SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2022-2023
Môn thi: **TOÁN (Chuyên Toán)**
Ngày thi : 20/6/2022
Thời gian làm bài : 150 phút

Bài I. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^2-4x+2\sqrt{2x-1}+1=0$

2) Cho các số thực a,b và c thỏa mãn $ab+bc+ca=1.$ Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}-\frac{2}{a+b+c-abc}$$

Bài II. (2,0 điểm)

1) Chứng minh nếu n là số tự nhiên lẻ thì $3^{2n+1}-7$ chia hết cho 20

2) Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(x;y)$ sao cho $y\left(x^2+x+1\right)=(x+1)\left(y^2-1\right)$

Bài III. (2,0 điểm)

1) Tìm hai số nguyên dương m và n sao cho $\frac{m^3}{m+n}$ và $\frac{n^3}{m+n}$ đều là các số nguyên tố

2) Với a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3,$ tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab+2bc+3ca-3abc$

Bài IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn với $AB<AC.$ Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với ba cạnh BC,CA,AB lần lượt tại ba điểm D,E và F

1) Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AI và $DF.$ Chứng minh đường thẳng CM vuông góc với đường thẳng AI
2) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AI và DE. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng $BC.$ Chứng minh tam giác KMN là tam giác cân

3) Các tiếp tuyến tại M và N của đường tròn $(K;KM)$ cắt nhau tại điểm S. Chứng minh đường thẳng AS song song với đường thẳng ID

Bài V. (1,0 điểm) Cho tập hợp A gồm 70 số nguyên dương không vượt quá $90.$ Gọi B là tập hợp gồm các số có dạng $x+y$ với $x\in A$ và $y\in B$ (x,y không nhất thiết phân biệt)

1) Chứng minh $68\in B$
2) Chứng minh B chứa 91 số nguyên liên tiếp

ĐÁP ÁN

Bài I. (2,0 điểm)

3) Giải phương trình $x^2-4x+2\sqrt{2x-1}+1=0$

Điều kiện : $x\ge\frac{1}{2}$. Phương trình đã cho có thể được viết lại thành :

$(x-1)^2=\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2$

Từ đây, ta có $x-1=\sqrt{2x-1}-1$ hoặc $x-1=1-\sqrt{2x-1}$

Giải 2 phương trình và đối chiếu ta có $x=1$

4) Cho các số thực a,b **và** c **thỏa mãn** $ab+bc+ca=1.$ **Tính giá trị của biểu thức**

$$P=\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}-\frac{2}{a+b+c-abc}$$

Do $ab+bc+ca=1\Rightarrow\frac{a}{a^2+1}=\frac{a}{a^2+ab+bc+ca}=\frac{a}{(a+b)(a+c)}$

Chứng minh tương tự, ta có : $\frac{b}{b^2+1}=\frac{b}{(b+c)(b+a)};\frac{c}{c^2+1}=\frac{c}{(c+a)(c+b)}$

Ngoài ra cũng có $ab+bc+ca=1$ nên :

$$\frac{2}{a+b+c-abc}=\frac{2}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc}=\frac{2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Từ kết quả trên ta suy ra :

$$P=\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}-\frac{2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$=\frac{2(ab+bc+ca-1)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0$$

Vậy $P=0$

Bài II. (2,0 điểm)

3) Chứng minh nếu n là số tự nhiên lẻ thì $3^{2n+1}-7$ chia hết cho 20

Đặt $n=2k+1$ với k tự nhiên, khi đó ta có :

$3^{2n+1}-7=3^{4k+3}-7=81^k.27-7\equiv 27-7\equiv 0(\text{mod }20)\Rightarrow dfcm$

4) Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(x;y)$ sao cho $y(x^2+x+1)=(x+1)(y^2-1)$

Dễ thấy $(x^2+x+1;x+1)=(x(x+1)+1,x+1)=1$

Từ phương trình, ta suy ra $y(x^2+x+1)$ chia hết cho $x+1$. Mà $(x^2+x+1,x+1)=1$ nên $y\vdots(x+1)$

