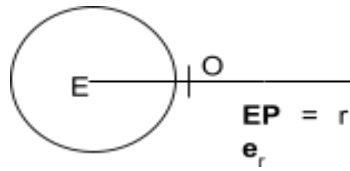


Détection des planètes extra-solaires

Première partie : caractéristiques orbitales

1.a. O est le centre de masse du système (P, E)



L'hypothèse de la répartition de matière avec la symétrie sphérique, le théorème de Gauss appliqué aux champs gravitationnels de l'étoile et de la planète, et le théorème de l'action et la réaction conduisent à l'expression demandée de la force d'interaction gravitationnelle entre la planète P et son étoile E :

avec ,

si on choisit d'annuler l'énergie potentielle lorsque la distance PE tend vers l'infini.

1.b. Soit L_O le moment cinétique en O, de P, dans le repère barycentrique R^* du système (P, E). Si L_P est le moment cinétique propre de la planète, le champ des moments cinétiques permet d'écrire :

$$L_O = L_P + \mathbf{OP} \wedge m_p \mathbf{v}(P/R^*) = \mathbf{OP} \wedge m_p \mathbf{v}(P/R^*)$$

en négligeant le moment cinétique propre (ce qui revient à traiter la planète comme un point matériel, en oubliant sa rotation propre).

Le théorème du moment cinétique appliqué à P, en O, dans le repère barycentrique du système, implique, car $\mathbf{OP}$ est colinéaire à $\mathbf{OP}$

On en déduit que L_O se conserve ; d'où : $\mathbf{OP} \wedge m_p \mathbf{v}(P/R^*) = L_O = \text{cte}$.

Le vecteur position, dans R^* , du centre P de la planète, $\mathbf{OP}$, est toujours orthogonal à un vecteur constant et fixe dans R^* :

le point P balaye donc un plan fixe de R^*

2.a. On néglige m_p devant M_* ; O coïncide avec le centre E de l'étoile. Le mouvement de P est circulaire de rayon a et de période T.

$L_O = \mathbf{OP} \wedge m_p \mathbf{v}(P/R^*) = a \mathbf{e}_r \wedge m_p v(P/R^*) \mathbf{e}_\theta = m_p a v \mathbf{e}_z = \text{cte}$. D'où : $v = \text{cte}$. Le mouvement circulaire est uniforme ; l'accélération de P peut s'écrire $\gamma(P/R^*) = -v^2/a \mathbf{e}_r$.

Le théorème du mouvement du centre d'inertie appliqué à P dans R^* s'écrit :

$m_p \gamma(P/R^*) = \mathbf{f}_{E \rightarrow P}$ soit $\Rightarrow$; or, d'où :

et C

C est une constante caractéristique de chaque étoile

On retrouve la troisième loi de Képler.

2.b. Si les durées sont mesurées en années (terrestres), les distances en unités astronomiques, et les masses (d'étoiles) en masses solaires, alors $C = 1$ dans le cas du soleil et :

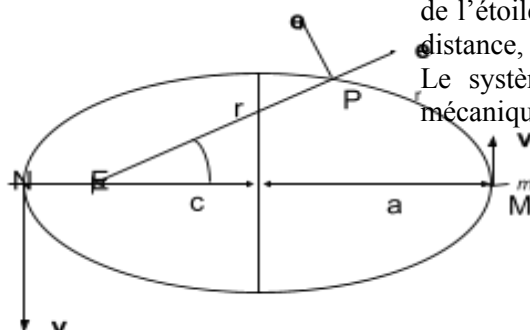
$C = M_s / M_*$, pour une étoile quelconque de masse M_*

L'étoile 51 Peg est analogue au soleil, donc $C \approx 1$ pour cette étoile. Sa planète balaye son orbite en : $T = 4$ jours ; d'où le rayon a' de son orbite circulaire :

$$UA = 0,0493151 UA \approx 7,4 \cdot 10^6 \text{ km}$$

3.a. On néglige encore la masse de la planète devant celle de l'étoile ; l'orbite de P n'est plus circulaire mais elliptique.

L'excentricité de l'orbite est $e = c / a$



En M la planète est à la distance maximale r_M de l'étoile avec $r_M = a + c = a(1 + e)$; en N la distance, minimale, est $r_m = a - c = a(1 - e)$.

Le système (P + E) est isolé ; son énergie mécanique se conserve. D'où :

L'étoile étant supposée fixe, son énergie cinétique n'apparaît pas.

