

2. Плоска система сил

План

1. Система збіжних сил. Геометричний та аналітичний способи визначення рівнодійної системи збіжних сил
2. Геометрична та аналітичні умови рівноваги плоскої системи збіжних сил. Раціональний вибір координатних осей
3. Додавання паралельних сил
4. Момент сили відносно точки
5. Пара сил. Момент пари сил. Властивості пар. Додавання пар. Умова рівноваги плоскої системи пар
6. Теорема про паралельне перенесення сили. Зведення плоскої довільної системи сил до цього центра. Головний вектор та головний момент плоскої системи сил. Окремі випадки приведення плоскої системи сил до цього центра
7. Умови рівноваги плоскої довільної системи сил, рівняння рівноваги. Рівновага плоскої системи паралельних сил. Раціональний вибір напрямку координатних осей і центра моментів
8. Визначення опорних реакцій балок
9. В'язі з тертям

1. Система збіжних сил. Геометричний та аналітичний способи визначення рівнодійної системи збіжних сил

Системою збіжних сил називають сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці.

Систему збіжних сил, лінії дії яких розміщені в одній площині, називають **плоскою**. Всі сили такої системи можна перенести вздовж ліній їх дій у спільну точку перетину цих ліній. Від цього дія цієї системи сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, що впливає з другої аксіоми статyki. Отже, будь-яка система збіжних сил може бути замінена еквівалентною системою сил, прикладених в одній точці.

Якщо на тіло діють дві сили $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, прикладені в одній точці O , то рівнодійна $\vec{R}$ цих сил дорівнює їх геометричній сумі (рис. 1а):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

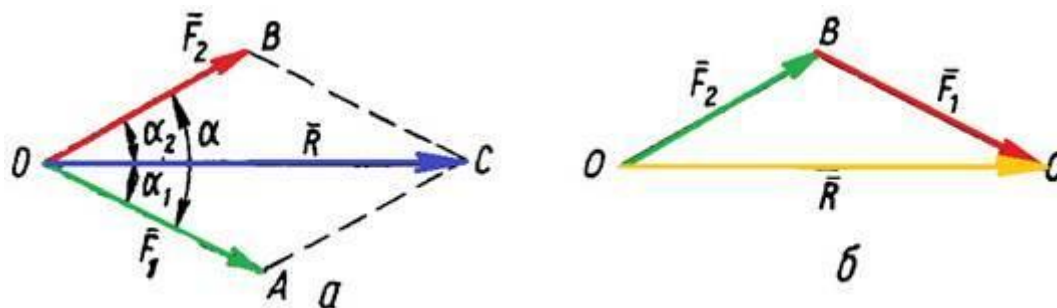


Рис. 1

Для знаходження рівнодійної двох сил $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, прикладених в одній точці O , не треба будувати весь паралелограм $OACB$ (рис. 1а), а досить побудувати один з трикутників OAC чи OBC (рис. 1б).

Трикутник OBC (або OAC) називають **силовим трикутником**, а такий спосіб додавання двох сил – **правилом трикутника**.

Якщо є кілька збіжних сил, то, застосовуючи послідовно правило додавання двох сил, роблять висновок, що **рівнодійна кількох збіжних сил також дорівнює їх геометричній сумі** (рис. 2):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

тобто, щоб спростити запис, границі зміни індекс $\sum$ іноді опускають.

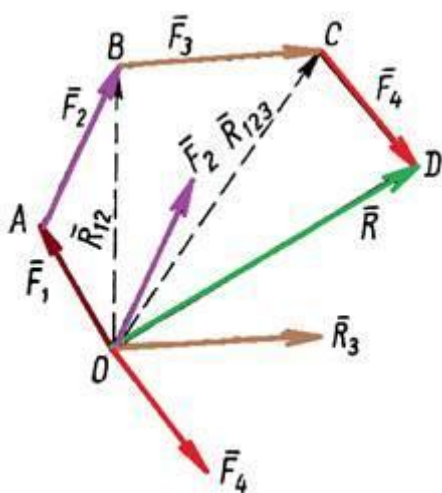


Рис. 2

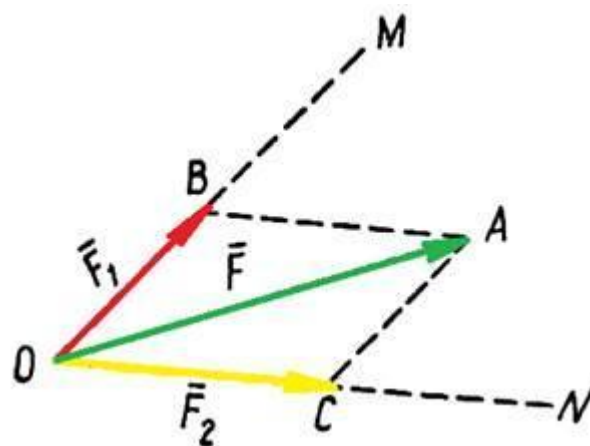


Рис. 3

Багатокутник $OABCD$ (рис. 2), сторони якого у вибраному масштабі дорівнюють певним силам і однаково з ними спрямовані, називається силовим багатокутником. У силовому багатокутнику стрілки завжди спрямовані одна за одною. Замикаюча сторона OD силового багатокутника спрямована завжди від початку першої сили до кінця останньої і за модулем та за напрямком у вибраному масштабі вона зображає рівнодійну певної системи збіжних сил. Правило додавання збіжних сил за

способом багатокутника є загальним для складання будь-яких векторів і називається *геометричним додаванням*.

