TỔ HỢP, KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NIUTƠN VÀ XÁC SUẤT

CHUYÊN ĐỀ
HOÁN VỊ – CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

I. LÝ THUYẾT

1. Hoán vị.

** Định nghĩa:*

Cho tập hợp A gồm n phần tử, mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tậphợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

** Số hoán vị.*

Số hoán vị của n phần tử, được ký hiệu là P_n

$$P_n = n!$$

Ví dụ 1. Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 học sinh vào 4 chỗ ngồi trong một bàn học sinh.

Giải

Số cách sắp xếp 4 học sinh vào 4 chỗ ngồi bằng số hoán vị của 4 phần tử

Vậy $P_4 = 4! = 1.2.3.4 = 24$ cách sắp xếp.

2. Chỉnh hợp.

** Định nghĩa:*

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$)

Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.

** Số chỉnh hợp.*

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là A_n^k

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (1 \leq k \leq n)$$

\+ Chỉnh hợp chập n của n phần tử chính là một hoán vị của n phần tử.

$$A_n^n = P_n$$

Ví dụ 2: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau.

Giải

Có $A_7^3 = 5.6.7 = 210$ số có 3 chữ sốkhác nhau

3. Tổ hợp.

** Định nghĩa:*

Giả sử tập A có n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho

** Số các tổ hợp.*

Số các tổ hợp chập k của n phần tử, ký hiệu là C_n^k

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ví dụ 3: Hãy tính tổ hợp C_6^3

Giải

Ta có: $C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{4.5.6}{1.2.3} = 20$

Ví dụ 4: Một cỗ bài túlơkhơ có 52 quân bài, chia cỗ bài trên thành 4 phần bằng nhau (mỗi phần 13 quân). Hỏi có bao nhiêu cách chia được 1 phần sao cho:

a. có 2 con át.

b. có ít nhất một con át.

Giải

a. Số cách chọn 2 con át từ 4 con át là: C_4^2

Số cách chọn 11 con bài còn lại trong 48 con bài là: C_{48}^{11}

Theo quy tắc nhân ta có: $C_4^2 . C_{48}^{11}$ cách chia.

b. Số cách chia được phần có 13 con bài là C_{52}^{13}

Số cách chia được 1 phần mà không có con át nào cả là: C_{48}^{13}

Vậy số cách chia được 1 phần có ít nhất 1 con át là C_{52}^{13} - C_{48}^{13}

** Tính chất của tổ hợp:*

+ Tính chất 1: $C_n^k = C_n^{n-k}$

+ Tính chất 2: $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng $C_n^r + 2C_n^{r-1} + C_n^{r-2} = C_{n+2}^r$, $2 \le r \le n$; n, r $\in$ Z

II. CÁC BÀI TẬP VẬN DỤNG:

**** Bài toán đếm có điều kiện:***

Bài 1. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ.

Giải.

Gọi 3 tỉnh có tên là A, B, C

Chọn đội thanh niên tình nguyện phục vụ tỉnh A có $C_{12}^4.C_3^1$

Chọn đội thanh niên tình nguyện phục vụ tỉnh A có $C_8^4.C_2^1$

Chọn đội thanh niên tình nguyện phục vụ tỉnh A có $C_4^4.C_1^1$

Theo quy tắc nhân ta có: $C_{12}^4.C_3^1 . C_8^4.C_2^1 \; C_4^4.C_1^1 = 207900$

Bài 2. Đội thanh niên xung kích của nhà trường có 12 học sinh gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này không quá 2 lớp.

Giải

Số cách chọn 4 học sinh từ 12 học sinh là C_{12}^4

Nếu chọn 4 học sinh từ 3 lớp thì:

Số cách chọn 2 học sinh từ lớp A, 1 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C là: $C_5^2.C_4^1.C_3^1$

Số cách chọn 1 học sinh từ lớp A, 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C là: $C_5^1.C_4^2.C_3^1$

Số cách chọn 1 học sinh từ lớp A, 1 học sinh lớp B và 2 học sinh lớp C là: $C_5^1.C_4^1.C_3^2$

⇒ Số cách chọn 4 học sinh từ 3 lớp là $C_5^2.C_4^1.C_3^1 + C_5^1.C_4^2.C_3^1 + C_5^1.C_4^1.C_3^2$

Vậy số cách chọn 4 học sinh từ không quá 2 lớp là:

$$C_{12}^4 - (C_5^2.C_4^1.C_3^1 + C_5^1.C_4^2.C_3^1 + C_5^1.C_4^1.C_3^2)$$

Bài 3. Một bộ bài tây có 52 con, cần rút ra 5 con bài. Hỏi có bao nhiêu cách:

a. Rút tuỳ ý.

b. Có ít nhất 2 con át.