Đặt $y=k(x+1)$ với k nguyên dương. Khi đó, từ phương trình đã cho, ta suy ra :

$k(x^2+x+1)=y^2-1=k^2(x+1)^2-1$. Do đó :

$1=k^2(x+1)^2-k(x^2+x+1)>k^2(x+1)^2-k(x+1)^2=k(k-1)(x+1)^2\geq 4k(k-1)$ .Suy ra $k<2$

Mà k là số nguyên dương nên $k=1\Rightarrow y=x+1$. Thay trở lại phương trình đã cho, ta được :

$x^2+x+1=(x+1)^2-1=x^2+2x$. Từ đó $x=1\Rightarrow y=2$

Vậy phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;2)$

Bài III. (2,0 điểm)

3) Tìm hai số nguyên dương m và n sao cho $\frac{m^3}{m+n}$ và $\frac{n^3}{m+n}$ đều là các số nguyên tố

Không mất tính tổng quát, giả sử $m \geq n$. Đặt $m^3 = p(m+n)$ với p là số nguyên tố. Từ đây, ta suy ra $m \vdots p$. Kết hợp với $m \geq n$, ta có :

$p = \frac{m^3}{m+n} \geq \frac{m^3}{2m} = \frac{m^2}{2} \geq \frac{p^2}{2}$ hay $p \leq 2$ mà p nguyên tố nên $p = 2$

Như vậy, dấu đẳng thức trong dãy đánh giá trên phải xảy ra, tức là phải có $m = n = p = 2$.

Thử lại, ta thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất 1 nghiệm $(m,n)=(2,2)$

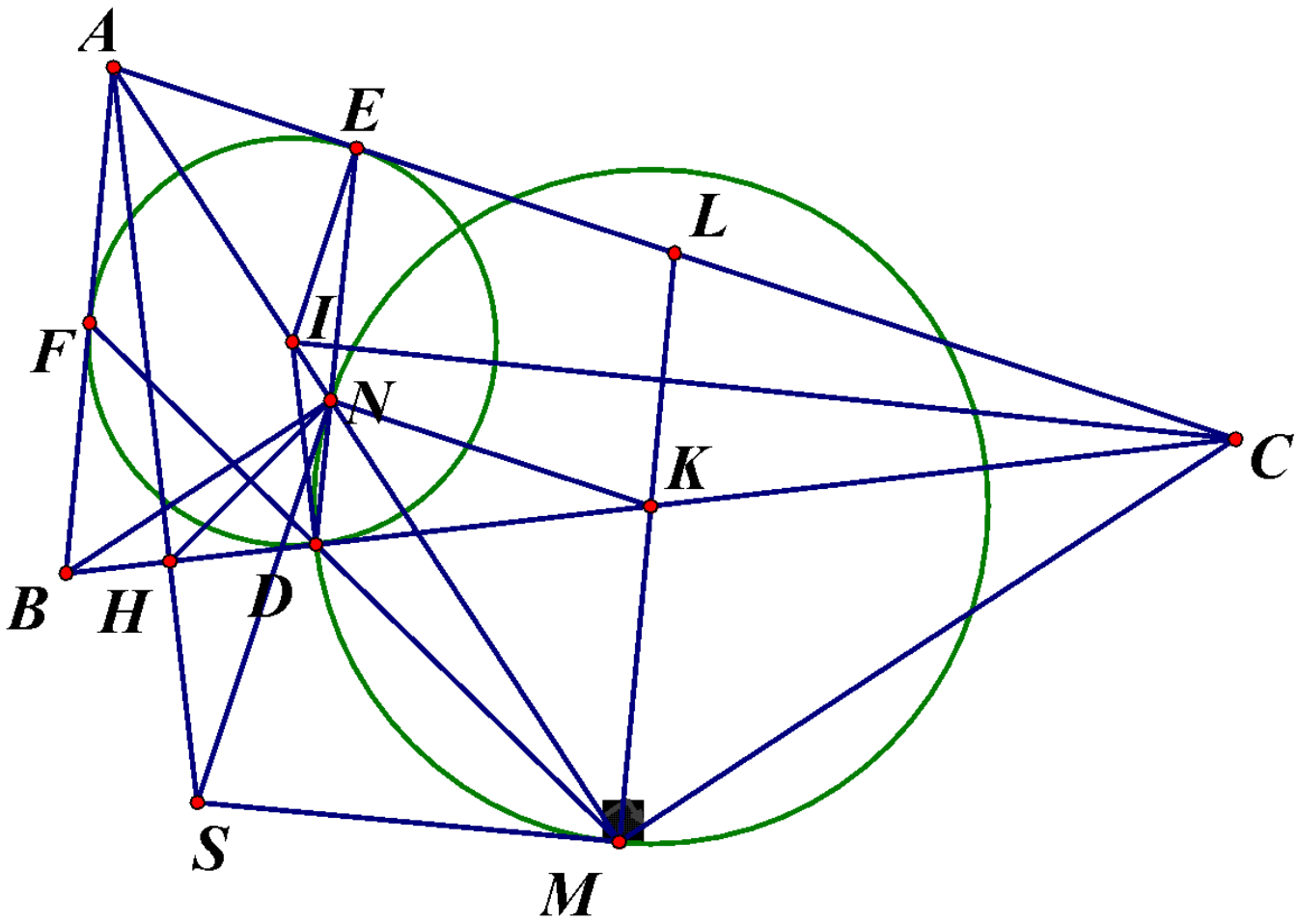
4) Với a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3,$ tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + 2bc + 3ca - 3abc$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có :