Розкладання сили на складники є оберненою дією додавання сил. Особливо часто доводиться розкласти задану силу $\vec{F}$ на два складники за двома заданими напрямками OM та ON (рис. 3). Для цього з кінця A вектора сили $\vec{F}$ проводимо прямі AB і AC , які відповідно паралельні прямим ON і OM , і отримаємо паралелограм $OBAC$. Сила $\vec{F}$, очевидно, буде діагоналлю цього паралелограма. Вектори $\vec{F}_1 = \vec{OB}$ і $\vec{F}_2 = \vec{OC}$ є шуканими складовими силами.

Проекцією сили $\vec{F}$ на вісь x називається відрізок між основами A_1 і B_1 перпендикулярів, опущених на цю вісь з початку і кінця сили (рис. 4а). Точка A_1 буде початком, а B_1 – кінцем проекції. Проекція буде додатною, якщо її напрямок збігається з додатним напрямком осі, якщо ж ні – то від'ємна.

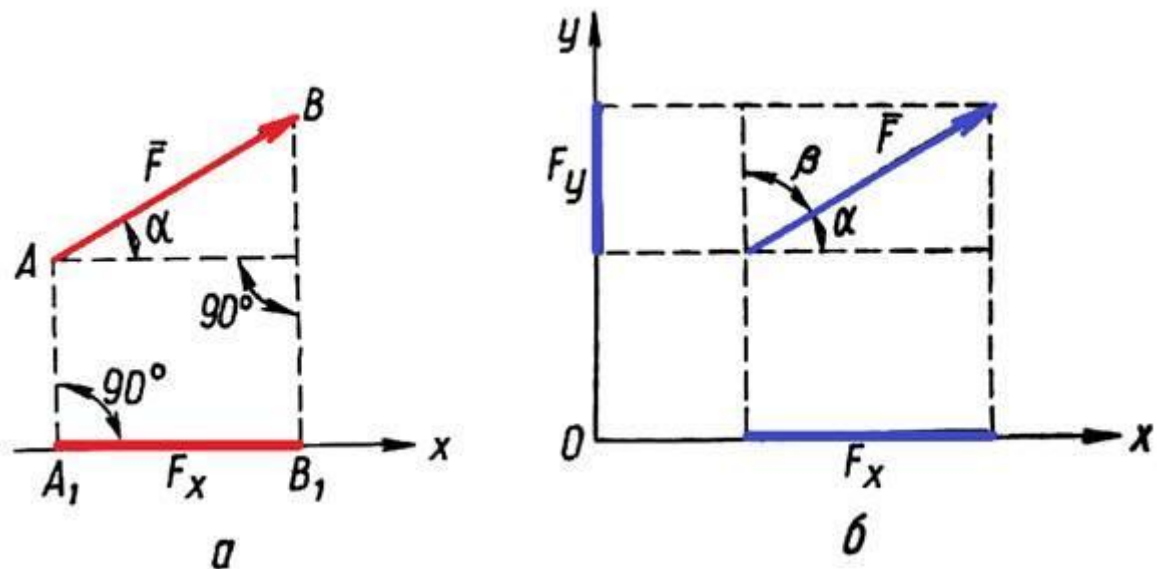


Рис. 4

Із рис. 4б бачимо, що залежність між проекцією і величиною проектованої сили визначається рівністю:

$$F_x = F \cos \alpha,$$

де α – кут між силою і додатним напрямком осі.

Очевидно, якщо $\alpha < 90^\circ$ і $\alpha > 270^\circ$ проекція сили на вісь буде додатною, а якщо $90^\circ < \alpha < 270^\circ$ – від'ємною. Якщо $\alpha = 90^\circ$ або $\alpha = 270^\circ$, то проекція сили на вісь дорівнює нулю, оскільки сила $\vec{F}$ перпендикулярна до осі. Величину сили $\vec{F}$ можна знайти за її проекцією на дві взаємно перпендикулярні осі (x та y), користуючись теоремою Піфагора (рис. 1.12б):

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}.$$

Лінію дії і напрямок сили визначають за допомогою косинусів кутів між силою і додатними напрямками осей проекцій:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}.$$

Теорема: *Проекція рівнодійної на будь-яку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових сил на цю саму вісь.*

Доведемо цю теорему. Для цього з сил побудуємо силовий багатокутник $ABCDE$ (рис. 5), в якому рівнодійну зображують вектором $\vec{R} = \vec{AE}$.

Опустимо перпендикуляри на вісь x із усіх вершин цього багатокутника. Тоді, позначивши проекції сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ на вісь x відповідно через $F_{1x}, F_{2x}, F_{3x}, F_{4x}$, матимемо:

$$\vec{F}_{1x} = ab, \quad \vec{F}_{2x} = -bc, \quad \vec{F}_{3x} = cd, \quad \vec{F}_{4x} = -de.$$

Відрізки bc і de від'ємні, оскільки вони спрямовані у бік, протилежний напрямку осі проекцій. Очевидно, що $F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = ab - bc + cd - de$.