Giải

a. Số cách rút 5 con bài tuỳ ý là: C_{52}^5

b. Ta xét các trường hợp:

- rút được 2 con át và 3 con bài không phải át là: $C_4^2.C_{48}^3$
- Rút được 3 con át và 2 con không phải át là: $C_4^3.C_{48}^2$
- Rút được 4 con át và 1 con không phải át là: $C_4^4.C_{48}^1$

Vậy có $C_4^2.C_{48}^3 + C_4^3.C_{48}^2 + C_4^4.C_{48}^1$ cách chọn.

Bài 4. Có 5 tem thư khác nhau và 6 bì thư cũng khác nhau. Người ta muốn chọn ra từ đó 3 tem thư và 3 bì thư, mỗi bì thư dán 1 tem. Có bao nhiêu cách như vậy?

Giải

Số cách chọn ra 3 tem thư trong 5 tem thư là C_5^3

Số cách chọn ra 3 phong bì thư trong 6 phong bì thư là: C_6^3

Số cách dán là 3!

Vậy số cách thực hiện công việc là $C_5^3 . C_6^3 .3! = 1200$ cách.

Bài 5. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình và 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, dễ và trung bình) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2.

Giải

Trong đề kiểm tra, số câu hỏi dễ có thể là 2 hoặc 3.

Ta có các trường hợp như sau:

- Trường hợp 1: Đề gồm 2 câu dễ, 2 câu trung bình và 1 câu khó: có $C_{15}^2.C_{10}^2C_5^1$
- Trường hợp 2: Đề gồm 2 câu dễ, 1 câu trung bình và 2 câu khó: có $C_{15}^2.C_{10}^1C_5^2$
- Trường hợp 3: Đề gồm 3 câu dễ, 1 câu trung bình và 1 câu khó: có $C_{15}^3.C_{10}^1C_5^1$

Vậy ta có $C_{15}^2.C_{10}^2C_5^1 + C_{15}^2.C_{10}^1C_5^2 + C_{15}^3.C_{10}^1C_5^1 = 56785$ đề thi

**** Bài toán sắp xếp:***

Bài 6.

a. Một người có 4 pho tượng khác nhau và muốn bày 4 pho tượng vào dãy 6 vị trí trên một kệ trang trí. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp?

b. Một người có 8 pho tượng khác nhau và muốn bày 6 pho tượng trên vào 6 vị trí trên một kệ trang trí. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp?

Giải

a. Số cách bày 4 pho tượng khác nhau vào dãy 6 vị trí trên một kệ trang trí là: A_6^4

b. Số cách chọn 6 pho tượng trong 8 pho tượng là: C_8^6

Số cách bày 6 pho tượng vào 6 vị trí là: 6!

Vậy có $C_8^6.6! = 20160$ cách

Bài 7. Có bao nhiêu cách :

a. Mời 1 trong số n bạn thân.

b. Tặng m vật cho n người.

Giải

a. Với một người có 2 cách mời: mời hoặc không mời.

Vậy với n người bạn thân thì có 2^n cách mời.

b. Với 1 đồ vật có thể tặng cho n người: có n cách tặng

Do đó có n.n.n….n = n^m cách tặng.

Bài 8. Một tổ có 10 học sinh. Có bao nhiêu cách:

a. Xếp thành 1 hàng dọc.

b. Ngồi quanh một bàn tròn 10 ghế.

Giải

a. Số cách xếp 10 học sinh thành 1 hàng dọc là 10!.

b. Người thứ nhất có 1 cách chọn, không kể vị trí vì ngồi ở đâu cũng giống nhau.

Khi người thứ nhất đã ngồi thì 9 vị trí còn lại cho 9 người ngồi, có 9!

Vậy có 1.9! = 9!

Bài 9. Có n nam và n nữ ngồi vào 2 dãy ghế đối diện. Có bao nhiêu cách sắp xếp:

a. Nam nữ ngồi tuỳ ý.

b. Nam nữ ngồi đối diện nhau.

Giải

a. Có 2 cách chọn dãy ghế.

Tổng cộng có 2n người, cần chọn n người thì có C_{2n}^n cách chọn.

Xếp n người đó vào n vìtí của dãy là: n!