La conservation de l'énergie mécanique implique que la vitesse de la planète est v_M , maximale, lorsque la distance est minimale : EN ; inversement si la vitesse est v_m , minimale, alors la distance est maximale, EM. Soit :

les vitesses sont extrémales lorsque la planète se trouve à l'une des 2 extrémités du grand axe de son orbite elliptique ; $r_m = a(1 - e)$ et $r_M = a(1 + e)$.

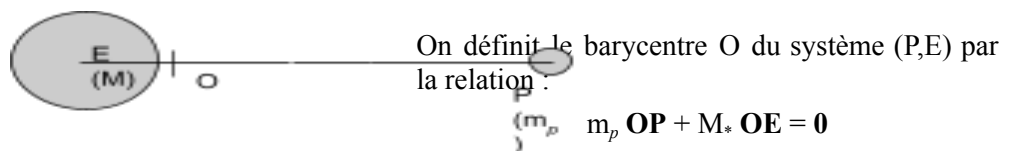
3.b. Par ailleurs la conservation du moment cinétique orbital de la planète, $L_O = m_p r v_\theta e_z$, implique que les produits $(v_M r_m)$ et $(v_m r_M)$ sont égaux à $r v_\theta$ (car $v \equiv v_\theta$ lorsque r est extrémal). D'où :

3.c. Le système (P + E) est isolé, d'où : En se plaçant aux extrémités du grand axe de l'orbite, il vient :
Soit, avec $r_m = a(1 - e)$ et $r_M = a(1 + e)$, le résultat demandé :

Enfin en remplaçant v_m par v_M , il vient .
D'où l'expression de v_M en fonction de a , e , M_* , G :

3.d. Si l'orbite était circulaire, $e = 0$, $v = \text{cte} = v_0 =$
D'où l'expression du rapport $v_M / v_0 =$
A.N. : $e = 0,67$, on obtient : $v_M / v_0 = 2,25$

4.a. On ne néglige plus m_p , mais le rapport (m_p / M_*) reste très petit .

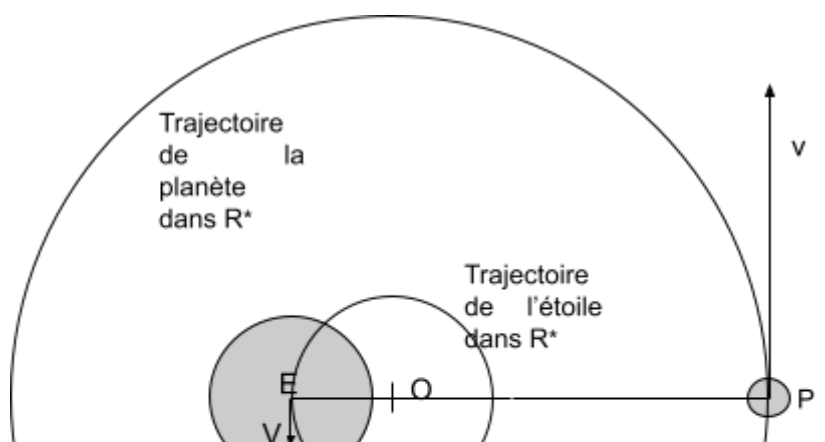


En dérivant par rapport au temps cette relation, dans R^* , repère barycentrique du système, on obtient la relation entre les vitesses V_* de l'étoile et v de la planète :

$$m_p v + M_* V_* = 0$$

4.b. On suppose ici que les orbites sont circulaires dans R^* , centrées en O fixe ; elles sont homothétiques dans une homothétie de centre O et de rapport égal à : $-m_p / M_*$.
L'orbite de l'étoile a un rayon ; la période de ce mouvement est . Le théorème du mouvement du centre d'inertie appliqué à l'étoile, projeté sur l'axe radial, s'écrit :

. D'où :



Soit en se limitant au terme d'ordre minimal en m_p / M_* :

(la relation est homogène)

4.c. $T = 4$ jours ; $V_* = 10 \text{ m.s}^{-1}$; $M_* \approx M_S = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$; $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$.

D'où :

$$= \text{kg}$$

c'est $(149 / 6) \approx 25$ fois la masse de la Terre $\approx$ la masse de Jupiter divisée par 13.

Il ne s'agit pas d'une planète tellurique (ce serait une planète « intermédiaire » entre nos deux types de planètes).

4.d. Maintenant on considère les orbites elliptiques d'excentricité $e = 0,67$; la vitesse maximale de l'étoile est $V_M = 10 \text{ m.s}^{-1}$.