$$P \leq ab + 2bc + 3ca = a(b+c) + 2c(a+b) \leq \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$$

Vậy $Max\, P = \frac{27}{4} \Leftrightarrow a = c = \frac{3}{2}, b = 0$

Bài IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC.$ Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại ba điểm D, E và F



4) Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AI và $DF.$ Chứng minh đường thẳng CM vuông góc với đường thẳng AI

Do (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên ta có AI, BI, CI là các đường phân giác của tam giác $ABC; ID \perp BC, IE \perp CA, IF \perp AB$

Do BD, BF là các tiếp tuyến của (I) nên tam giác BDF cân tại B. Suy ra :

$$\angle BDF = \angle BFD = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2}$$

Xét tam giác AMF , có : $\angle AMF = \angle BFD - \angle MAF = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} - \frac{\angle BAC}{2} = \frac{\angle ACB}{2}$

Suy ra $\angle IMD = \angle ICD$. Do đó , tứ giác $CIDM$ nội tiếp. Suy ra $\angle IMC = \angle IDC = 90^\circ$

Vì thế $CM \perp AI$

5) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AI và DE. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng $BC.$ Chứng minh tam giác KMN là tam giác cân

Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AI và DE . Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh tam giác KMN là tam giác cân.

Chứng minh B,F,I,N,D cùng thuộc một đường tròn, suy ra $BN \perp AM \Rightarrow BN // CM.$

Gọi H là giao điểm của BN và AC,J là giao điểm của CM và $AB.$

Ta có:

N là trung điểm của BH (ΔABH cân) và M là trung điểm của CJ (ΔACJ cân).

Suy ra $KN = \frac{1}{2}CH;\ KM = \frac{1}{2}BJ;\ CH = BJ.$

Do vậy $KN = KM \Rightarrow \Delta KMN$ cân

6) Các tiếp tuyến tại M và N của đường tròn $(K;KM)$ cắt nhau tại điểm S. Chứng minh đường thẳng AS song song với đường thẳng ID

Dựng đường cao AP thì ta có tứ giác $APMC$ nội tiếp suy ra $\widehat{PMN} = \widehat{PCA}.$

Dễ nhận thấy KN // AC nên ta có $\widehat{PCA} = \widehat{NKP} \Rightarrow \widehat{PMN} = \widehat{NKP}.$

Do đó tứ giác $PMKN$ nội tiếp

Vì SM, SN là các tiếp tuyến của (K, KM) nên ta có S, M, K, N cùng thuộc đường tròn

đường kính SK . Suy ra P, S, M, K, N cùng thuộc một đường tròn đường kính SK nên

$\widehat{SPK} = 90^o$, do đó $PS \perp BC$, mà $AP \perp BC$ suy ra A, P, S thẳng hàng.