Vậy có: 2. C_{2n}^n .n! cách.

b. Bước 1: Xếp n nam vào 1 dãy thì có n! cách

Bước 2: Xếp n nữ vào 1 dãy thì có n! cách

Bước 3: đổi chỗ n cặp nam nữ thì có 2.2….2 = 2^n cách.

Vậy có n!.n!.2^n cách.

**** Bài toán phân phối.***

Bài 10. Có bao nhiêu cách tặng 5 món quà khác nhau cho 3 người mà người nào cũng có quà.

Giải

Chia 5 món quà cho 3 người, người nào cũng có quà, ta có những cách chia như sau:

Trường hợp 1: Một người nhận 1 món quà, hai người còn lại, mỗi người nhận 2 món quà:

- Có 3 cách chọn người nhận 1 món quà
- Có 5 cách cho người nhận 1 món quà

- Có C_4^2 cách cho quà người nhận 2 món quà thứ nhất.
- Có 1 cách cho người cuối cùng

⇒ có 3.5. C_4^2.1 = 90 cách.

Trường hợp 2: Một người nhận 3 món quà, hai người mỗi người nhận 1 món quà.

- Có 3 cách chọn người nhận 3 món quà.
- Có C_5^3 cách cho người nhận 3 quà.
- Có 2 cách cho người nhận 1 món quà thứ nhất.
- Có 1 cách cho người nhận 1 quà thứ hai.

⇒ có 3. C_5^3.2 = 60 cách.

Vậy có 90 + 60 = 150 cách

Bài 11. Cho 5 quả cầu màu trắng khác nhau và 4 quả cầu xanh khác nhau. Ta sắp xếp 9 quả cầu đó vào một hàng 9 chỗ cho trước.

a. Có bao nhiêu cách sắp xếp khác nhau?

b. Có bao nhiêu cách sắp xếp cho hai quả cầu đứng cạnh nhau không cùng màu?

c. Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 5 quả cầu trắng đứng cạnh nhau.

Giải

a. Có 9! = 362880 cách

b. Gọi các vị trí cần sắp xếp là 123456789.

Vì có 5 quả cầu màu trắng, 4 quả cầu màu xanh nên các vị trí số 1, 3, 5, 7, 9 là các quả cầu trắng, các vị trí 2, 4, 6, 8 là các quả cầu màu xanh

Để sắp xếp 5 quả cầu trắng có 5! cách.

Để sắp xếp 4 quả cầu xanh có 4! cách

Vậy có 5!4! = 2880 cách

c. Ta gọi 5 quả cầu trắng là vị trí a, như vậy với 9 vị trí như trên thì có 4 vị trí số và 1 vị trí a.

Xếp 5 quả cầu trắng vào vị trí a có 5! cách.

Xếp 4 quả cầu xanh vào các vị trí số là 4!.

Có 5 các chọn vị trí a

Vậy có 5.5!4! = 14400 cách.

**** Bài toán đếm số:***

Bài 12: với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu:

a. Số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau.

b. Số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau:

Giải

Gọi số có 4 chữ số là abcd

a. Số cần lập là số lẻ nên:

Có 3 cách chọn số d.

Có 4 cách chọn số a.

Có A_4^2 cách chọn số bc

Vậy có: 3. 4 . A_4^2 = 144 số.

b. Số cần lập là số chẵn:

Trường hợp 1: d = 0

⇒ Số cách lập được số có 4 chữ số với d = 0 là A_5^3

Trường hợp d ≠ 0

Có 2 cách chọn số d.

Có 4 cách chọn số a

Có A_4^2 cách chọn bc

⇒ có 2.4. A_4^2 = 96 số.

Vậy có A_5^3 + 96 = 156 số.

Bài 13. Có bao nhiêu ước nguyên dương của số $2^3.3^4.5^6.7^8 11^{12}.13^{14}$

Giải

Ước nguyên dương của số $2^3.3^4.5^6.7^8 11^{12}.13^{14}$ khi đã phân tích ra thừa số nguyên tố thì có dạng: $2^a.3^b.5^c.7^d 11^e.13^f$

Với số a có thể chọn 0, 1, 2, 3 thì có 4 cách chọn.

Với số b có thể chọn 0, 1, 2, 3, 4 thì có 5 cách chọn.

Với số c có thể chọn 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 thì có 7 cách chọn.

Với số d có thể chọn 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 thì có 9 cách chọn.

Với số e có thể chọn 0, 1, 2, 3, …., 10, 11, 12 thì có 13 cách chọn.

