

Тема: Поняття похідної. Правила обчислення похідних

Посилання

на

підручник:

<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-10-klas-2018/14-matematyka-10-klas/merzlyak-ag-matematyka-alg-i-poch-analizu-ta-geom-riven-standardu-10-kl.pdf>

Матеріали до теми:

Поняття похідної

Означення

Похідною функції f у точці x_0 називають число, яке дорівнює границі відношення приросту функції f у точці x_0 до відповідного приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

Миттєва швидкість

Кутовий коефіцієнт дотичної

Механічний зміст похідної

Геометричний зміст похідної

Якщо функція f має похідну x_0 , то цю функцію називають *диференційованою* в точці x_0 .

ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙ

Функція f	Похідна f
k (стала)	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Виконання вправ

№ 1

Знайти похідну функції

1) $y = 5x - 6$

$$y' = (5x - 6)' = (5x)' - 6' = 5 - 0 = 5$$

2) $y = 9$

$$y' = 9' = 0$$

3) $y = 8 - 3x$

$$y' = (8)' - (3x)' = 0 - 3 = -3$$

№ 2

Знайти похідну функції:

1) $y = x^4$

$$y' = (x^4)' = 4x^{4-1} = 4x^3$$

2) $y = x^{-15}$

$$y' = (x^{-15})' = -15x^{-15-1} = -15x^{-16}$$

3) $y = \frac{1}{x^{17}} = x^{-17}$

$$y' = (x^{-17})' = -17x^{-17-1} = -17x^{-18} = -\frac{17}{x^{18}}$$

$$4) y = x^{\frac{1}{5}}$$

$$y' = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$$

№3

Обчисліть значення похідної функції f в точці x_0

$$1) f(x) = \sin \sin x, x_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$f'(x) = (\sin \sin x)' = \cos \cos x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2) f(x) = x^{-2}, x_0 = -2$$

$$f'(x) = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$$

$$f'(-2) = -2(-2)^{-3} = -2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}$$

№4

Продиференціюйте функцію:

$$1) y = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$$

$$y' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

$$2) y = \sqrt[8]{x^7} = x^{\frac{7}{8}}$$

$$y' = \left(x^{\frac{7}{8}}\right)' = \frac{7}{8}x^{\frac{7}{8}-1} = \frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}} = \frac{7}{8\sqrt[8]{x}}$$

$$3) y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

$$4) y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}} = x^{-\frac{5}{8}}$$

$$y' = \left(x^{-\frac{5}{8}}\right)' = -\frac{5}{8}x^{-\frac{5}{8}-1} = -\frac{5}{8}x^{-\frac{13}{8}} = -\frac{5}{8\sqrt[8]{x^{13}}}$$

Під час обчислювання похідних зручно користуватися такими теоремами¹.

Теорема 20.1 (похідна суми). У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) + g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Коротко говорять: *похідна суми дорівнює сумі похідних.*

Також прийнято такий спрощений запис:

$$(f + g)' = f' + g'$$

Теорему 20.1 можна узагальнити для будь-якої скінченної кількості доданків:

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'.$$

Теорема 20.2 (похідна добутку). У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + g'(x) f(x).$$

Також прийнято такий спрощений запис:

$$(fg)' = f'g + g'f$$

¹ Умови теорем 20.1–20.3 передбачають таке: якщо функції f і g є диференційовними в точці x_0 , то відповідно функції $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) g(x)$ та $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ визначені на деякому проміжку, що містить точку x_0 .

Наслідок 1. У тих точках, у яких є диференційовною функція $y = f(x)$, також є диференційовною функція $y = kf(x)$, де k — деяке число, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Коротко говорять: постійний множник можна виносити за знак похідної.

Також прийнято такий спрощений запис:

$$(kf)' = kf'$$

Доведення. Оскільки функція $y = k$ є диференційовною в будь-якій точці, то, застосовуючи теорему про похідну добутку, можна записати:

$$(kf(x))' = (k)' f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x). \blacktriangleleft$$

Наслідок 2. У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) - g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned} (f(x) - g(x))' &= (f(x) + (-1) \cdot g(x))' = (f(x))' + ((-1) \cdot g(x))' = \\ &= f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x). \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Теорема 20.3 (похідна частки). У тих точках, у яких функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є диференційовними та значення функції g не дорівнює нулю, функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також є диференційовною, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}.$$

Також прийнято такий спрощений запис:

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал п. 19-20.
2. Законспектувати означення, формули, теореми.
3. Виконати письмово вправи: 19.2, 19.4, 19.6, 20.1, 20.3.
4. Переглянути відеоматеріали за посиланням:

<https://naurok.com.ua/pravila-obchislennya-pohidnih-239497.html>

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net, у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи. Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net.