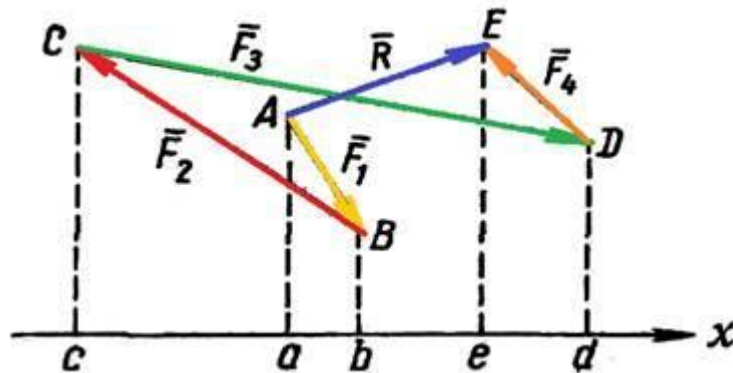


Рис. 5

З рис. 5 бачимо, що $ab - bc = -ac$; $-ac + cd = ad$; $ad - de = ae$. Але ae є проекцією рівнодійної $\vec{R} = \vec{AE}$ на вісь x . Позначивши проекцію рівнодійної $\vec{R}$ на вісь x через R_x , матимемо:

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = R_x.$$

Отже, теорему доведено. Проекція рівнодійної на вісь x дорівнюватиме:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}$$

Спроектувавши цю саму систему сил на вісь y , перпендикулярну осі x , і застосувавши відповідні позначення, дістанемо:

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy}$$

Величину рівнодійної $\vec{R}$ знаходимо за формулою:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2}.$$

Лінію дії і напрям рівнодійної знаходимо за допомогою косинусів кутів між рівнодійною і додатними напрямками осей:

$$\cos(\hat{R}, x) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(\hat{R}, y) = \frac{R_y}{R}.$$

2. Геометрична та аналітичні умови рівноваги плоскої системи збіжних сил. Раціональний вибір координатних осей

Для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна сил дорівнювала нулю.

Згідно з двома способами визначення рівнодійної умова рівноваги плоскої системи збіжних сил може бути виражена у двох формах.

1. Умова рівноваги у геометричній формі

Сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці (рис. 6а), будуть зрівноважені, очевидно, тоді, коли їх рівнодійна дорівнюватиме нулю. У такому випадку довжина замикаючої сторони силового багатокутника має дорівнювати нулю, тобто силовий багатокутник буде замкнутим (рис. 6б).

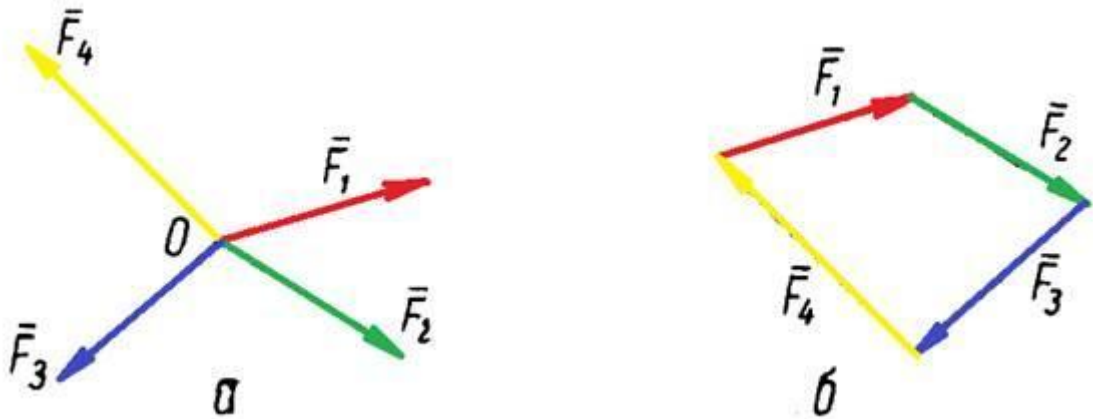


Рис. 6

Отже, геометрична умова рівноваги збіжних сил, що лежать в одній площині, полягає в тому, щоб багатокутник сил був замкнутим або інакше: *збіжні сили, розміщені в одній площині, перебувають у рівновазі, коли їх геометрична (векторна) сума дорівнює нулю:*

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = 0.$$

2. Умова рівноваги в аналітичній формі

Аналітично величину рівнодійної визначають за формулою:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2} = 0.$$

Але коли $R = 0$, то нулю дорівнює і вираз під коренем, а це можливо тоді, коли кожна складова під коренем дорівнює нулю, тобто:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0.$$

Ці рівняння називають рівняннями рівноваги плоскої системи збіжних сил.

Отже, для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на кожну з двох координатних осей, що лежать у площині дії сил, дорівнювали нулю.

Рівновага трьох непаралельних сил, розміщених в одній площині

Теорема: Якщо три непаралельні сили, розміщені в одній площині, взаємно зрівноважуються, то лінії дії їх перетинаються в одній точці.

Нехай на тіло в точках A_1 , A_2 та A_3 діють три непаралельні сили $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$, що взаємно зрівноважуються і розміщені в одній площині (рис. 7). Лінії дії двох сил, наприклад $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, очевидно, перетинаються в одній точці A . Переносимо ці сили вздовж їх ліній дії в точку A та додаємо їх за правилом паралелограма. Тоді сила $\vec{R}$ буде їх рівнодійною. Отже, на тіло тепер діятимуть тільки дві сили: $\vec{R}$ та $\vec{F}_3$. Оскільки за умовою ці сили зрівноважуються, то вони мають бути рівними за модулем і спрямовані за однією прямою у протилежні боки. Таким чином, лінія дії сили $\vec{F}_3$ збігатиметься з лінією дії сили $\vec{R}$, а отже, проходить через точку A , в якій перетинаються лінії дії сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. Це й треба було довести.