Với số f có thể chọn 0, 1, 2, 3, …., 12, 13, 14 thì có 15 cách chọn.

Vậy có 4.5.7.9.13.15 = 245700 ước số.

**** Bài toán đếm số có điều kiện:***

Bài 14. Có bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau mà có mặt của chữ số 0 và chữ số 9.

Giải

Gọi số cần lập là A = $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$

Trường hợp $a_1 = 9$ ⇒ 9 $a_2a_3a_4a_5a_6$

Có 5 vị trí chọn số 0

4 vị trí còn lại chọn 4 trong 8 số còn lại ⇒ có A_8^4

⇒ 5. A_8^4

Trường hợp $a_1 \neq 9$, $a_2 = 9$ ⇒ $a_1 9 a_3a_4a_5a_6$

Số 0 có 4 vị trí

4 vị trí còn lại có A_8^4 cách chọn.

⇒ 4. A_8^4

Vì số 9 ở vị trí a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 là như sau nên ta có 5.4. A_8^4 số

Vậy có . 5. A_8^4 + 5.4. A_8^4 = 42000 số.

Bài 15. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số, trong đó số 1 có mặt đúng 3 lần và các số khác có mặt đúng 1 lần.

Giải

Gọi số có 7 chữ số là $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$

Trường hợp $a_1 = 1$

Chọn 2 vị trí trong 6 vị trí cho số 1 là C_6^2.

4 vị trí còn lại cho 4 số 0, 2, 3, 4 ⇒ có 4! cách

⇒ C_6^2.4!

Trường hợp $a_1 \neq 1$

Chọn 3 vị trí cho số 1 là C_6^3

Có 3 vị trí cho số 0
3 vị trí còn lại cho 3 số còn lại ⇒ 3! Cách
⇒ 3 C_6^3.3!
Vậy có C_6^2.4! + 3 C_6^3.3! = 720 cách

Bài 16. Có thể thành lập bao nhiêu số có 8 chữ số, trong đó chữ số 1 và chữ số 6 đều có mặt 2 lần, các chữ số 2, 3, 4, 5 đều cómặt đúng 1 lần.

Giải

Chọn vị trí số 1 có C_8^2 cách.
Chọn vị trí số 6 có C_6^2 cách.
4 vị trí còn lại chọn cho 4 số còn lại ⇒ 4! cách.
Vậy có C_8^2. C_6^2.4! = 10.080 cách.

Bài 17. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số, trong đó chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, các chữ số còn lại có mặt không quá 1 lần.

Giải

Gọi số cần lập là B = $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$
Chọn vị trí cho số 2 có C_7^2 cách.
Chọn vị trí cho số 3 có C_5^3 cách.
Hai vị trí còn lại chọn cho các số còn lại, nếu tính cả a_1 có thể bằng 0 thì có A_8^2 cách.
⇒ có C_7^2. C_5^3. A_8^2 cách.
Nếu $a_1 = 0$
Chọn vị trí cho số 2 có C_6^2
Chọn vị trí cho sô 3 có C_4^3
Vị trí còn lại chọn cho 7 số còn lại, có 7 cách chọn
⇒ C_6^2. C_4^3.7
Vậy số các số cần lập là: C_7^2. C_5^3. A_8^2 - C_6^2. C_4^3.7 = 11340 số

**** Bài toán chia hết***
Bài 18. Từ các chữ số từ 1 đến 9, lập các số tự nhiên có 9 chữ số khác nhau, có bao nhiêu số:
a. Chia hết cho 5. b. Số 9 đứng ở chính giữa.

Giải

a. số các số chia hết cho 5 là: A_8^8 = 40320 số.
b. Chữ số 9 ở chính giữa thì có 1 cách chọn, 8 vị trí còn lại cho 8 số
⇒ số các số thoả mãn yêu cầu là A_8^8 = 40320 số

Bài 19. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 9.

Giải

Gọi số có 3 chữ số và chia hết cho 9 là số abc, với a + b +c 9

Vậy {a, b, c} = {0, 4, 5}, {1, 3, 5}, {2, 3, 4}

Với tập {0, 4, 5} có 2.2.1 = 4 số

Với các tập{1, 3, 5} và {2, 3, 4}, mỗi tập có 3! Số

Vậy có 4 + 2.3! = 16 số.

