donc x'_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, d'après la question 1), $e_n \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $x_n - c \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a alors :
$$\frac{x'_n - c}{x_n - c} = \frac{x_n - c - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}}{x_n - c} = \frac{e_n - \frac{(e_{n+1} - e_n)^2}{e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n}}{e_n} = \frac{e_n e_{n+2} - e_{n+1}^2}{e_n (e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n)}$$
 après réduction au même dénominateur.

D'où, en divisant numérateur et dénominateur par $e_n e_{n+1}$:
$$\frac{x'_n - c}{x_n - c} = \frac{\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - \frac{e_{n+1}}{e_n}}{\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 2 + \frac{e_n}{e_{n+1}}}$$

D'après la question 3), on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = f'(c)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} = f'(c)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - \frac{e_{n+1}}{e_n} = 0$.

De plus, $\forall x \in [a, b], |f'(x)| > 0$; donc $f'(c) \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_n}{e_{n+1}} = \frac{1}{f'(c)}$.

D'où :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 2 + \frac{e_n}{e_{n+1}} = f'(c) - 2 + \frac{1}{f'(c)} = \frac{(f'(c))^2 - 2f'(c) + 1}{f'(c)} = \frac{(f'(c) - 1)^2}{f'(c)} \neq 0 \text{ car } |f'(c)| < 1.$$

Donc $\lim_n (x'_n - c) = 0$ et la suite (x'_n) converge vers c .

De plus, comme $\lim_n (x'_n - c) = 0$, $(x'_n - c) = o((x_n - c))$, (x'_n) converge vers c plus rapidement que (x_n) .

Partie III :

1) Posons $t(x) = g(x) - x$. t est dérivable sur $[a, +\infty[$ car g l'est, et $t'(x) = g'(x) - 1 < 0$ puisque g' est négative. Donc t est strictement décroissante sur $[a, +\infty[$.

On a : $t(a) = g(a) - a \geq 0$ car, par hypothèse, $g([a, +\infty[) \subset [a, +\infty[$. De plus, comme g' est strictement négative, g est strictement décroissante, donc si $x > a$, $a \leq g(x) < g(a)$.

Donc $t(a) > 0$ et g est bornée sur $[a, +\infty[$.

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} t(x) = -\infty$. Comme t est continue et strictement décroissante sur $[a, +\infty[$, on a alors t est bijective de $[a, +\infty[$ sur $]-\infty, t(a)[$. Comme $t(a) > 0$, $0 \in]-\infty, t(a)[$ et 0 admet un unique antécédent par t dans $]a, +\infty[$. Donc l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution dans $]a, +\infty[$, notée d .

2) t est continue et dérivable sur $[a, +\infty[$. D'après le théorème des accroissements finis, si $x \in [a, +\infty[$, il existe y_1 , compris entre x et d tel que : $t(x) - t(d) = t'(y_1)(x - d)$, soit $g(x) - x = (g'(y_1) - 1)(x - d)$ (car $t(d) = 0$).

Si $x = d$, on choisira $y_1 = d$.

Or, $N(x) = [g(g(x)) - g(x)] - (g(x) - x)$.

En raisonnant comme précédemment et en remplaçant x par $g(x)$, on en déduit l'existence d'un réel y_2 , compris entre d et $g(x)$ tel que : $g(g(x)) - g(x) = (g'(y_2) - 1)(g(x) - d)$.

Donc : $N(x) = (g'(y_2) - 1)(g(x) - d) - (g(x) - x) = (g'(y_2) - 1)(g(x) - x + x - d) - (g(x) - x)$

soit, puisque $g(x) - x = (g'(y_1) - 1)(x - d)$:

$$N(x) = (g'(y_2) - 1)g'(y_1)(x - d) - (g'(y_1) - 1)(x - d) = (g'(y_2)g'(y_1) - 2g'(y_1) + 1)(x - d).$$

Or : $(g'(y_1) - 1)^2 + (g'(y_2) - g'(y_1))g'(y_1) = (g'(y_1))^2 - 2g'(y_1) + 1 + g'(y_2)g'(y_1) - (g'(y_1))^2$, soit $(g'(y_1) - 1)^2 + (g'(y_2) - g'(y_1))g'(y_1) = g'(y_2)g'(y_1) - 2g'(y_1) + 1$.

