

CONCOURS ENSAM-ESTP-ENSAIS filière PSI, année 1998.
Epreuve de physique 2 (durée 4h).

I/ Première partie : membranes vibrantes.

I.A/ Membrane rectangulaire.

I.A.1/ On peut proposer par exemple $\sigma g(L_x L_y)^{1/2} \ll T$.

I.A.2/ En négligeant le poids, il ne reste que les 4 forces de tension représentées figure I.1. Dans l'hypothèse des petits mouvements, les forces T_{dx} sont dans le plan Mxy , les forces T_{dy} dans le plan Mxz . On obtient alors, de manière similaire à ce que l'on fait avec les cordes vibrantes, pour résultante des deux forces T_{dx} , et de même pour résultante des deux forces T_{dy} .

I.A.3/ On arrive alors directement à où l'on a noté c la célérité de l'onde qui vaut , ce qui est bien homogène ($[T]=MT^{-2}$; $[\sigma]=ML^{-2}$; $[c]=LT^{-1}$).

I.A.4/ On cherche des solutions de vibrations stationnaires sous la forme $z(x,y,t)=X(x)Y(y)\Psi(t)$. En reportant dans l'équation d'onde et en divisant par $XY\Psi$ on arrive à où, le premier membre ne dépendant que de t , le second que de x et y , l'ensemble est égal à une constante notée K . La résolution de ne conduit à des solutions vibratoires que si K est négatif. On pose donc $K=-\omega^2$ avec $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$.

I.A.5/ Les solutions pour Ψ sont alors de la forme $\Psi(t)=A_1 \cos(\omega t)+B_1 \sin(\omega t)$.

I.A.6/ On a donc . Le premier membre ne dépend que de x , le second que de y . L'ensemble est donc égal à une constante notée H . Cette constante est négative pour que les solutions de soient de type vibratoire. Les solutions sont alors de la forme et .

I.A.7/ $X(0)=0$ donc $A_2=0$. $X(L_x)=0$ donc d'où avec $m \in \mathbb{Z}$ (m négatif n'apporte aucune solution supplémentaire). De même avec Y et on arrive à avec $n \in \mathbb{Z}$. D'où la solution .

I.A.8/ De I.A.7, on tire et . En combinant les deux on arrive aux fréquences de vibration .

I.A.9/ Les 4 bords sont toujours des lignes nodales. Lorsque $m=1$, il n'y en a pas d'autre en x . Lorsque $m=2$, il y a en plus la ligne $x=L_x/2$. Lorsque $m=3$, il y a les lignes $x=L_x/3$ et $x=2L_x/3$. Même chose en y avec n et L_y .

I.B/ Membrane circulaire.

I.B.1/ On obtient directement à l'aide des formules du préliminaire : .

I.B.2/ On cherche là encore des solutions de vibrations stationnaires, sous la forme $z(r,\theta,t)=R(r)F(\theta)\Psi(t)$. On reporte dans l'équation d'onde pour obtenir . On en déduit que, comme au I.A, l'ensemble est égal à $-\omega^2$ et que donc $\Psi(t)$ est de la forme $\Psi(t)=A_1 \cos(\omega t)+B_1 \sin(\omega t)$. On arrive alors à . L'ensemble est égal à une constante K' , égale à $-m^2$ conformément à l'énoncé. On en déduit alors l'équation différentielle en $R(r)$: .

I.B.3/ $F(\theta)$ est donc de la forme $F(\theta)=A_4 \cos(m\theta+\phi_4)$. Mais on doit forcément avoir $F(\theta)=F(\theta+2\pi)$ et ce $\forall \theta$ puisque cela correspond au même point physique. Cela impose que m soit un entier : $m \in \mathbb{Z}$ suffit (m négatif n'apportant aucune solution supplémentaire).

I.B.4/ On fait le changement de variable $r'=r\omega/c$. Alors (2) devient , équation différentielle de Bessel (m entier). Les solutions en $Y_m(r')$ ne sont pas physiquement acceptables car infinies en $r'=0$ donc R est de la forme $R(r)=C_1 J_m(\omega r/c)$.

I.B.5/ Le périmètre de la membrane est toujours une ligne nodale. Il peut y avoir deux types de lignes nodales : des lignes $\theta=cte$ [π] c'est-à-dire des diamètres, qui annulent $F(\theta)$ et des lignes $r=cte$, c'est-à-dire des cercles centrés sur O , qui annulent $R(r)$. On obtient la pulsation $\omega_{m,n}$ correspondante en écrivant $\omega_{m,n}a/c=n^{\text{ème}}$ zéro de J_m .

