

BÖLÜM I

Dersin Adı	Matematik	Tarih	2-6 Aralık 2024
Sınıf	10	Süre	6 ders saati
Alt Öğrenme Alanı	FONKSİYONLAR		
Konu	Fonksiyonlarda Bileşke İşlemi		

BÖLÜM II

Kazanım	10.2.2.2. Fonksiyonlarda bileşke işlemiyle ilgili işlemler yapar.
Değerler	ÖZDENETİM – Özgüven Sahibi Olma
Yöntem ve Teknikler	Düz anlatım, soru-cevap, problem çözme, örnek olay, beyin fırtınası, kavram haritası
Kullanılan Araç-Gereçler	Ders kitabı, yazı tahtası, etkileşimli tahta, z-kitap, internet, fotoğraf, pergel, cetvel

BÖLÜM III

Öğrenme-Öğretme Süreci

FONKSİYONLARDA BİLEŞKE İŞLEMİ



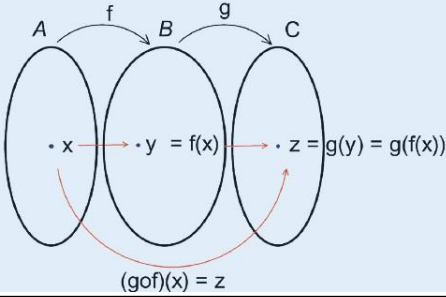
İki fonksiyonun bileşkesi birbiriyle bağlantılı, arka arkaya yapılan iki işlem gibidir.

Örneğin x Türk lirasına üretilen bir otomobilin bayilere geliş fiyatı $y = f(x)$ fonksiyonu şeklinde, bu otomobilin kullanıcılara satış fiyatı $z = g(y)$ fonksiyonu şeklinde ifade edilirse x Türk lirasına üretilen bir otomobilin kullanıcıya maliyetini gösteren fonksiyon, $z = g(y) = g(f(x))$ ile tanımlanabilir.



Bilgi

A, B, C boş kümeden farklı birer küme olmak üzere $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ fonksiyonları verilsin. A kümesinin elemanlarını f ve g fonksiyonları yardımıyla C kümesinin elemanları ile eşleştiren fonksiyona **f ile g fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu** denir ve $(g \circ f)(x)$ şeklinde gösterilir. Burada f fonksiyonunun görüntü kümesi ile g fonksiyonunun tanım kümesi eşittir.



$g \circ f$ fonksiyonu f nin tanım kümesindeki herhangi bir x değerini, g nin değer kümesindeki $g(f(x))$ biçimindeki bir z ile eşler. Bu ifade sembollerle

$f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ olmak üzere
 $g \circ f = \{(x, z) | x \in A \text{ ve } z = g(f(x)) \in C\}$
 biçiminde gösterilebilir.

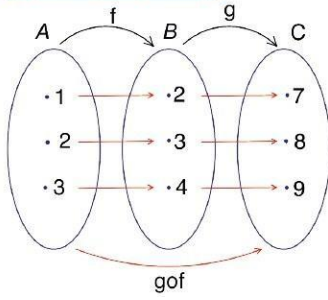


Örnek

$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ ve $g = \{(2, 7), (3, 8), (4, 9)\}$ ise gof fonksiyonunun tanım kümesini ve görüntü kümesini bulunuz.



Çözüm



Verilen fonksiyonlar Venn şeması ile yandaki gibi gösterilirse gof fonksiyonunun tanım kümesi $A = \{1, 2, 3\}$ ve görüntü kümesi $C = \{7, 8, 9\}$ bulunur.

Bu durumda $\text{gof} = \{(1, 7), (2, 8), (3, 9)\}$ olur.



Örnek

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + k$ fonksiyonu veriliyor. $(f \circ f)(x) = ax + 18$ olduğuna göre a ve k değerlerini bulunuz.



