

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
оргкомитета третьего этапа
республиканской олимпиады по
учебным предметам, заместитель
начальника управления образования
Могилевского облисполкома

«__» ноября 2012 г. О.В.Стельмашок

ЗАДАНИЯ

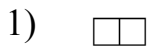
второго этапа республиканской олимпиады по учебному предмету
«Математика» 2012/2013 учебного года

Дата проведения: **1 декабря 2012г.**

10 класс

1. Купец нанял пароход для перевозки грузов на расстояние 1000 км. Он предлагает плату хозяину парохода в размере 1500 золотых монет, но требует вернуть 9 монет за каждый час пребывания парохода в пути. Пароход будет двигаться с постоянной скоростью. Если скорость будет равна V км/ч, то в конце пути хозяин должен выплатить команде премию в размере $10V$ монет. С какой скоростью хозяин должен вести пароход, чтобы заработать наибольшее число монет? Найти это число монет.

2. Рабочие должны были выложить пол прямоугольной комнаты плитками двух видов:



и

2)



.

Размеры пола таковы, что он может быть полностью покрыт некоторым набором плиток указанных размеров. Нужно количество плиток каждого размера было подготовлено. Однако при переносе их к месту работы, рабочие уронили ящик с плитками первого вида и 6 плиток (первого вида) разбились. Их решили заменить тремя плитками второго вида. Докажите, что теперь выложить поверхность пола имеющимися плитками не удастся. (Резать плитки запрещается.)

3. Внутри выпуклого 14-угольника отмечено 1000 различных точек. На какое наибольшее число треугольников можно разрезать этот 14-угольник, если вершинами треугольников могут быть вершины 14-угольника и отмеченные точки?

4. Решить уравнение $20\{x\} - 13[x] = 0$, где $[x]$ – это наибольшее целое число, не превосходящее x ; $\{x\} = x - [x]$.

Примечание: $[x]$ называется *целой частью* числа x . Например, $[5,2] = 5$, $[7] = 7$, $[-3,1] = -4$. $\{x\}$ – называется *дробной частью* числа x . Например, $\{5,2\} = 0,2$, $\{7\} = 0$, $\{-3,1\} = 0,9$.

5. Две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C . К окружностям проведена общая касательная AB (A и B – точки касания окружностей ω_1 и ω_2 соответственно). Найдите радиусы окружностей ω_1 и ω_2 , если радиус окружности,

проходящей через точки A , B и C , равен 6 , а площадь четырехугольника O_1ABO_2 равна 78 .

Пользоваться калькулятором не разрешается

Время работы: 4,5 часа

ЗАЦВЯРДЖАЮ
Намеснік старшыні
аргкамітэта трэцяга этапу
рэспубліканскай алімпіяды па
вучэбных прадметах,
намеснік начальніка
ўпраўлення адукацыі
Магілёўскага аблвыканкама

_____ А.У.Стэльмашок
«__» лістапада 2012 г.

ЗАДАННІ
другога этапу рэспубліканскай алімпіяды па вучэбнаму прадмету
“Матэматыка” 2012/2013 навучальнага года

Дата правядзення: **1 снежня 2012 г.**

10 класс

1. Купец наняў параход для перавозкі грузаў на адлегласць 1000 км. Ён прапануе плату гаспадару парахода ў памеры 1500 залатых манет, але патрабуе вярнуць 9 манет за кожную гадзіну знаходжання парахода ў дарозе. Параход будзе рухацца з пастаяннай скорасцю. Калі скорасць будзе роўная V км / ч, то ў канцы шляху гаспадар павінен выплаціць камандзе прэмію ў памеры $10V$ манет. З якой скорасцю гаспадар павінен весці параход, каб зарабіць найбольшую колькасць манет? Знайсці гэтую колькасць манет.

2. Рабочыя павінны былі выкласці падлогу прамавугольнага пакоя пліткамі двух відаў:

1)  і 2) 

Памеры падлогі такія, што яна можа быць цалкам пакрыта некаторым наборам плітак названых памераў. Патрэбная колькасць плітак кожнага памера была падрыхтавана. Аднак пры пераносе іх да месца працы рабочыя выпусцілі скрыню з пліткамі першага віду, і 6 плітак (першага віду) разбіліся. Іх вырашылі замяніць трыма пліткамі другога віду. Дакажыце, што цяпер выкласці паверхню падлогі наяўнымі пліткамі не атрымаецца. (Рэзаць пліткі забараняецца.)

3. Унутры выпуклага 14-вугольніка адзначана 1000 розных пунктаў. На якую найбольшую колькасць трохвугольнікаў можна разрэзаць гэты 14-вугольнік, калі вяршынямі трохвугольнікаў могуць быць вяршыні 14-вугольніка і адзначаныя пункты?

4. Рашыць ураўненне $20\{x\} - 13[x] = 0$, дзе $[x]$ - гэта найбольшы цэлы лік, які не большы за x ; $\{x\} = x - [x]$.

Заўвага: $[x]$ называецца *цэлай часткай* ліку x . Напрыклад, $[5,2] = 5$, $[7] = 7$, $[-3,1] = -4$.
 $\{x\}$ - завецца *дробавай часткай* ліку x . Напрыклад, $\{5,2\} = 0,2$, $\{7\} = 0$, $\{-3,1\} = 0,9$.

5. Дзве акружнасці ω_1 і ω_2 з цэнтрамі O_1 і O_2 датыкаюцца знешнім чынам у пункце C . Да акружнасці праведзена агульная датычная AB (A і B - пункты дотыку акружнасцяў ω_1 і ω_2 адпаведна). Знайдзіце радыусы акружнасцяў ω_1 і ω_2 , калі радыус акружнасці, якая

праходзіць праз пункты А, В і С, роўны 6, а плошча чатырохвугольніка O_1ABO_2 роўная 78.