Donc on a bien : $N(x) = [(g'(y_1) - 1)^2 + (g'(y_2) - g'(y_1))g'(y_1)](x - d)$.

En conclusion, il existe deux réels y_1 et y_2 , le premier compris entre x et d , le second entre $g(x)$ et d , tels que : $g(x) - x = (g'(y_1) - 1)(x - d)$ et $N(x) = [(g'(y_1) - 1)^2 + (g'(y_2) - g'(y_1))g'(y_1)](x - d)$.

3) D'après les égalités précédentes, si $x = d$, alors $N(x) = 0$.

De plus, N est dérivable sur $[a, +\infty[$ car g l'est, et l'on a :

$\forall x \in [a, +\infty[, N'(x) = g'(g(x)) \times g'(x) - 2g'(x) + 1 > 0$ car g' est strictement négative.

Donc N est strictement croissante sur $[a, +\infty[$. Elle y est donc injective et ne peut alors s'annuler qu'une fois au maximum. Donc $N(x) = 0$ ssi $x = d$.

4) Comme N ne s'annule qu'en d , par propriétés des quotients de fonctions, puisque g est continue sur $[a, +\infty[$, G est continue sur $[a, +\infty[\setminus \{d\}$.

Si $x \neq d$, on a : $G(x) = x - (x - d) \times \frac{(g'(y_1) - 1)^2}{[(g'(y_1) - 1)^2 + (g'(y_2) - g'(y_1))g'(y_1)]}$ avec y_1 et y_2 , deux réels, le premier compris entre x et d , le second entre $g(x)$ et d .

Si x tend vers d , comme g est continue en d , $g(x)$ tend vers $g(d) = d$, et, d'après le théorème d'encadrement, y_1 et y_2 tendent vers d . Or g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, donc g' est continue sur $[a, +\infty[$.

Donc $\lim_{x \rightarrow d} (g'(y_1) - 1)^2 + (g'(y_2) - g'(y_1))g'(y_1) = (g'(d) - 1)^2 + (g'(d) - g'(d))g'(d) = (g'(d) - 1)^2 > 0$

et $\lim_{x \rightarrow d} (g'(y_1) - 1)^2 = (g'(d) - 1)^2$. Donc $\lim_{x \rightarrow d^+} G(x)$ et $\lim_{x \rightarrow d^-} G(x)$ existent et valent $d = G(d)$.

Donc G est continue en d .

D'où : G est continue sur $[a, +\infty[$.

On a, pour tout $x \in [a, d[\cup]d, +\infty[$, $G(x) - d = (x - d) \left(1 - \frac{(g'(y_1) - 1)^2}{[(g'(y_1) - 1)^2 + (g'(y_2) - g'(y_1))g'(y_1)]} \right)$, soit

$$G(x) - d = (x - d) \frac{(g'(y_2) - g'(y_1))g'(y_1)}{[g'(y_1)g'(y_2) - 2g'(y_1) + 1]},$$

avec y_1 réel compris entre x et d , et y_2 réel compris entre d et $g(x)$.

Or, g est strictement décroissante sur $[a, +\infty[$, donc, si $x < d$, alors $g(x) > g(d) = d$ et si $x > d$, $g(x) < d$.

Donc, si $x < d$ alors $x \leq y_1 \leq d \leq y_2 \leq g(x)$ et si $x > d$, alors $g(x) \leq y_2 \leq d \leq y_1 \leq x$.

De plus, g' est croissante sur $[a, +\infty[$, donc si $x < d$, $g'(y_2) - g'(y_1) \geq 0$ et si $x > d$, alors $g'(y_2) - g'(y_1) \leq 0$; donc $(x - d)(g'(y_1) - g'(y_2)) \leq 0$, pour tout $x \in [a, d[\cup]d, +\infty[$.

g' étant négative, $g'(y_1) < 0$ et $g'(y_1)g'(y_2) - 2g'(y_1) + 1 > 0$.