Çözüm

$$(f \circ f)(x) = ax + 18 \Rightarrow f(f(x)) = ax + 18$$

$$f(2x + k) = ax + 18$$

$$2 \cdot (2x + k) + k = ax + 18$$

$$4x + 3k = ax + 18 \Rightarrow a = 4 \text{ ve } 3k = 18 \text{ ise } k = 6 \text{ olur.}$$



Örnek

$\max\{a, b\}$: a ve b elemanlarından büyük olan, $\min\{a, b\}$: a ve b elemanlarından küçük olan olmak üzere $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \max\left\{\frac{1}{x}, \sqrt{x}\right\}$ ve $g : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \min\left\{\frac{2}{x}, \frac{x}{3}\right\}$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre $(f \circ g)\left(\frac{5}{2}\right)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$$(f \circ g)\left(\frac{5}{2}\right) = f\left(g\left(\frac{5}{2}\right)\right) = f\left(\min\left\{\frac{2}{\frac{5}{2}}, \frac{\frac{5}{2}}{3}\right\}\right) = f\left(\min\left\{\frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right\}\right) = f\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$= \max\left\{\frac{1}{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}}\right\}$$

$$= \max\left\{\frac{5}{4}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right\} = \frac{5}{4} \text{ olur.}$$



Bilgi

$f : A \rightarrow B$ ve $g : B \rightarrow C$ fonksiyonları bire bir ise $\text{gof} : A \rightarrow C$ fonksiyonu da bire birdir.



Buluyorum

$\text{gof} : A \rightarrow C$ olduğundan $x_1, x_2 \in A$ alınsın.

$$(\text{gof})(x_1) = (\text{gof})(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \quad (g \text{ fonksiyonu bire bir olduğundan})$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \quad (f \text{ fonksiyonu bire bir olduğundan})$$

Bu durumda gof fonksiyonu bire bir fonksiyondur.



Bilgi

$f : A \rightarrow B$ ve $g : B \rightarrow C$ fonksiyonları örten ise $\text{gof} : A \rightarrow C$ fonksiyonu da örtendir.



Buluyorum

$f : A \rightarrow B$ ve $g : B \rightarrow C$ örten fonksiyonlar olmak üzere,
 $\forall b \in B$ için $\exists a \in A$ öyle ki $f(a) = b$ yazılabilir.
 $\forall c \in C$ için $\exists b \in B$ öyle ki $g(b) = c$ yazılabilir.

Bu durumda $g(b) = c \Rightarrow g(f(a)) = c \Rightarrow (\text{gof})(a) = c$ olur. O hâlde $c \in C$ için $(\text{gof})(a) = c$ olacak şekilde $a \in A$ vardır ve **gof örten bir fonksiyondur.**



Örnek

$A \neq \emptyset$ olmak üzere A kümesi üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonları veriliyor.

- I. fog fonksiyonu bire bir ise g fonksiyonu bire birdir.
 - II. gof fonksiyonu örten ise g fonksiyonu örtendir.
- ifadelerinin doğru olup olmadıklarını bulunuz.



Çözüm

- I. $x_1, x_2 \in A$ olsun.

$$\begin{aligned} x_1 \neq x_2 &\Rightarrow (\text{fog})(x_1) \neq (\text{fog})(x_2) \quad (\text{fog bire bir olduğundan}) \\ &\Rightarrow f(g(x_1)) \neq f(g(x_2)) \quad ((\text{fog})(x) = f(g(x)) \text{ olduğundan}) \\ &\Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2) \end{aligned}$$

Bu durumda fog fonksiyonu bire bir iken g fonksiyonu da bire birdir.

- II. gof örten ise $\forall y \in A$ için $\exists x \in A$ öyle ki $(\text{gof})(x) = y$ olur. Bu durumda gof un değer kümesi A daki her y için gof un tanım kümesi A da, gof altındaki görüntüsü y olan en az bir tane x bulabiliriz.
 $(\text{gof})(x) = y \Rightarrow g(f(x)) = y \Rightarrow g(z) = y \quad (z = f(x) \text{ olacak şekilde } \exists z \in A)$
 f, A da tanımlı olduğundan $f(x) = z, A$ nın elemanıdır. Şimdi, g nin değer kümesindeki herhangi bir y için g nin tanım kümesi olan A da bir z vardır ki $g(z) = y$ sağlanır. Buradan g örtendir.