**** Bài toán đếm số hơn, kém.***

Bài 20. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau, có bao nhiêu số bé hơn 345

Giải

Gọi số cần lập là $\overline{abc}$, vì $\overline{abc}$ < 345 nên ta có các trường hợp:

Trường hợp 1: a ≠ 3

a có thể là 1 hoặc 2 ⇒ có 2 cách chọn a.

$\overline{bc}$ chọn trong 5 số ⇒ có A_5^2

⇒ có 2. A_5^2 = 40 số.

Trường hợp a = 3, vì $\overline{3bc}$ < 345

Nếu b = {1, 2,} thì b có 2 cách chọn

Chữ số c có 4 cách chọn.

⇒ 2.4 = 8 cách chọn.

Nếu b = 4 thì có 2 cách chọn c ⇒ có 2 số.

⇒ có 2 + 8 = 10 số.

Vậy có 10 + 40 = 50 số cần lập.

**** Bài toán giải phương trình, bất phương trình:***

Bài 21. Tìm số tự nhiên n sao cho: $\frac{5}{n+1}.\frac{(n+1)!}{(n-3)!4!}-\frac{n!}{24(n-3)(n-4)!}=5(n-2)$

Bài 22. Giải các phương trình sau:

1. $C_x^1+C_x^2+C_x^3=\frac{7}{2}x$
2. $C_{14}^k+C_{14}^{k+2}=2C_{14}^{k+1}$
3. $C_x^1+6C_x^2+6C_x^3=9x^2-14x$
4. $P_xA_x^2+72=6(A_x^2+2P_x)$
5. $A_x^2.C_x^{x-1}=48$
6. $\frac{A_x^4}{A_{x+1}^3-C_x^{x-4}}=\frac{24}{23}$
7. $C_{12}^x=C_{12}^3$

Bài 23. Giải bất phương trình:

1. $A_x^3+5A_x^2-21x\le 0$
2. $\frac{1}{2}A_{2x}^2-A_x^2\le\frac{6}{x}.C_x^3+10$

Bài 24. Tìm các số hạng:

a. dương của dãy $x_n=\frac{5}{4}A_{n-2}^2-C_{n-1}^4+C_{n-1}^3$, n ≥ 4

b. âm của dãy $y_n=\frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}}-\frac{143}{4P_n}$, n ≥ 1

**** Bài toán giải hệ phương trình:***

Bài 25. Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$

b. $C_{x+1}^y : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 6:5:2$

Bài tập về nhà

Bài 1. Giả các phương trình sau:

a. $\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}$

b. $C_x^1 + 6C_x^{x-2} + 6C_x^{x-3} = 46C_x^{x-1} - 14x^2$

c. $C_x^2C_x^{x-2} + 2C_x^2C_x^3 + C_x^3C_x^{x-3} = 100$

d. $P_xA_x^2 + 180 = 6(A_x^2 + 5P_x)$

Bài 2. Tính giá trị của biểu thức A = $\frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$

Biết $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$

Bài 3. Cho dãy $\{x_n\}$ xác định bởi : $x_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n}$, với $n \in Z^+$.
Tìm các số âm trong dãy số trên.

(ĐH An Ninh – A - 2001)

III. GIẢI ĐỀ THI

Bài 1. Từ 7 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau.

(ĐH An ninh – A - 1997)

HD: Gọi số chẵn cần lập là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$

TH 1: Nếu $a_5 = 0 \Rightarrow$ có A_6^4 *số.*

TH 2: Nếu $a_5 \neq 0 \Rightarrow$ có 3.5. A_5^3

Vậy có A_6^4 *+ 3.5.* A_5^3 *= 1260 số*

Bài 2. Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Hỏi có thể thành lập được bao nhiêu số có 7 chữ số từ những chữ số trên, trong đó chữ số 4 có mặt đúng 3 lần, các chữ số khác có mặt đúng 1 lần.

(ĐH An Ninh – D - 2001)

Bài 3.

a. Chứng minh: $C_n^k + 2C_n^{k-1} + C_n^{k-2} = C_{n+2}^k$ $(2 \leq k \leq n)$

b. Hỏi với 10 chữ số từ 0 đến 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.

(ĐH Cảnh sát ND – A - 1999)

Bài 4. Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 ta lập các số mà mỗi số có 5 chữ số, trong đó các chữ số khác nhau từng đôi một. Hỏi.

a. Hỏi có bao nhiêu số trong đó có mặt của chữ số 2?

b. Có bao nhiêu số trong đó phải có nặt hai chữ số 1 và 6?