On a montré à la fin du § 3.c) que si $m_p \ll M_*$, le module maximal de la vitesse de la planète en orbite elliptique était ; le module maximal de la vitesse de l'étoile s'en déduit par l'homothétie de centre O et de rapport m_p / M_* , soit :

Si on suppose qu'on a toujours la relation du § 2.a), C (avec a demi-grand axe de l'orbite elliptique de la planète relativement à l'étoile), on obtient ;, soit . D'où et :

On retrouve évidemment la formule du paragraphe précédent si $e = 0$ (orbite circulaire et $V_M \equiv V_*$).

A.N. : $e = 0,67$; $V_M = 10 \text{ m.s}^{-1}$; on a toujours $T = 4$ jours et $M_* \approx M_S = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

D'où :

$$\text{kg.}$$

C'est environ 11 fois la masse de la Terre.

Deuxième partie : visibilité de la planète

1.a. En posant $u = \frac{hc}{\lambda k_B T_*}$ on se ramène à la recherche du maximum de la fonction $u \mapsto \frac{u^5}{e^u - 1}$. Le plus simple est d'annuler la dérivée logarithmique, ce qui donne :

$$\frac{5}{u} - \frac{e^u}{e^u - 1} = 0 \quad \text{ou encore} \quad e^{-u} = 1 - \frac{u}{5}$$

La résolution numérique (non exigée) fournit $u_* = 4,965$. On a bien le résultat demandé, avec

$$\eta = \frac{1}{u_*}.$$

1.b. On calcule d'abord le flux surfacique hémisphérique :

$$\varphi = \int_0^\infty \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right) d\lambda = 2\pi h c^2 \left(\frac{k_B T_*}{hc} \right)^4 \left[\int_0^\infty \frac{u^3 du}{e^u - 1} \right] = \sigma T_*^4 \quad (\text{loi de Stefan})$$

Il suffit de multiplier par l'aire de la surface de l'étoile pour obtenir la puissance totale rayonnée :

$$\Phi = \sigma 4\pi R_*^2 T_*^4$$

2.a. La planète est vue du centre de l'étoile sous l'angle solide $\Omega = \pi \left(\frac{R_P}{a} \right)^2$. Le rayonnement émis par l'étoile étant isotrope, la planète reçoit une fraction $\frac{\Omega}{4\pi}$ de ce rayonnement :

$$\Phi_P = \frac{\Phi}{4} \left(\frac{R_P}{a} \right)^2$$

2.b. On a évidemment :

$$\Phi_r = A\Phi_P \quad \text{et} \quad \Phi_a = (1 - A)\Phi_P$$

2.c. Le spectre du rayonnement réfléchi par la planète est identique, à un coefficient multiplicatif près, au spectre du rayonnement incident. Le maximum est obtenu à la même température :

$$T_r = T_*$$

2.d. L'équilibre radiatif de la planète s'obtient en écrivant que la puissance totale absorbée est réémise selon la loi de Stefan :

$$(1 - A) \frac{\sigma 4\pi R_*^2 T_*^4}{4} \left(\frac{R_P}{a} \right)^2 = 4\pi R_P^2 \sigma T_P^4$$

$$\text{d'où} \quad T_P = (1 - A)^{1/4} \left(\frac{R_*}{2a} \right)^{1/2} T_*$$

2.e. L'application numérique donne : $T_P = 1050 K$ et $\lambda_P = 2,75 \mu m$, le maximum d'émission se situe donc dans le domaine des infrarouges.

2.f. Pour un observateur lointain, le rapport des puissances émises par la planète et par l'étoile dans un petit intervalle spectral vaut :

$$\frac{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T_*}\right) - 1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T_P}\right) - 1} \left(\frac{R_P}{R_*} \right)^2 = f(\lambda) \left(\frac{R_P}{R_*} \right)^2$$

On obtient numériquement :

$$\begin{aligned}f(1\mu m) &= 0,000012 \\f(5\mu m) &= 0,044 \\f(10\mu m) &= 0,096\end{aligned}$$

Au-delà de $10\mu m$, $f(\lambda)$ continue de croître jusqu'à 0,18, mais les puissances émises deviennent très faibles. Dans la pratique, on conseillerait d'opérer entre 3 et $10\mu m$, mais la petitesse du rapport

$\left(\frac{R_p}{R_*}\right)^2$ rend la détection du spectre d'émission de la planète quasiment impossible.