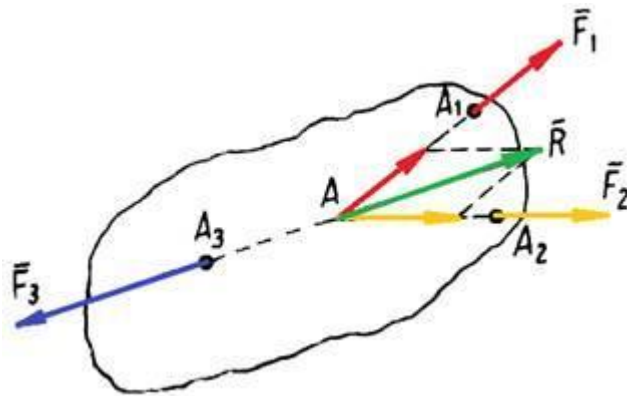


Рис. 7

Ця теорема має велике методичне значення під час розв'язування задач статки. При цьому доцільно дотримуватися такої методики.

1. З'ясовуємо рівновагу якого тіла треба розглянути, щоб розв'язати задачу, тобто знайти шукані величини. Зазвичай розглядають рівновагу того тіла, до якого прикладені задані і шукані сили або сили, що дорівнюють шуканим (тобто, якщо треба знайти тиск на опору, то можна розглянути рівновагу тіла, до якого прикладена рівна цій силі реакція опори тощо).

2. Звільняємо тіло від в'язей і зображаємо на рисунку сили, що діють на тіло, і реакції відкинутих в'язей, зображуємо систему координат таким чином,

щоб одна із невідомих реакцій була паралельна до однієї із осей (це спростить розв'язування рівнянь рівноваги).

3. До знайденої системи сил застосовуємо умови рівноваги, які відповідають цій системі.

4. Визначаємо шукані величини і досліджуємо результати.

Під час розв'язування задач на рівновагу плоскої системи збіжних сил потрібно раціонально розміщувати осі координат. Якщо одну із координатних осей розмістити вздовж лінії дії однієї із невідомих реакцій, то рівняння рівноваги можна буде розв'язати набагато простіше.

3. Додавання паралельних сил

Під час знаходження рівнодійної двох паралельних сил, що діють на тверде тіло, сили можуть бути спрямовані: в одну і в різні сторони.

Додавання двох сил, спрямованих в одну сторону (рис. 8а).

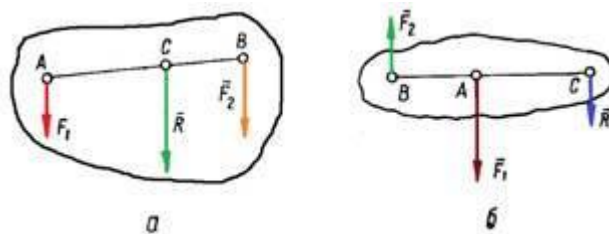


Рис. 8

Враховуючи властивості пропорції і рівності $BC + AC = AB$ і $F_1 + F_2 = R$, матимемо:

$$\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}.$$

Отже, *рівнодійна двох паралельних сил, спрямованих в одну сторону, паралельна цим силам, спрямована у ту саму сторону і дорівнює за модулем їх сумі; лінія дії рівнодійної цих сил проходить між точками прикладання складових сил на відстанях від цих точок, обернено пропорційних модулям сил.*

Додавання двох сил, спрямованих у різні сторони (рис. 8б).

$$R = F_1 - F_2$$

Положення точки C вибирають так, щоб справджувалася рівність:

$$\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}.$$

Отже, *рівнодійна двох паралельних сил, спрямованих у різні сторони, паралельна силам, спрямована в сторону більшої сили і дорівнює за модулем*

їх різниці; лінія дії рівнодійної проходить за більшою силою на відстанях від складових, обернено пропорційних цим силам.

За допомогою знайдених рівнянь можна розв'язувати задачі про розкладання цієї сили на дві паралельні їй сили, спрямовані в одну або різні сторони.

4. Момент сили відносно точки

Поняття моменту сили можна застосувати до сил, прикладених до всякого твердого тіла. Момент сили можна визначити відносно будь-якої точки, яку називають центром моменту.

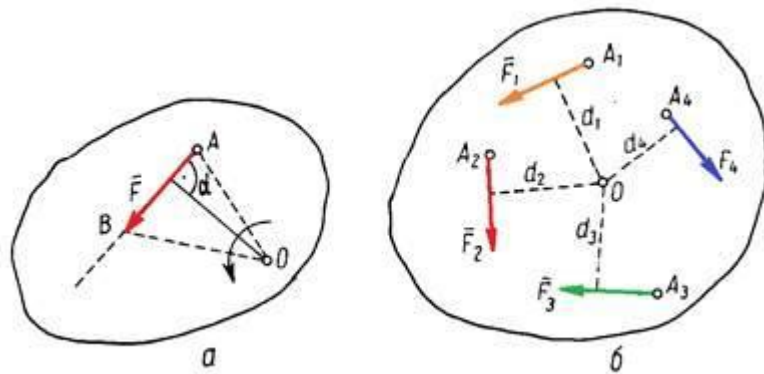


Рис. 9

Моментом сили відносно будь-якої точки на площині називається добуток модуля сили на її плече відносно цієї точки, взятий із знаком плюс або мінус (рис. 9а):

$$M_{O(\vec{F})} = \pm Fd.$$

Момент сили вважають додатним, якщо сила намагається повернути тіло відносно точки O (центра моменту) проти обертання годинникової стрілки, а від'ємним – за стрілкою.

