Тема: Поняття похідної. Правила обчислення похідних

Посилання на підручник: https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-10-klas-2018/14-matematyka-10-klas/merzlyak-ag-matematyka-alg-i-poch-analizu-ta-geom-riven-standartu-10-kl.pdf

Матеріали до теми:

Поняття похідної

Означення

Похідною функції f у точці x_0 називають число, яке дорівнює границі відношення приросту функції f у точці x_0 до відповідного приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

Миттєва швидкість

Кутовий коефіцієнт дотичної

Механічний зміст похідної

Геометричний зміст похідної

Якщо функція ***f*** має похідну x_0, то цю функцію називають ***диференційованою*** в точці x_0.

ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙ

Функция f	Похідна f
k (стала)	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Виконання вправ

№ 1

Знайти похідну функції

1) y=5x-6

$y' = (5x - 6)' = (5x)' - 6' = 5 - 0 = 5$

2) y=9

$y' = 9' = 0$

3) y= 8-3x

$y' = (8)' - (3x)' = 0 - 3 =- 3$

№2

Знайти похідну функції:

1) $y = x^4$

$y' = \left(x^4\right)' = 4x^{4-1} = 4x^3$

2) $y = x^{-15}$

$y' = \left(x^{-15}\right)' =- 15x^{-15-1} =- 15x^{-16}$

3) $y = \frac{1}{x^{17}} = x^{-17}$

$y' = \left(x^{-17}\right)' =- 17x^{-17-1} =- 17x^{-18} = \frac{-17}{x^{18}}$

4) $y = x^{\frac{1}{5}}$

$y' = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$

№3

Обчисліть значення похідної функції ***f*** в точці x_0

1) $f(x) = \sin sin\, x,\ x_0 = \frac{\pi}{6}$

$f'(x) = (\sin sin\, x)' = \cos cos\, x$

$f'(\frac{\pi}{6}) = \cos cos\, \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $f(x) = x^{-2},\ x_0 = -2$

$f'(x) = \left(x^{-2}\right)' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$

$f'(-2) = -2(-2)^{-3} = -2\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}$

№ 4

Продиференціюйте функцію:

1) $y = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$

$y' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

2) $y = \sqrt[8]{x^7} = x^{\frac{7}{8}}$

$y' = \left(x^{\frac{7}{8}}\right)' = \frac{7}{8}x^{\frac{7}{8}-1} = \frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}} = \frac{7}{8\sqrt[8]{x}}$

3) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$

$y' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

4) $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}} = x^{\frac{5}{8}}$

$y' = \left(x^{\frac{5}{8}}\right)' = \frac{5}{8}x^{\frac{5}{8}-1} = \frac{5}{8}x^{-\frac{3}{8}} = \frac{5}{8\sqrt[8]{x^3}}$

Під час обчислювання похідних зручно користуватися такими теоремами[1].

Теорема 20.1 (похідна суми). ***У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) + g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Коротко говорять: *похідна суми дорівнює сумі похідних*.

Також прийнято такий спрощений запис:

$$\boxed{(f + g)' = f' + g'}$$

Теорему 20.1 можна узагальнити для будь-якої скінченної кількості доданків:

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'.$$

Теорема 20.2 (похідна добутку). ***У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x)\,g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + g'(x)\,f(x).$$

Також прийнято такий спрощений запис:

$$\boxed{(fg)' = f'g + g'f}$$

---

[1] Умови теорем 20.1–20.3 передбачають таке: якщо функції f і g є диференційовними в точці x_0, то відповідно функції $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x)\,g(x)$ та $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ визначені на деякому проміжку, що містить точку x_0.

Наслідок 1. ***У тих точках, у яких є диференційовною функція $y = f(x)$, також є диференційовною функція $y = kf(x)$, де k — деяке число, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Коротко говорять: *постійний множник можна виносити за знак похідної.*

Також прийнято такий спрощений запис:

$$\boxed{(kf)' = kf'}$$

Доведення. Оскільки функція $y = k$ є диференційовною в будь-якій точці, то, застосовуючи теорему про похідну добутку, можна записати:

$$(kf(x))' = (k)'f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x). \blacktriangleleft$$

Наслідок 2. ***У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) - g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

Доведення. Маємо:

$$(f(x) - g(x))' = (f(x) + (-1) \cdot g(x))' = (f(x))' + ((-1) \cdot g(x))' =$$
$$= f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x). \blacktriangleleft$$

Теорема 20.3 (похідна частки). ***У тих точках, у яких функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є диференційовними та значення функції g не дорівнює нулю, функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також є диференційовною, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}.$$

Також прийнято такий спрощений запис:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}}$$

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал п. 19-20.
2. Законспектувати означення, формули, теореми.
3. Виконати письмово вправи: 19.2, 19.4, 19.6, 20.1, 20.3.
4. Переглянути відеоматеріали за посиланням:

https://naurok.com.ua/pravila-obchislennya-pohidnih-239497.html

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net , у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи. Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net .