

Câu 1: (2.0 điểm)

Cho biểu thức : $A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$

1/ Rút gọn biểu thức A.

2/ Tìm các giá trị của x để $\frac{1}{A} \leq -\frac{5}{2}$

Câu 2 (2,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P) : $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng (d):

$$y = bx + 1$$

1/ Tìm các giá trị của a và b để (P) và (d) cùng đi qua điểm M(1; 2)

2/ Với a, b vừa tìm được, chứng minh rằng (P) và (d) còn có một điểm chung N khác M. Tính diện tích tam giác MON (với O là gốc tọa độ)

Câu 3 (2.0 điểm)

1/ Cho phương trình: $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$$

2/ Giải hệ phương trình:

Câu 4 (3.0 điểm) : Cho A là điểm cố định nằm ngoài đường tròn (O). Từ A kẻ tiếp tuyến AP và AQ tới đường tròn (P và Q là các tiếp điểm). Đường thẳng đi qua O và vuông góc với OP cắt đường thẳng OQ tại M.

1/ Chứng minh rằng: $MO = MA$

2/ Lấy điểm N trên cung lớn PQ của đường tròn (O) sao cho tiếp tuyến với (O) tại N cắt các tia AP, AQ lần lượt tại B và C. Chứng minh rằng:

a) $AB + AC - BC$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm N.

b) Nếu tứ giác BCQP nội tiếp được trong một đường tròn thì $PQ \parallel BC$

Câu 5 (1.0 điểm)

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn : $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2$. Chứng minh rằng :

$$5x^2 + y - 4xy + y^2 \geq 3$$

----- Hết -----

Chữ ký giám thị 1: Chữ ký giám thị 2:

Bài giải

Câu 1: (2.0 điểm)

Cho biểu thức :
$$A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$$

1/ Rút gọn biểu thức A.

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) \quad (\text{ĐK: } x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9)$$

$$A = \dots = \frac{\sqrt{x}+1}{x-4}$$

2/ Tìm các giá trị của x để $\frac{1}{A} \leq -\frac{5}{2}$

$$\frac{1}{A} \leq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{x-4}{\sqrt{x}+1} \leq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x-8 \leq -5\sqrt{x}-5$$

$$\Leftrightarrow 2x+5\sqrt{x}-3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq \sqrt{x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

Kết hợp với ĐK $\Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$

Câu 2 (2,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P) : $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng (d): $y = bx + 1$

1/ Tìm các giá trị của a và b để (P) và (d) cùng đi qua điểm M(1; 2)

$$M \in (P) \Rightarrow \dots \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y = 2x^2$$

$$M \in (d) \Rightarrow \dots \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = x + 1$$

2/ Với a, b vừa tìm được, chứng minh rằng (P) và (d) còn có một điểm chung N khác M. Tính diện tích tam giác MON (với O là gốc tọa độ)

Xét pt hoành độ gđ: $2x^2 = x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M(1; 2); N\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$S_{\Delta MON} = S_{thang} - (S_1 + S_2) = \dots = 0,75 \quad (\text{dvv})$$

Câu 3 (2.0 điểm)

1/ Cho phương trình: $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt?

phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.c > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 > 0 \\ m^2 + m - 6 > 0 \\ 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 2 \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$$

$$2/ \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2 & (1) \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 & (2) \end{cases} \quad (\text{ĐK: } x \geq 1; y \geq 1)$$

$$(2) \Leftrightarrow x + y = xy \quad (3)$$

Hai vế của (1) đều dương ta bình phương hai vế ta có:

