

Κί' η Γη γυρίζει, κι η Γη γυρίζει...

Η Μακάβα πόλη της Βραζιλίας διαθέτει το «Zerao Stadium» η μεσαία γραμμή του οποίου ταυτίζεται με την ισημερινή γραμμή της Γης. Ένας τεχνητός δορυφόρος με τροχιά στο επίπεδο του Ισημερινού περνά από την κατακόρυφο στο κέντρο του σταδίου n φορές σε 24 ώρες κινούμενος σε αντίθετη φορά σε σχέση με τη φορά περιστροφής της Γης περί τον άξονά της.

1) Να βρείτε σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της Γης βρίσκεται η τροχιά του δορυφόρου.

Να θεωρήσετε τη Γη σφαιρική και γνωστά τα: g_0 , ακτίνα Γης R_Γ , περίοδος περιστροφής της Γης περί τον άξονά της T_Γ και $n \geq 1$

Αμελούμε αλληλεπιδράσεις με άλλα ουράνια σώματα.

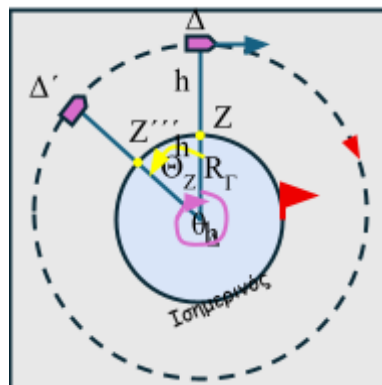
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Σε μια στροφή της Γης περί τον άξονα της, η οποία διαρκεί χρόνο μιας περιόδου $T_\Gamma = 24\text{h}$, ο δορυφόρος περνά n φορές από την κατακόρυφο στο κέντρο του σταδίου. Αν λοιπόν βρούμε τη σχέση της περιόδου T_Δ του δορυφόρου με την T_Γ θα μπορέσουμε να βρούμε το ύψος πτήσης h .

Έστω την $t_0 = 0$ ο δορυφόρος βρίσκεται στη θέση Δ , πάνω στην κατακόρυφο στο κέντρο Z του σταδίου Zerao και σε ύψος h από το Z .

Για 1^η φορά θα βρεθεί ο δορυφόρος έστω στη θέση Δ' , πάνω στην κατακόρυφο στο κέντρο του σταδίου έστω Z' , τη χρονική στιγμή t , έχοντας διαγράψει αντίστοιχα γωνίες Θ_Δ και Θ_Z .

Παρατηρούμε από το σχήμα ότι:



$$\theta_{\Delta} + \theta_Z = 2\pi \xrightarrow{\theta = \omega t = \frac{2\pi}{T} t} \frac{2\pi}{T_{\Delta}} t + \frac{2\pi}{T_Z} t = 2\pi \Rightarrow t = \frac{1}{\frac{1}{T_{\Delta}} + \frac{1}{T_Z}} \Rightarrow t = \frac{T_{\Delta} \cdot T_Z}{T_{\Delta} + T_Z} \quad (1)$$

Μπορούμε τώρα απλά να σκεφτούμε αναλογικά ότι:

Σε χρόνο t ο Δ περνά πάνω από το Z , **1** φορά

Σε χρόνο T_{Γ} ο Δ περνά πάνω από το Z , **n** φορές

Οπότε:

$$\frac{t}{T_{\Gamma}} = \frac{1}{n} \Rightarrow T_{\Gamma} = nt \xrightarrow{(1)} T_{\Gamma} = n \frac{T_{\Delta} \cdot T_{\Gamma}}{T_{\Delta} + T_{\Gamma}} \Rightarrow T_{\Delta} + T_{\Gamma} = n T_{\Delta} \Rightarrow T_{\Delta} (n-1) = T_{\Gamma} \Rightarrow$$

$$T_{\Delta} = \frac{T_{\Gamma}}{n-1} \quad (2)$$

Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του δορυφόρου σε ύψος h δίδεται από τη σχέση:

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h}} \xrightarrow[\substack{GM_{\Gamma} = g_0 R_{\Gamma}^2 \\ v = \frac{2\pi(R_{\Gamma} + h)}{T_{\Delta}}}]{} \frac{2\pi(R_{\Gamma} + h)}{T_{\Delta}} = \sqrt{\frac{g_0 R_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma} + h}} \xrightarrow{(2)}$$

$$\frac{2\pi(R_{\Gamma} + h)}{\frac{T_{\Gamma}}{n-1}} = \sqrt{\frac{g_0 R_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma} + h}} \Rightarrow \frac{4\pi^2(R_{\Gamma} + h)^2(n-1)^2}{T_{\Gamma}^2} = \frac{g_0 R_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma} + h} \Rightarrow$$

$$4\pi^2(R_{\Gamma} + h)^3(n-1)^2 = T_{\Gamma}^2 g_0 R_{\Gamma}^2 \Rightarrow (R_{\Gamma} + h)^3 = \frac{T_{\Gamma}^2 g_0 R_{\Gamma}^2}{4\pi^2(n-1)^2} \Rightarrow$$

$$R_{\Gamma} + h = \sqrt[3]{\frac{T_{\Gamma}^2 g_0 R_{\Gamma}^2}{4\pi^2(n-1)^2}} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{T_{\Gamma}^2 g_0 R_{\Gamma}^2}{(n-1)^2 4\pi^2}} - R_{\Gamma}$$

Τι συμβαίνει αν $n=1$;

Παντελεήμων Παπαδάκης

28/01/2026