Чисельно момент сили P відносно точки O дорівнює подвоєній площі трикутника AOB :

$$M_{O(\vec{F})} = \pm 2\Delta AOB,$$

де A і B – початок і кінець сили; O – центр моменту.

Якщо лінія дії сили проходить через точку O , то $d = 0$ і момент сили відносно цієї точки дорівнює нулю.

Одиниця моменту дорівнює добуткові одиниці сили на одиницю довжини. Якщо силу вимірювати в кілограмах ($\kappa\Gamma$), а плече – в метрах ($м$), то момент сили буде в кілограмометрах ($\kappa\Gamma м$); якщо силу вимірювати в ньютоні ($Н$), а плече – в метрах ($м$), то момент сили буде в ньютонметрах ($Нм$):

$$1 \kappa\Gamma м \approx 9,81 Нм.$$

Якщо до тіла прикладено кілька сил, що лежать в одній площині, то можна обчислити суму моментів цих сил відносно будь-якої точки O в цій самій площині (рис. 9б). Отже:

$$M_{O(\vec{F}_1)} = F_1 d_1; \quad M_{O(\vec{F}_2)} = F_2 d_2; \quad M_{O(\vec{F}_3)} = F_3 d_3.$$

Момент M_O , що дорівнює алгебраїчній сумі моментів цих сил відносно будь-якої точки O в тій самій площині, називають головним моментом сил відносно цієї точки:

$$M_O = M_{O(\vec{F}_1)} + M_{O(\vec{F}_2)} + \dots + M_{O(\vec{F}_n)}.$$

Доведемо **теорему Варіньона** про момент рівнодійної.

Момент рівнодійної відносно будь-якого центра дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно того самого центра.

Нехай маємо сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, лінії дії яких перетинаються в точці A (рис. 10). Через будь-який центр O проведемо вісь Ox , перпендикулярну до прямої OA . Щоб довести теорему, знайдемо відповідно вирази моментів

$$M_{O(\vec{F}_1)}, M_{O(\vec{F}_2)}, \dots, M_{O(\vec{F}_n)}, \quad M_{O(\vec{R})} = \pm 2\Delta AOB_1.$$

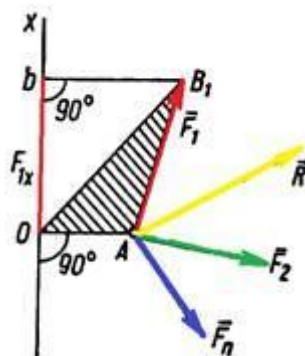


Рис. 10

З рисунка бачимо, що $2\Delta AOB_1 = OA \cdot Ob = OA \cdot F_{1x}$,

де F_{1x} – проекція сили $\vec{F}_1$ на вісь Ox .

Отже:

$$M_{O(\vec{F}_1)} = OA \cdot F_{1x}.$$

Так можна обчислити моменти всіх інших сил.

Позначимо рівнодійну сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ через $\vec{R}$, де $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$.

Тоді за теоремою про проекцію суми сил на вісь дістанемо:

$$R_x = \sum F_{ix}.$$

Помноживши обидві частини останньої рівності на OA , матимемо:

$$OA \cdot R_x = \sum (OA \cdot F_{ix}).$$

Тоді

$$M_{O(\vec{R})} = \sum M_{O(\vec{F}_i)},$$

що є математичним виразом теореми Варіньона.

5. Пара сил. Момент пари сил. Властивості пар. Додавання пар. Умова рівноваги плоскої системи пар

Парою сил називають систему, що складається з двох паралельних сил, рівних за модулем, але спрямованих у протилежні сторони (рис. 11).



Рис. 11

Пара сил намагається надати тілу обертового руху. Обертальна дія пари залежить від величини сили – F , плеча пари – h , напрямку обертання, площини дії пари і характеризується моментом пари.

Плече пари – це найкоротша відстань між лініями дії сил пари. **Момент пари** дорівнює добутку модуля однієї з сил пари на плече пари: $M = \pm F h$.

Момент пари є додатним, якщо вона намагається обертати тіло в напрямку, протилежному руху годинникової стрілки.

Пару сил не можна зрівноважити однією силою, її можна зрівноважити тільки іншою парою. Алгебраїчна сума проекцій сил пари на вісь завжди дорівнює нулю.

Теорема про еквівалентні пари: дві пари, що лежать в одній площині, еквівалентні, якщо вони мають однакові алгебраїчні моменти.

Наслідки

1. Не змінюючи механічного стану тіла, пару сил можна перемістити як завгодно в площині її дії.
2. Не змінюючи механічного стану тіла, можна змінити модуль сил і плече пари, але так щоб її момент залишався незмінним.
3. Щоб задати пару, досить задати її момент.