D'où : $\forall x \in [a, d[\cup]d, +\infty[, G(x) - d \geq 0$ donc $G(x) \geq d \geq a$. De plus, $G(d) = d \geq a$.

Donc G est une application définie sur $[a, +\infty[$ et à valeurs dans $[a, +\infty[$.

5) Comme $G([a, +\infty[) \subset [a, +\infty[$, par récurrence, on démontre que la suite (x''_n) est définie et incluse dans $[a, +\infty[$. Donc la suite (x''_n) est minorée par a .

De plus, d'après l'étude faite à la question 4), on a même que : $\forall x \in [a, +\infty[, G(x) \geq d$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x''_n = G(x''_{n-1}) \geq d$.

Or, N est croissante sur $[a, +\infty[$ et $N(d) = 0$ donc $\forall x \in [d, +\infty[, N(x) \geq 0$ soit $G(x) \leq x$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x''_{n+1} = G(x''_n) \leq x''_n$. Donc la suite (x''_n) est décroissante à partir du rang 1.

Comme (x''_n) est une suite réelle décroissante et minorée, elle est convergente. Soit l sa limite.

Comme la suite (x''_n) est incluse dans $[a, +\infty[, l \in [a, +\infty[$.

Comme G est continue sur $[a, +\infty[$, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité : $x''_{n+1} = G(x''_n)$,

on obtient : $l = G(l)$. Donc, ou bien $l = d$, ou bien $l \neq d$ et $l = l - \frac{(g(l) - l)^2}{N(l)}$ (1).

Mais (1) $\Leftrightarrow g(l) = l \Leftrightarrow l = d$: contradiction.

Donc le seul point fixe de G est d et la suite (x''_n) est convergente de limite d .

Partie IV :

Posons $g(x) = e^{-x}$. g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, $g'(x) = -e^{-x} < 0$ et g' est croissante sur $[0, +\infty[$. Donc les résultats de la **partie III** s'appliquent.

Donc l'équation $e^{-x} = x$ admet une et une seule solution sur $[0, +\infty[$, notée d .

Posons $G(x) = x - \frac{(e^{-x} - x)^2}{e^{-e^{-x}} - 2e^{-x} + x}$ si $x \neq d$ et $G(d) = d$.

D'après la question 5) de la partie III, la suite définie par $x''_0 = 0.5$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, x''_{n+1} = G(x''_n)$, est définie et converge vers d .

De plus, on a : $g(e^{-1}) = e^{-1/e} < 1$ et $g(1) = e^{-1}$. Comme g est strictement décroissante sur $[e^{-1}, 1]$, on a donc $g([e^{-1}, 1]) = [e^{-1}, e^{-1/e}] \subset [e^{-1}, 1]$.

De plus : $\forall x \in [e^{-1}, 1], |g'(x)| \leq e^{-1/e} < 0.7$ (car $e^{-1/e} \approx 0.69$). On pose alors $K = 0.7$ et $K < 1$, donc on peut appliquer les résultats des parties I et II.

En particulier, si on souhaite une valeur approchée de d à 10^{-6} près, il suffit de choisir n tel que :

$\frac{K^n}{1-K} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq 10^{-6}$ car si $x_0 = 0.5, x_0 \in [e^{-1}, 1]$ et $x_1 \in [e^{-1}, 1]$, donc $|x_0 - x_1| \leq 1 - \frac{1}{e}$ et, dans ce cas, on

aura : $|e_n| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0| \leq \frac{K^n}{1-K} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq 10^{-6}$ donc $|x_n - d| \leq 10^{-6}$.

Or : $\frac{K^n}{1-K} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq 10^{-6} \Leftrightarrow n \geq \ln \left(10^{-6} \frac{0.3 \times e}{e-1} \right) / \ln(0.7) \approx 40.8$.

On est donc certain qu'au bout de 41 itérations avec le premier algorithme, on obtiendra une valeur approchée de d à 10^{-6} près.

Voir les programmes et résultats MAPLE sur la feuille suivante.