3.a. L'ordre de grandeur de la taille angulaire due à la diffraction est :

$$\alpha_d = \frac{\lambda}{D}$$

3.b. Pour un observateur situé à une distance d , la séparation angulaire maximale du système planète-étoile vaut :

$$\alpha_{EP} = \frac{a}{d}$$

3.c. On obtient numériquement :

$$\begin{aligned}\alpha_{EP} &= 0,0039'' \text{ d'arc} \\ \alpha_d &= 0,021'' \text{ d'arc pour } \lambda_* = 0,50\mu m \\ \alpha_d &= 0,11'' \text{ d'arc pour } \lambda_p = 2,75\mu m\end{aligned}$$

Même en utilisant un télescope de $5m$ de diamètre dont la seule limitation serait la diffraction, on ne pourrait pas séparer « géométriquement » l'étoile et sa planète.

Troisième partie : vélocimétrie Doppler

1.a. L'observateur est à l'origine O de l'axe Ox et la source s'en éloigne à la vitesse v vers les $x > 0$. À la date t_0 , la source est à l'abscisse x_0 et émet un signal qui parvient en O à la date :

$$t_0 + \frac{x_0}{c}$$

À la date $t_0 + t_s$, la source est à l'abscisse $x_0 + vt_s$ et émet un signal qui parvient en O à la date :

$$t_0 + t_s + \frac{x_0 + vt_s}{c}$$

La période apparente est la différence de ces deux dates, soit :

$$t_a = t_s \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

On en déduit pour les fréquences, au second ordre près en v/c :

$$\nu_a = \frac{\nu_s}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)} \cong \nu_s \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

1.b. Une raie spectrale « connue », par exemple une raie de l'hydrogène, émise par une source s'éloignant de l'observateur, lui apparaîtra légèrement décalée vers les basses fréquences (le rouge, s'il s'agit du spectre visible). Inversement, la raie apparaîtra décalée vers les hautes fréquences si la source se rapproche de l'observateur.

Seule importe en fait la projection $V_{//}$ de la vitesse sur l'axe de visée : la projection orthogonale ferait intervenir des termes du deuxième ordre en v/c , qu'il serait de toute façon absurde de prendre en compte dans ce raisonnement non relativiste.

1.c. Reprenons maintenant les notations de la première partie, question 4. O est le barycentre du système étoile-planète, et l'étoile décrit un cercle dans le plan xOy à la vitesse V_* , l'axe Ox étant la projection de l'axe de visée sur le plan de l'orbite. Le vecteur vitesse de l'étoile est de la forme :

$$\vec{V} = V_* \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \vec{e}_x + V_* \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \vec{e}_y$$

On obtient $V_{//}$ en le projetant sur l'axe de visée, repéré par le vecteur unitaire : $\vec{u} = \vec{e}_x \sin i + \vec{e}_z \cos i$

$$V_{//} = V_* \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \sin i$$

1.d. La valeur maximale est $V_{//}^0 = V_* \sin i$. On utilise le résultat établi dans la première partie :

$$V_* = m_P \left(\frac{2\pi G}{T M_*^2} \right)^{1/3}$$

Ce qui donne bien :

$$m_P \sin i = V_{//}^0 \left(\frac{M_*^2 T}{2\pi G} \right)^{1/3}$$

2.a. On peut calculer la largeur Doppler en différentiant la relation du 1.a), comme pour faire un calcul d'incertitude :

$$dv = -v_0 \frac{dv_{//}}{c}$$

On prend ensuite la valeur absolue :

$$\Delta v = v_0 \frac{\Delta v_{//}}{c} = \frac{\Delta v_{//}}{\lambda_0}$$

2.b. Dans le modèle cinétique du gaz parfait, l'énergie cinétique moyenne vaut $\frac{1}{2} m_H v_*^2 = \frac{3}{2} k_B T_*$, d'où :

$$v_* = \sqrt{\frac{3k_B T_*}{m_H}}$$

2.c. Numériquement, $v_* = 11,9 \text{ km.s}^{-1}$. En utilisant le résultat de la question 1.a) de la deuxième partie, on obtient $\lambda_* = 0,50 \mu\text{m}$, ce qui donne une largeur Doppler : $\Delta v_{th} = 23,8 \text{ GHz}$

3.a. Calculons la décomposition spectrale :

$$B(\nu) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{b}{2} (e^{2i\pi\nu_0 t} + e^{-2i\pi\nu_0 t}) e^{-2i\pi\nu t} dt = \frac{b}{2} \left(\frac{\sin \pi(\nu - \nu_0)\tau}{\pi(\nu - \nu_0)} + \frac{\sin \pi(\nu + \nu_0)\tau}{\pi(\nu + \nu_0)} \right)$$