Теорема про додавання пар: система пар, що лежать в одній площині, еквівалентна одній парі, що лежить в тій самій площині і має момент, який дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар.

$$M = \sum M_k.$$

Для рівноваги плоскої система пар сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів цих пар дорівнювала нулю.

$$\sum M_k = 0.$$

6. Теорема про паралельне перенесення сили. Зведення плоскої довільної системи сил до цього центра. Головний вектор та головний момент плоскої системи сил. Окремі випадки приведення плоскої системи сил до цього центра.

Доведемо теорему: механічний стан тіла не порушиться, якщо силу перенести паралельно самій собі в будь-яку точку твердого тіла, додаючи при цьому пару сил, алгебраїчний момент якої дорівнює алгебраїчному моменту перенесеної сили відносно точки, в яку сила переноситься.

Нехай на тверде тіло діє сила F , прикладена в точці A (рис. 12а). Дія цієї сили не зміниться, якщо в будь-якій точці B тіла прикласти дві зрівноважені сили F' і F'' так, щоб $F' = F$, а $F'' = -F$. Одержана система трьох сил являє собою силу F' , що дорівнює F , але прикладену в точці B , і пару (F, F'') , момент якої $M = M_B(F)$.

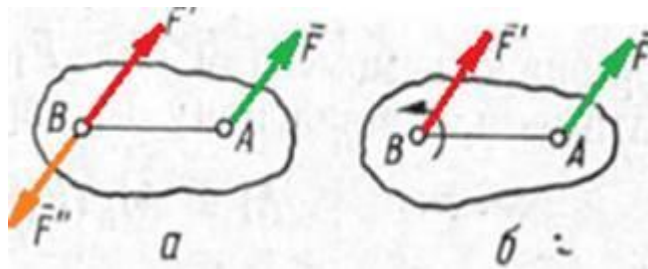


Рис. 12

Отже, теорему доведено.

Пару сил (F, F'') називають приєднаною парою сил.

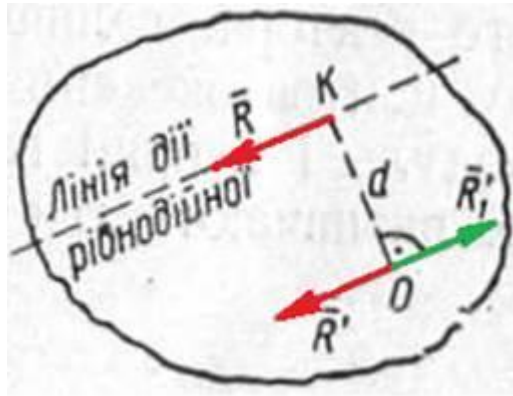
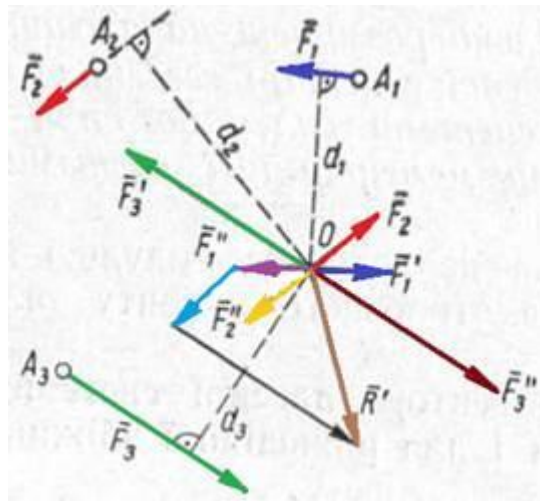
Зведення плоскої системи сил до цього центра

Нехай на тверде тіло діють сили F_1, F_2, F_3 , що лежать в одній площині (рис. 13а). Візьмемо в цій площині будь-яку точку O , яку назвемо центром зведення, і на підставі доведеної вище теореми перенесемо всі сили в центр O , добавивши при цьому систему трьох пар сил. Моменти цих пар дорівнюють моментам сил F_1, F_2, F_3 відносно центра зведення O .

Додаючи сили F_1, F_2, F_3 за правилом багатокутника, дістанемо їх рівнодійну R' , що дорівнює геометричній сумі сил.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Геометричну суму всіх сил системи називають головним вектором системи сил. Модуль і напрямок головного вектора не залежать від центра зведення.



а

б

Рис. 13

Модуль і напрямок головного вектора плоскої системи сил визначається так само, як і для рівнодійної системи збіжних сил:

$$R = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2}; \quad \cos(R, X) = \frac{F_{kx}}{R}; \quad \cos(R, Y) = \frac{F_{ky}}{R}.$$

Плоска система пар еквівалентна одній парі, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів цих пар.

$$M = \sum M_o(F_k)$$

Цю пару з моментом M називають головним моментом заданої системи сил.

Таким чином, сили, що довільно розміщені на площині, можна звести до однієї сили, прикладеної в центрі зведення, яка дорівнює головному вектору цієї системи сил, і до пари сил з моментом, що дорівнює головному моменту цієї системи сил відносно центра зведення.

Розглянемо можливі випадки зведення сил, що довільно розміщені на площині.

Випадок 1. Якщо $R = 0$; $M \neq 0$, то задана система сил зводиться до пари сил, момент якої дорівнює головному моменту сил відносно центра зведення.

Випадок 2. Якщо $R \neq 0$; $M = 0$, то задана система сил зводиться до рівнодійної цієї системи сил, що за величиною і напрямком дорівнює головному вектору; лінія дії рівнодіючої проходить через центр зведення O .