Do $AS \perp BC, ID \perp BC \Rightarrow AS // ID$ (đpcm).

Bài V. (1,0 điểm) Cho tập hợp A gồm 70 số nguyên dương không vượt quá $90.$ Gọi B là tập hợp gồm các số có dạng $x + y$ với $x \in A$ và $y \in B$ (x,y không nhất thiết phân biệt)

3) **Chứng minh $68 \in B$**

Xét 34 cặp số $(1; 67); (2; 66); ...; (34; 34)$ do tập A chứa 70 số nguyên dương không vượt quá 90 (A chỉ không chứa 20 số nguyên dương không vượt quá 90) nên có ít nhất 1 cặp số thuộc A . Từ đó ta có $68 \in B.$

4) **Chứng minh B chứa 91 số nguyên liên tiếp**

Ta sẽ chứng minh mọi số nguyên dương n với $42 \le n \le 90$, đều thuộc tập B .

- Với $42 \le n \le 90$: Giả sử $n \notin B.$

- Nếu n là số lẻ, các cặp số $(n-1,1);(n-2;2);$ ... ; $\left(\frac{n-1}{2};\frac{n+1}{2}\right).$ Vì $n \notin B$ nên mỗi cặp số đều có ít nhất một số không thuộc tập A. Suy ra có ít nhất $\frac{n-1}{2} \geq 21$ số nguyên dương không lớn hơn 90 không thuộc tập A, mâu thuẫn vì tập A gồm 70 số nguyên dương không vượt quá 90.

- Nếu n là số chẵn, xét các cặp số ($n-1,1);(n-2;2);$ ... ; $\left(\frac{n-1}{2};\frac{n+1}{2}\right)$ và số $\frac{n}{2}.$ Vì $n \notin B$ nên mỗi cặp số đều có ít nhất một số không thuộc tập A, ngoài ra $\frac{n}{2} \notin A.$ Suy ra có ít nhất $\frac{n}{2} \geq 21$ số nguyên dương không lớn hơn 90 không thuộc tập A, mâu thuẫn vì A gồm 70 số nguyên dương không vượt quá 90.

Như vậy, tất cả các số nguyên dương n với $42 \leq n \leq 90$, đều thuộc tập B.

- Với $91 \leq n \leq 140$: Giả sử $n \notin B.$

- Nếu n là số lẻ: xét các cặp số $(90,n-90),(89;n-89);...;\left(\frac{n-1}{2};\frac{n+1}{2}\right).$ Vì $n \notin B$ nên mỗi cặp số đều có ít nhất một số không thuộc tập A. Suy ra có ít nhất $91-\frac{n-1}{2} \geq 21$ số nguyên dương không lớn hơn 90 không thuộc tập A, mâu thuẫn vì tập A gồm 70 số nguyên dương không vượt quá 90.

- Nếu n là số chẵn, xét các cặp số $(90;n-90);(89;n-89);$ ... ; $\left(\frac{n+2}{2};\frac{n-2}{2}\right)$ và số $\frac{n}{2}.$ Vì $n \notin B$ nên mỗi cặp số đều có ít nhất một số không thuộc tập A, ngoài ra $\frac{n}{2} \notin A.$ Suy ra có ít nhất $91-\frac{n}{2} \geq 21$ số nguyên dương không lớn hơn 90 không thuộc tập A, mâu thuẫn vì A gồm 70 số nguyên dương không vượt quá 90.

Như vậy, tất cả các số nguyên dương n với $91 \leq n \leq 140$, đều thuộc tập B.

- Từ hai kết quả trên, ta suy ra điều phải chứng minh.