Pour ν et ν_0 de l'ordre de 10^{15} Hz (rayonnement visible) et $\nu - \nu_0$ de l'ordre de 10^8 Hz (voir plus loin), le deuxième terme est négligeable devant le premier et on trouve bien :

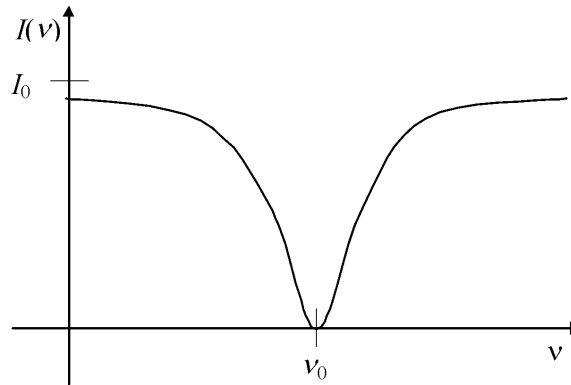
$$|B(\nu)|^2 = \frac{b^2}{4} \left(\frac{\sin \pi(\nu - \nu_0)\tau}{\pi(\nu - \nu_0)} \right)^2$$

La première annulation intervient pour $\nu - \nu_0 = \frac{1}{\tau}$, on peut donc estimer que $\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau}$.

3.b. On obtient numériquement $\tau = 23.7 \text{ ns}$ et $\Delta\nu_{\text{col}} = 42 \text{ MHz}$.

3.c. On constate que dans ces conditions l'élargissement consécutif aux collisions est très faible devant la largeur Doppler (3 ordres de grandeur). On le négligera par la suite.

4.a. Voici l'allure du profil de raie :



Lorsque $|\nu - \nu_0| \gg \Delta\nu$, on a $I(\nu) \cong I_0$. D'autre part, $I(\nu_0) = 0$ et $I\left(\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}\right) = \frac{I_0}{2}$.

Pour calculer la pente maximale, posons $X = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu}$ et $Y = \frac{I(\nu)}{I_0}$. Il vient en dérivant deux fois :

$$Y = \frac{X^2}{X^2 + \frac{1}{4}} \quad \frac{dY}{dX} = \frac{X}{2\left(X^2 + \frac{1}{4}\right)^2} \quad \frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{\frac{1}{4} - 3X^2}{2\left(X^2 + \frac{1}{4}\right)^3}$$

La pente maximale est donc obtenue pour $|X| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ et vaut $\left|\frac{dY}{dX}\right|_{\text{max}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. D'où :

$$\left|\frac{dI}{d\nu}\right|_{\text{max}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{I_0}{\Delta\nu} \quad \text{pour} \quad \nu = \nu_0 \pm \frac{\Delta\nu}{2\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad I = \frac{I_0}{4}$$

4.b. Considérons I comme une fonction des deux variables ν et ν_0 . On remarque que $\left| \frac{\partial I}{\partial \nu_0} \right| = \left| \frac{\partial I}{\partial \nu} \right|$, ce qui signifie qu'il revient au même d'observer les variations d'intensité en se déplaçant sur l'axe des fréquences, ou bien d'observer les variations d'intensité pour une fréquence donnée lorsque la courbe se translate. On peut alors écrire qu'une faible variation $\delta \nu_0$ de la fréquence centrale entraîne une variation relative d'intensité :

$$\frac{\delta I}{I} = \left| \frac{dI}{d\nu} \right|_{\max} \frac{\delta \nu_0}{I_0 / 4} = 3\sqrt{3} \frac{\delta \nu_0}{\Delta \nu}$$

4.c. En utilisant les résultats du 2.a) et du 4.b), la valeur minimale décelable de $V_{//}^0$ est :

$$V_{//}^0 = \lambda_* \delta \nu_0 = \frac{\lambda_* \Delta \nu_{th}}{3\sqrt{3}} \frac{\delta I}{I} = 11,5 \text{ ms}^{-1}$$

ce qui est tout juste supérieur à la valeur maximale de la vitesse de l'étoile introduite 4.d) de la première partie : $V_M = 10 \text{ ms}^{-1}$.

Si on se place dans le cas le plus favorable ($\sin i = 1$) la formule de la question 1.d) nous donne, pour la masse minimale d'une planète détectable par cette technique :

- pour $T = 4 \text{ jours}$, $m_P = 1,7 \times 10^{26} \text{ kg} = 28,4 M_T$
- pour $T = 1 \text{ an}$, $m_P = 7,7 \times 10^{26} \text{ kg} = 128 M_T = 0,38 M_J$