Örnek

$f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonu, tanım kümesindeki her elemanı bu elemanın asal bölenleri sayısına götüren bir fonksiyon olarak tanımlanıyor. Buna göre

- $(f \circ f)(420)$ değerini bulunuz.
- $(f \circ f)(x) = 2$ olduğuna göre x in en küçük değerini bulunuz.



Çözüm

- $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ olur. Buradan 420 nin asal bölen sayısı 4 olduğundan $f(420) = 4$ olur. Bu durumda $(f \circ f)(420) = f(f(420)) = f(4) = 1$ olur. Çünkü 4 sayısını bölen asal sayı sadece 2 sayısı olduğundan 1 tanedir.
- $(f \circ f)(x) = 2$ ise $f(f(x)) = 2$ olur. Bu durumda 2 tane asal böleni olan en küçük pozitif tam sayı 6 olduğundan $f(x) = 6$ seçilir. Buradan $f(x) = 6$ ise x en az $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030$ olur.



Örnek

Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonları için

- $(f \circ g)(x) = f(x) + g(x)$
- $f(x) = 2x - 5$

olduğuna göre $g(3)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(x) + g(x) \\ f(g(x)) &= f(x) + g(x) \\ 2 \cdot g(x) - 5 &= 2x - 5 + g(x) \\ g(x) &= 2x \\ g(3) &= 2 \cdot 3 \\ g(3) &= 6 \text{ olur.}\end{aligned}$$

BÖLÜM IV

Ölçme ve Değerlendirme

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 5$ ve
 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 4x$ ise

- a) $(f \circ g)\left(\frac{1}{4}\right)$ değerini bulunuz.
b) $(f \circ f)\left(\frac{1}{2}\right)$ değerini bulunuz.
c) $(g \circ g)\left(-\frac{1}{16}\right)$ değerini bulunuz.

2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + 2$ ve
 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 4 + x$ fonksiyonları veriliyor. Aşağıdaki fonksiyonların eşleştirme kuralını yazınız ve grafiklerini çiziniz

- a) $f \circ g$
b) $g \circ f$
c) $f \circ f$
ç) $g \circ g$

3. Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonları için $(f \circ g)(x) = 3x - 1$ ve $f(x) = 3x - 1$ olarak veriliyor. Bu durumda $(\underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{100 \text{ tane}})(-1)$ değerini bulunuz.

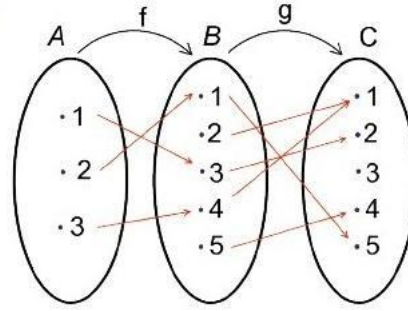
100 tane

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |1 - x|$ olmak üzere $(\underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{99 \text{ tane}})(1)$ değerini bulunuz.

99 tane

5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 12|$ olduğuna göre $(f \circ f)(a) = 4$ eşitliğini sağlayan a değerlerini bulunuz.

6.



Yukarıdaki şekilde verilenlere göre $g \circ f$ fonksiyonunu liste yöntemi ile yazınız.

7. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi veriliyor. A kümesi üzerinde tanımlı yazılabilecek tüm fonksiyonlardan seçilen bir tanesinin görüntü kümesinin tek sayılardan oluşma olasılığını bulunuz.

8. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $(f \circ g)(x) = 2 \cdot g^2(x) - 3 \cdot g(x) - 7$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f(-10)$ değerini bulunuz.

Dersin Diğer Derslerle İlişkisi

BÖLÜM IV

Planın Uygulanmasına İlişkin Açıklamalar

Konu öngörülen ders saatinde işlenmiş olup gerekli değerlendirmeler yapılarak amacına ulaşmıştır.

.....

.....

Matematik Öğretmeni

.../.../2024

UYGUNDUR

Okul Müdürü

.....