Випадок 3. Якщо $R \neq 0$; $M \neq 0$. Задана система сил зводиться до однієї сили – рівнодійної цієї системи сил, що дорівнює головному вектору сил і

прикладена в точці (рис. 14б) на відстані $OK = \frac{M}{R}$ від центра зведення точки O .

Випадок 4. Якщо $R = 0$; $M = 0$, то плоска система довільно розміщених сил перебуває у рівновазі.

7. Умови рівноваги плоскої довільної системи сил, рівняння рівноваги. Рівновага плоскої системи паралельних сил. Раціональний вибір напрямку координатних осей і центра моментів

Плоска система довільно розміщених сил перебуває у рівновазі, коли головний вектор і головний момент системи дорівнюють нулю.

$$R = \sqrt{\left(\sum F_{ix}\right)^2 + \left(\sum F_{iy}\right)^2} = 0; \quad M = \sum M_o(F_k) = 0.$$

Отже, для рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил необхідно і достатньо, щоб сума проекцій всіх сил на кожен з двох довільно вибраних координатних осей дорівнювала нулю і щоб алгебраїчна сума моментів всіх сил відносно будь-якої точки в площині також дорівнювала нулю.

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum M_o(F_k) = 0.$$

Під час розв'язування деяких задач буває доцільно замість одного або двох рівнянь проекцій складати рівняння моментів.

Якщо одне рівняння проекцій замінити, то умови рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил матимуть вигляд:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum M_o(F_k) = 0; \quad \sum M_A(F_k) = 0.$$

Якщо замінити два рівняння проекцій, то умови рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил матимуть вигляд:

$$\sum M_o(F_k) = 0; \quad \sum M_A(F_k) = 0; \quad \sum M_B(F_k) = 0.$$

В окремому випадку, коли на тіло діє плоска система паралельних сил, напрямком координатних осей можна вибрати так, щоб вісь X була перпендикулярна до паралельних сил, а вісь Y – паралельна їм. Тоді проекція кожної сили на вісь X дорівнюватиме нулю; отже незалежно від того

чи зрівноважується ця система сил, чи ні, завжди матимемо $\sum F_{ix} = 0$.

Тому для рівноваги паралельних сил, що лежать в одній площині, достатньо двох рівнянь $\sum F_{iy} = 0; \quad \sum M_o(F_k) = 0$.

Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума всіх сил дорівнювала нулю і щоб алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки площини також дорівнювала нулю.

8. Визначення опорних реакцій балок

Зосереджені сили та розподілені навантаження

Зосереджене навантаження – це вид зовнішнього навантаження, яке прикладено до деякої точки тіла. Ми розглядали сили, які були представлені у вигляді вектора, прикладеного до точки. Проте у природі існує велика кількість взаємодій тіл, які здійснюються не в точці і які не можна уявити у вигляді вектора, прикладеного до точки.

Такими силовими факторами є сили тиску рідини або газу на поверхню твердих тіл, сили тяжіння, як масові сили, електромагнітні сили тощо. А тому у теоретичній механіці вводять поняття про розподілені сили, які діляться на поверхневі та об'ємні.

Поверхневі сили діють на деяку поверхню тіла. Об'ємні сили діють на кожний елемент об'єму тіла, яке розглядається. Прикладом таких сил є сила тяжіння.

У теоретичній механіці розглядають дію на тіло тільки зосереджених сил, які прикладені до абсолютно твердих тіл. А тому розподілене навантаження необхідно замінити його рівнодією, тобто зосередженою силою. Введемо декілька загальних положень.

Розподілене навантаження – навантаження, яке безперервно діє на деякій площі тіла; характеризується його інтенсивністю q , тобто величиною сили, яка припадає на одиницю об'єму тіла (у випадку об'ємних сил), на одиницю площі (у випадку поверхневих сил) та на одиницю довжини (якщо поверхню, на яку діє навантаження, можна вважати лінією, тобто шириною поверхні можна знехтувати). В останньому випадку розподілене навантаження має назву плоского, на силових схемах його зображують у вигляді епюри, тобто графіка інтенсивності навантаження, прикладеного до лінійного контуру тіла.

У загальному випадку розподілене навантаження зображується у вигляді певної кривої, що відображає цей закон зміни інтенсивності навантаження на ділянці тіла (рис. 14). Напрямок дії навантаження показують стрілками.

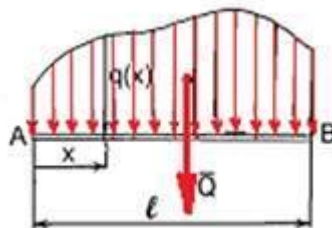


Рис. 14

Спочатку розглядатимемо тільки рівномірно розподілене навантаження та навантаження, розподілене за лінійним законом. Замінюємо розподілене навантаження зосередженою силою.

Розглянемо ці два випадки:

1) *рівномірно розподілене навантаження* (або навантаження, розподілене за законом прямокутника) показують на схемах у вигляді прямокутника, розміри якого такі: висота – це інтенсивність навантаження $\bar{q}$, довжина – це довжина l ділянки тіла, на якій діє навантаження. Стрілки показують напрямок дії навантаження (рис. 15). Для того щоб замінити це навантаження рівнодієюною силою $\bar{Q}$, треба визначити її. У такому випадку:

$$Q = q \cdot l,$$

де q – інтенсивність навантаження, $[H / м]$;

l – довжина ділянки тіла, на якій прикладене навантаження, $[м]$.