(ĐH Cần thơ - D - 2000)

Bài 5. Có 5 thẻ trắng và 5 thẻ đen, mỗi loại được đánh số từ 1 đến 5. Có bao nhiêu cách sắp xếp tất cả các thẻ này thành một hàng sao cho hai thẻ cùng màu không nằm liền nhau

(ĐH Đà Lạt – D - 2000)

Bài 6. Cho 8 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt của chữ số 6.

(ĐH Giao thông vận tải – A - 2001)

Bài 7. Trong số 16 học sinh có 3 học sinh giỏi, 5 khá, 8 trung bình. Hỏi có bao nhiêu cách chia số học sinh đó thành 2 tổ, mỗi tổ 8 người sao cho ở mỗi tổ đều có học sinh giỏi và mỗi tổ có ít nhất 2 học sinh khá.

(Học viện kỹ thuật quân sự – A - 2001)

Bài 8. Trong mặt phẳng cho một thập giác lồi $A_1A_2\ldots A_{10}$. Xét tất cả các tam giác mà 3 đỉnh của nó là đỉnh của hình thập giác. Hỏi trong số các tam giác đó có bao nhiêu tam giác mà cả 3 cạnh của nó đều không phải là cạnh của thập giác.

(ĐH Ngoại thương – A - 2001)

Bài 9. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 thiết lập tất cả các số có 6 chữ số khác nhau. Hỏi trong số các số đã thiết lập được có bao nhiêu số mà chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau.

(ĐH Ngoại thương CS2 TP HCM – A - 2001)

Bài 10. Có 6 học sinh nam và 3 học sinh nữ xếp theo một hàng dọc để đi vào lớp. Hỏi có bao nhiêu cách để có đúng 2 học sinh nam đứng xen kẽ 3 học sinh nữ (Khi đổi chỗ hai học sinh bất kỳ cho nhau ta được 1 cách sắp xếp mới)

(ĐH Nông nghiệp I – A - 2001)

Bài 11. Giải bất phương trình $A_x^3 + 5A_x^2 \le 21x$

(ĐHQG HN – B - 1998)

Bài 12. Từ các chữ số 0, 1, 3, 5, 7 có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5?

(ĐHQG HN – B - 2000)

Bài 13. Cho tập hợp A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

a. Có bao nhiêu tập con X của tập A thoả mãn điều kiện X chứa 1 và không chứa 2?

b. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập A và không bắt đầu bởi 123?

(ĐHQG TP HCM – A - 1999)

Bài 14. Một thầy giáo có 12 cuốn sách đôi một khác nhau, trong đó có 5 cuốn sách văn học, 4 cuốn sách âm nhạc và 3 cuốn sách hội hoạ. Ông muốn lấy ra 6 cuốn và đem tặng cho 6 em học sinh A, B, C, D, E, F mỗi em một cuốn.

a. Giả sử thầy giáo chỉ muốn tặng cho các em học sinh trên những cuốn sách thuộc hai thể loại văn học và âm nhạc. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tặng?

b. Giả sử thầy giáo muốn rằng sau khi tặng sách xong, mỗi một trong 3 loại văn học, âm nhạc, hội hoạ đều còn lại ít nhất một cuốn. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn?

(ĐHQG TP HCM – A - 2000)

Bài 15. Cho các chữ số 1, 2, 5, 7, 8. Có bao nhiêu cách lập ra một số gồm ba chữ số khác nhau từ 5 chữ số trên sao cho:

a. Số tạo thành là một số chẵn.

b. Số tạo thành là một số không có chữ số 7.

c. Số tạo thành là một số nhỏ hơn 278.

(ĐH Thái nguyên – A - 1997)

Bài 16. Có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lý nam. Lập một đoàn công tác gồm 3 người cần có cả nam và nữ, cần có cả nhà toán học và nhà vật lý. Hỏi có bao nhiêu cách?

(ĐH Y Hà Nội – B - 2000)

Bài 17. Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 3 chữ số khác nhau và không lớn hơn 789.

(ĐH Y Hà nội – B - 2001)

Bài 18. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau, trong đó chữ số đầu tiên phải khác 0.
(ĐH Y Dược TP HCM – B - 1997)

Bài 19. Cho đa giác đều $A_1A_2\ldots A_{2n}$ nội tiếp đường tròn (O, R). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$, tìm n?

(Đề ĐH + CĐ - B - 2002)

Bài 20. Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 4$). Biết rằng, số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của tập A. Tìm $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất.

(Đề ĐH + CĐ - B - 2006)