Карыстацца калькулятарам не дазваляецца

Час працы: 4,5 гадзіны

10 класс

Решения

Решения учащихся могут отличаться от предложенных авторских решений!

1. Решение

Из условия следует, что количество монет N , которые заработает хозяин парохода, выражается

формулой: $N = 1500 - \left(9 \cdot \frac{1000}{V} + 10V \right)$. Минимально возможное значение величины $\frac{9000}{V} + 10V$

можно определить при помощи производной, либо используя неравенство Коши: $\frac{9000}{V} + 10V$

$\geq 2\sqrt{\frac{9000}{V} \cdot 10V} = 2\sqrt{90000} = 600$ (монет). Заработок хозяина в этом случае составит $1500 - 600 = 900$ монет. Скорость, с которой хозяин должен вести пароход найдем из условия

(если решали по неравенству Коши): $\frac{9000}{V} = 10V$, откуда $V = 30$ (км/ч).

Ответ: 30 км/ч, 900 монет.

2. Решение.

Разобьем пол на квадраты 1×1 (из условия следует, что это можно сделать) и раскрасим полученные квадраты в шахматном порядке в черный и белый цвета. Тогда 6 плиток вида 1 покрыли бы 6 черных и 6 белых клеток (т.е. четное количество). Но одна плитка вида 2 покрывает неодинаковое число черных и белых клеток: 3 черных и 1 белую, или 1 черную и 3 белые клетки. Тогда 3 плитки вида 2 покроют нечетные количества черных и белых клеток. Получили противоречие. Значит, выложить поверхность пола имеющимися плитками не удастся. Что и требовалось доказать.

3. Решение

Заметим, что наибольшее число треугольников получится, если в качестве вершин этих треугольников будут задействованы все отмеченные точки. (Если отмеченная точка попадает внутрь какого-либо треугольника, то этот треугольник можно разрезать на более мелкие треугольники, соединив отрезками данную отмеченную точку с вершинами треугольника). Пусть 14-угольник разрезан на n треугольников, тогда сумма углов этих треугольников равна $180n$. С другой стороны сумма углов этих треугольников, вершиной которых является некоторая вершина 14-угольника, равна величине угла при данной вершине, а сумма углов этих треугольников, вершиной которых является внутренняя точка 14-угольника, равна 360° . Сумма всех углов 14-угольника равна $180^\circ(14-2) = 180^\circ \cdot 12$. Тогда имеем: $180^\circ n = 180^\circ \cdot 12 + 360^\circ \cdot 1000$, откуда $n = 12 + 2 \cdot 1000 = 2012$.

Ответ: 2012 треугольников.

4. Решение

Из определения дробной части числа x следует, что $0 \leq \{x\} < 1$. Тогда имеем $\{x\} = \frac{13[x]}{20}$,

$$0 \leq \frac{13[x]}{20} < 1, \quad 0 \leq [x] < \frac{20}{13}. \text{ Получаем, что } [x] = 0 \text{ или } [x] = 1.$$

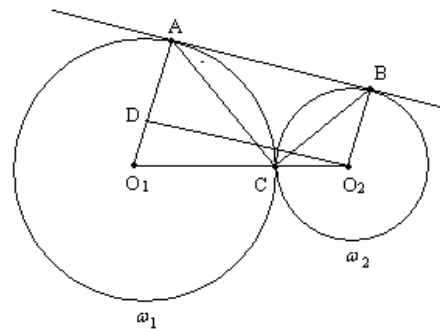
Если $[x] = 0$, то $\{x\} = 0$, и $x = 0$. Если $[x] = 1$, то $\{x\} = \frac{13}{20}$, и $x = 1\frac{13}{20}$.

Ответ: 0; $1\frac{13}{20}$.

5. Решение

Пусть C – точка касания окружностей ω_1 и ω_2 .
Докажем, что $\angle ACB = 90^\circ$.

$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle AO_1C$, $\angle CBA = \frac{1}{2} \angle BO_2C$. Но $\angle AO_1C + \angle BO_2C = 180^\circ$ (внутренние односторонние при $AO_1 \parallel BO_2$ и секущей O_1O_2). Тогда $\angle CAB + \angle CBA = 90^\circ$, и значит $\angle ACB = 90^\circ$.



Поскольку по условию радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 6, то гипотенуза $AB = 12$.

Пусть радиусы окружностей ω_1 и ω_2 равны R и r соответственно. Пусть $R \geq r$.

Выразим AB через R и r . Проведем $O_2D \parallel AB$. $DA = O_2B = r$, $DO_1 = R - r$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник O_1DO_2 ($\angle D = 90^\circ$).

$$O_1O_2^2 = O_1D^2 + O_2D^2.$$

$$(R + r)^2 = AB^2 + (R - r)^2, \text{ откуда } AB = 2\sqrt{Rr}.$$

$$2\sqrt{Rr} = 12, \quad Rr = 36. \quad (*)$$

Четырехугольник O_1ABO_2 является трапецией с основаниями O_1A и O_2B и высотой AB .

$$S_{O_1ABO_2} = \frac{AO_1 + BO_2}{2} \cdot AB = \frac{R + r}{2} \cdot 12 = 6(R + r) = 78, \text{ т.е. } R + r = 13. \quad (**)$$

Итак, из (*) и (**) имеем систему уравнений:

$$Rr = 36$$

$$R + r = 13; \text{ откуда, полагая, что } R \geq r, \text{ получаем } R = 9, r = 4.$$

Ответ: 9 и 4