- ♦ ($m=0, n=1$) aucune ;
- ♦ ($m=1, n=1$) un diamètre ;
- ♦ ($m=2, n=1$) deux diamètres perpendiculaires ;
- ♦ ($m=0, n=2$) un cercle de rayon $2,405a/5,520$;
- ♦ ($m=3, n=1$) trois diamètres à $\pi/3$ les uns des autres ;

♦ ($m=1, n=2$) un diamètre et un cercle de rayon $3,832\lambda/7,016$;

II/ Deuxième partie : Holographie et interférométrie holographique.

II.A.1/ Enregistrement de l'hologramme.

II.A.1.a/ L'onde de référence est une onde plane progressive monochromatique.

II.A.1.b/ avec et , donc .

II.A.1.c/ Les deux ondes étant cohérentes, on a et donc .

II.A.2/ Un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de W_0 donne . Comme de plus , on a donc

II.A.3/ donc , soit . L'onde transmise juste après l'hologramme peut donc s'interpréter comme la superposition de trois ondes. La troisième est égale à l'onde initiale que produisait l'objet dans le plan de l'hologramme au moment de l'enregistrement, à un facteur réel près. Un observateur placé derrière l'hologramme ainsi éclairé verra ainsi l'objet tel qu'il était au moment de l'enregistrement ; il s'agit bien évidemment d'une image virtuelle. Le second terme correspond lui à une image réelle, symétrique de la position initiale de l'objet par rapport au plan de l'hologramme.

II.B.1/ Posons de manière à avoir . Alors

II.B.2/ On a toujours avec . On suppose maintenant que (en conformité avec ce que dit l'énoncé au III.A.1/). Alors . Le dernier terme correspond à une image virtuelle affectée de franges d'interférences.

III.A/ Troisième partie : Interférométrie holographique par double exposition.

III.A.1/ D'après II.B.1/,

III.A.2/ III.A.3/ On a toujours . Parmi tous les termes de $U'(x,y)$ on ne garde que le terme $U'_v(x,y)$ correspondant à l'image virtuelle : .

III.A.4/ Donc . La fonction de modulation $M(x,y)$ est donc l'intérieur de la parenthèse.

III.A.5/ L'éclairement E correspondant alors à cette image virtuelle est .

D'où et . Le terme $(1+m \cos \Delta\phi)$ est un terme classique d'interférences à deux ondes.

III.A.6/ Si $A_1=A_2$ et $\tau_1=\tau_2$ alors $m=1$. Le contraste des interférences est maximal.

III.A.7.a/ . donc donc soit, au premier ordre, étant donné que $M_1 M_2$ est petite devant les autres distances : . On montre de même que . Et donc enfin .

III.A.7.b/ La sensibilité dépend donc, outre de la longueur d'onde utilisée, de la direction du vecteur S qui doit être le plus parallèle possible au déplacement que l'on cherche à mettre en évidence.

III.A.8/ Les franges sont dues à la dilatation de l'oeuvre d'art. On repère de petites zones irrégulières où le déplacement est très différent des zones environnantes : ces zones correspondent à un déplacement important sous l'effet de l'élévation de température et donc aux zones de détachement de la sous-couche d'avec le support.

III.B/ Interférométrie holographique par intégration temporelle.

III.B.1/ (la dépendance en temps n'est liée ici qu'au déplacement de l'objet, elle n'inclut pas le terme en). Or . Donc .

III.B.2/ donc Des quatre termes sous l'intégrale, c'est le troisième qui correspondra au moment de la restitution à l'image virtuelle. C'est donc le seul que l'on garde pour la suite.

III.B.3/ Donc . Or . Et , donc, en ne gardant que le terme intéressant, .

III.B.4/ avec $A_0 \in \mathbb{R}$. Donc en calculant U_V on trouve avec la fonction de modulation.

III.B.5/ .

III.B.6/ La durée d'exposition τ étant très grande devant la période d'oscillation de l'objet, on assimile la fonction de modulation $M(x,y)$ à .

III.B.7/ .

III.B.8/ L'éclairement maximum est obtenu lorsque l'argument de la fonction de Bessel est nul, soit pour les zones pour lesquelles $S \cdot D_0 = 0$. Si ces deux vecteurs sont parallèles, comme on le déduit de l'énoncé, les zones qui donneront un éclairement maximum seront les zones qui ne vibrent pas (lignes nodales de la partie I).

III.B.9/ On identifie les modes de vibration grâce aux lignes nodales, qui apparaissent en blanc. (a) est ($m=0, n=1$), (b) est ($m=1, n=1$), (c) est ($m=2, n=1$), (d) est ($m=0, n=2$), (e) est ($m=3, n=1$), (f) est ($m=1, n=2$).

III.B.10/ On repère très nettement un défaut qui correspond à une irrégularité des vibrations (défaut de collage de la couche d'élastomère).

III.B.11/ On voit là aussi un défaut d'homogénéité de la membrane sur le côté droit.