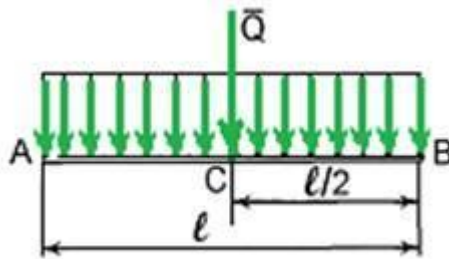


Рис. 15

Точка С прикладання рівнодіючої сили $\bar{Q}$ розміщується посередині ділянки тіла, на якій діє навантаження. Тобто $AC = l/2$, а напрямок збігається з напрямком розподіленого навантаження.

2) *навантаження розподілене за лінійним законом* (тобто за законом трикутника). У цьому випадку (рис. 16) інтенсивність розподіленого навантаження на ділянці l змінюється від 0 до максимального значення q_{max} . Рівнодійна сила $\bar{Q}$ від цього навантаження за величиною дорівнює:

$$Q = \frac{l}{2} q_{max}$$

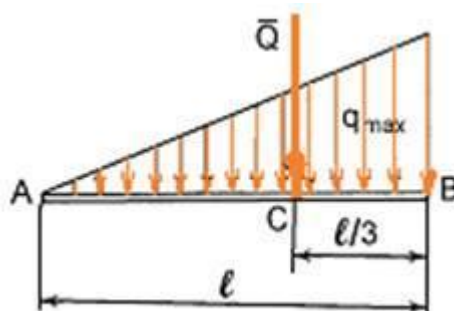


Рис. 16

Точка С прикладання рівнодійної $\bar{Q}$ розташована на відстані $AC = \frac{2}{3} \cdot l$
 або $BC = \frac{1}{3} \cdot l$, а напрямок збігається з напрямком навантаження.

Види опор балок

З технічного погляду опори конструкцій досить різноманітні. Під час формування розрахункової схеми все різноманіття існуючих опорних пристроїв схематизується у вигляді ряду основних типів опор, з яких найбільше часто зустрічаються: *шарнірно-рухлива опора* (можливі позначення для неї представлено на рис. 17а), *шарнірно-нерухлива опора* (рис. 17б) і *жорстке защемлення або закладення* (рис. 17с).



Рис. 17

У шарнірно-рухливій опорі виникає одна опорна реакція, перпендикулярна опорній площині. Така опора позбавляє опорний переріз одного ступеня волі, тобто перешкоджає зсуву в напрямку опорної площини, але допускає переміщення в перпендикулярному напрямку й поворот опорного перерізу.

У шарнірно-нерухливій опорі виникають вертикальна й горизонтальна реакції. Тут неможливі переміщення за напрямками опорних стрижнів, але допускається поворот опорного перерізу.

У жорсткому защемленні виникають вертикальна й горизонтальна реакції й опорний (реактивний) момент. При цьому опорний переріз не може зміщатися й повертатися.

Методика визначення опорних реакцій балок

Для розв'язування задач на рівновагу плоскої довільної системи сил необхідно скласти розрахунково-силову схему задачі. Прикласти до осі балки задані активні сили. Далі умовно звільнити балку від в'язей і замінити їх відповідними реакціями в'язей. Таким чином, балка знаходитиметься у рівновазі під дією плоскої системи довільних сил. Для розв'язання задачі потрібно використати умови рівноваги, скласти рівняння рівноваги і розв'язати їх.

9. В'язі з тертям

Тертям називають опір, що виникає під час переміщення одного тіла по поверхні іншого. Залежно від характеру цього переміщення розрізняють два види тертя : тертя ковзання і тертя кочення.

Тертям ковзання називають опір, що виникає під час ковзання одного тіла по поверхні іншого.

Основною причиною тертя є те, що поверхні стичних тіл не абсолютно гладкі, а в тій чи іншій мірі шорсткі. Тому під час переміщення одного тіла по поверхні іншого потрібна деяка сила для подолання опору, що чинять мікроскопічні нерівності поверхонь.

Машення тертьових поверхонь значно зменшує тертя, оскільки масло заповнює всі нерівності і безпосереднє тертя поверхонь замінюється ковзанням їх по маслу і ковзання шарів між собою.

Силу тертя, що виникає за відносного спокою тіла, називають тертям спокою, а силу тертя, що діє під час ковзання тіла, називають тертям руху.

Якщо позначити через F максимальну величину сили тертя спокою, а через R_n нормальну реакцію опорної поверхні, то на підставі цього закону матимемо:

$$F = f R_n ,$$

де: f – коефіцієнт пропорційності, що називається *коефіцієнтом тертя ковзання*.

Опір, що виникає під час кочення одного тіла по іншому, називають тертям кочення. Цей опір зумовлено деформаціями цих тіл. Тому точка прикладання нормальної реакції зміщується так, що виникає пара сил, яку називають парою тертя кочення.

Максимальну величину плеча цієї пари, що залежить від матеріалу заданих тіл, називають *коефіцієнтом тертя кочення*, який має розмірність довжини. Максимальна величина моменту пари тертя кочення дорівнює:

$$M_k = kN,$$

де N – нормальна реакція;

k – коефіцієнт тертя кочення.