$$x + y - 2 + 2\sqrt{(x-1)(y-1)} = 4$$

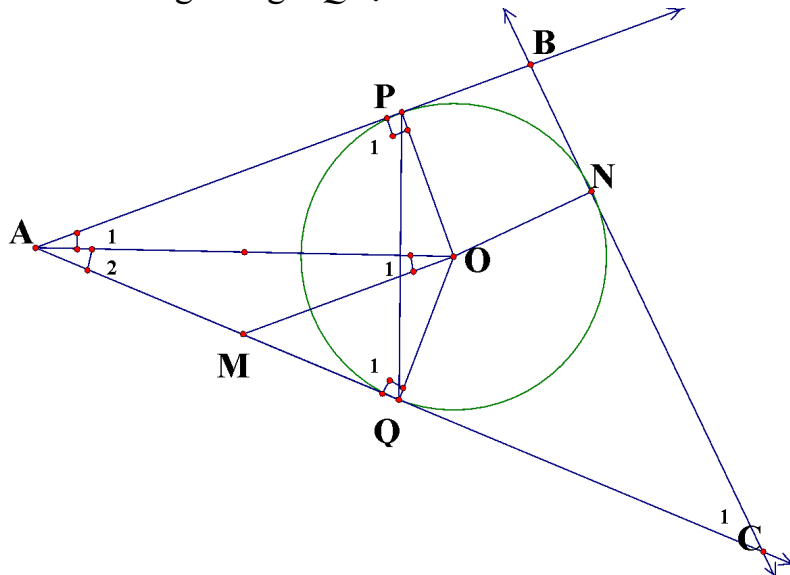
$$\Leftrightarrow x + y - 2 + 2\sqrt{xy - (x+y) + 1} = 4$$

Thay (3) vào ta có: $x + y = 4$ kết hợp với (3) có hệ: $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=4 \end{cases}$

Áp dụng hệ thức Vi Ét ta có x, y là hai nghiệm của pt: $X^2 - 4x + 4 = 0$

$$\Rightarrow x = 2; y = 2$$

Câu 4 (3.0 điểm) : Cho A là điểm cố định nằm ngoài đường tròn (O) . Từ A kẻ tiếp tuyến AP và AQ tới đường tròn (P và Q là các tiếp điểm). Đường thẳng đi qua O và vuông góc với OP cắt đường thẳng OQ tại M .



1/ Chứng minh rằng: $MO = MA$

$\angle A_1 = \angle O_1$ và $\angle A_1 = \angle A_2 \Rightarrow \angle A_2 = \angle O_1 \Rightarrow \Delta MAO$ cân $\Rightarrow MO = MA$

2/ Lấy điểm N trên cung lớn PQ của đường tròn (O) sao cho tiếp tuyến với (O) tại N cắt các tia AP, AQ lần lượt tại B và C . Chứng minh rằng:

a) $AB + AC - BC$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm N .

Theo t/c hai tia tiếp tuyến ta có $\dots \Rightarrow AB + AC - BC = \dots = 2.AP$ (không đổi)

b) Nếu tứ giác $BCQP$ nội tiếp được trong một đường tròn thì $PQ \parallel BC$

Nếu tứ giác $BCQP$ nội tiếp được $\Rightarrow \angle P_1 = \angle C_1$

mà $\angle P_1 = \angle Q_1 \Rightarrow \angle C_1 = \angle Q_1 \Rightarrow PQ \parallel BC$

Câu 5 (1.0 điểm)

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2$. Chứng minh rằng:

$$5x^2 + y - 4xy + y^2 \geq 3$$

* Ta có:

$$5x^2 + y - 4xy + y^2 \geq 3$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 + y - 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - y)^2 + x^2 + y - 3 \geq 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{y} = 2 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{y} = \frac{2x - 1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{2x}{2x - 1}$$

Vì: $y > 0; x > 0 \Rightarrow 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1/2$ Thay $y = \frac{2x}{2x - 1}$ vào $x^2 + y - 3 \geq 0$

Ta có:
$$x^2 + y - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2x}{2x - 1} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 6x + 3}{2x - 1} \geq 0 \quad (1)$$

Vì $2x - 1 > 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 + 2x - 6x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 4x + 3 \geq 0$

$$\text{Mà } 2x^3 - x^2 - 4x + 3$$

$$= 2x^3 - 2x^2 + x^2 - x - 3x + 3$$

$$= (x - 1)(2x^2 + x - 3)$$

$$= (x - 1)^2(2x + 3) \geq 0 \quad \forall x > 0$$

Vậy $(2x - y)^2 + x^2 + y - 3 \geq 0 \quad \forall x > 0; y > 0$